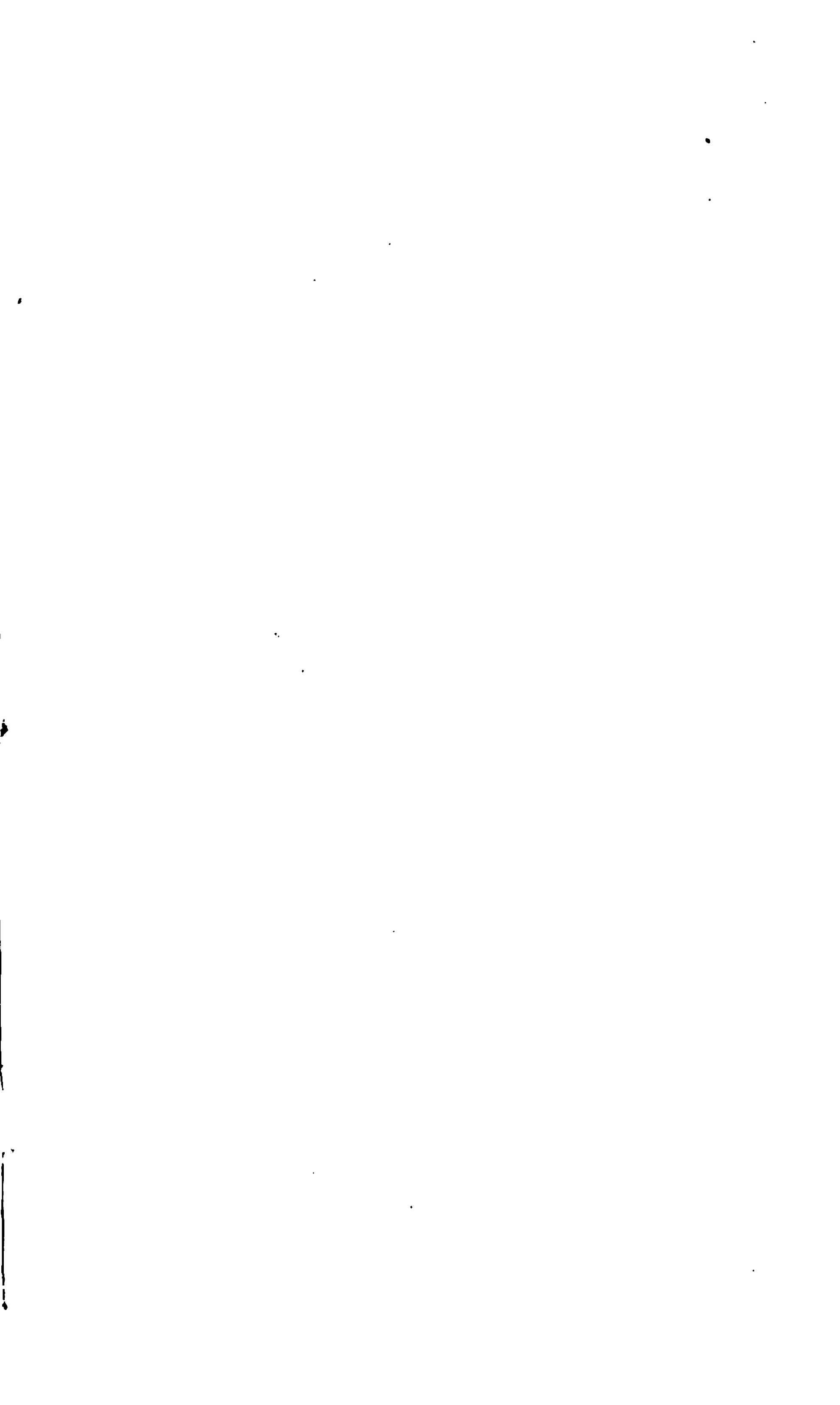
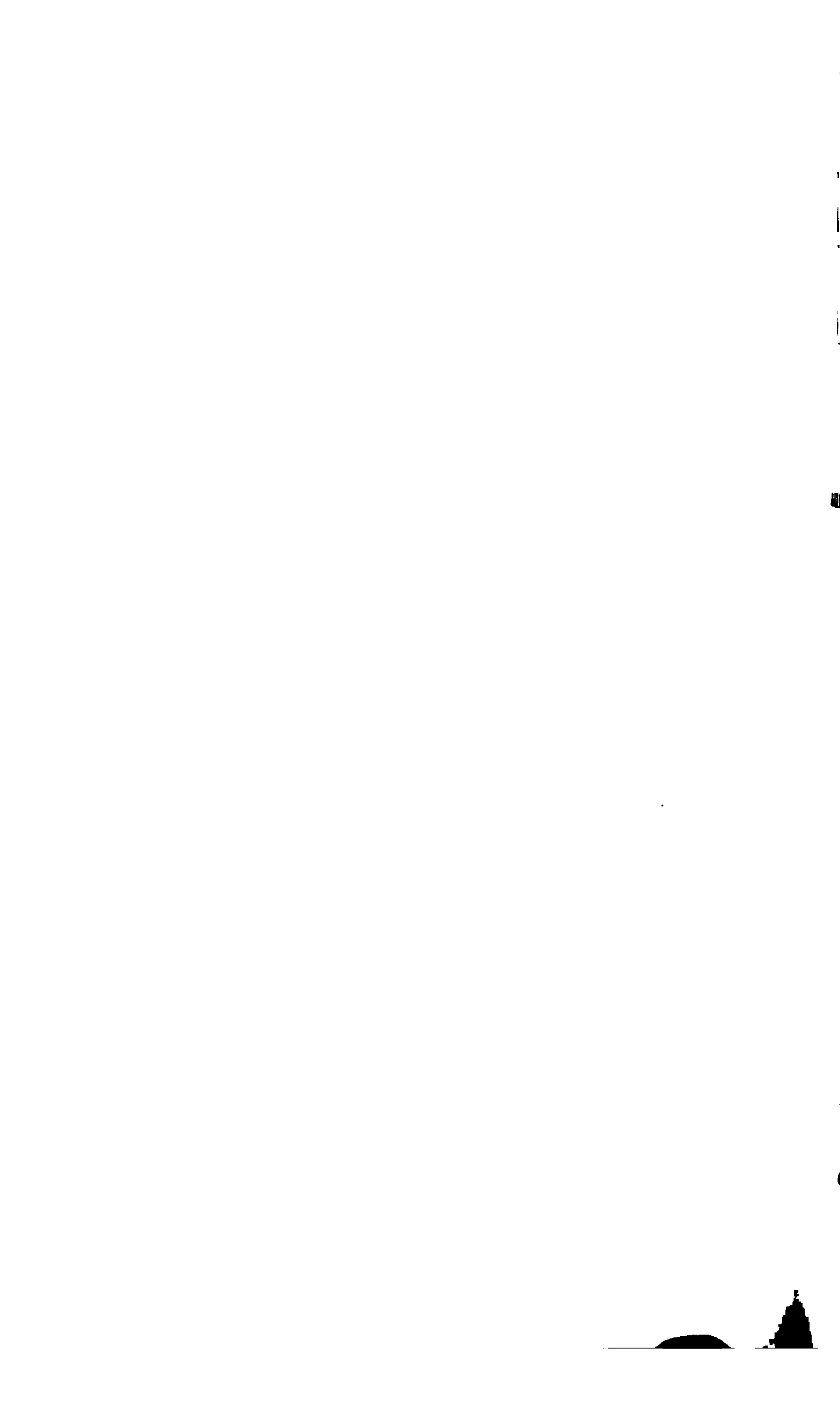








Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Achtunddreissigster Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1862.

Inhaltsverzeichniss des achtunddreissigsten Theils.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Das Problem des Pappus ad tres aut plures lineas im Zusammenhang mit der Theorie der Kegelschnitte durch die Methode der Synthesis und der Coordinaten.

Von

Herrn *Brändli*,

Gymnasiallehrer in Schaffhausen.

---

§. 1.

Begriff des Problems im weitern Sinn.

Nach Chasles „Geschichte der Geometrie", übersetzt von Sohncke, S. 35. besteht das genannte Problem im weitern Sinn in folgender Ortsbestimmung:

Gegeben mehrere feste Gerade, geschieden in zwei Gruppen oder n-Seite, nämlich: $(A_1, A_2, A_3, \ldots. A_n)$ und $(B_1, B_2, \ldots. B_n)$, beide von gleicher Anzahl n Gerader oder Seiten; aus einem beliebigen Punkte P gehe nach jeder Geraden eine Gerade als Strahl, im Ganzen nach allen festen Geraden zwei Gruppen von Strahlen oder zwei Strahlenbüschel, nämlich: $(R_1, R_2, R_3, \ldots. R_n)$ und $(r_1, r_2, \ldots. r_n)$, entsprechend jenen zwei Gruppen der festen Geraden oder den beiden n-Seiten; jeder Strahl R_k oder r_k bilde ferner mit der zugehörigen festen Geraden einen der Grösse nach beständigen Winkel α_k oder β_k, welche Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_k, \ldots. \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots. \beta_k, \ldots. \beta_n$ entweder alle ungleich, oder alle gleich, oder nur theilweise gleich sein können, und zwar so: dass die Gleichheit nur Statt findet zwischen den Winkeln jeder Gruppe unter sich, entweder theilweise oder im Ganzen, oder so: dass theilweise oder durchgehende Gleichheit Statt findet zwischen den

Winkeln der einen Gruppe und den Winkeln der andern Gruppe: unter diesen Voraussetzungen also zu bestimmen einen solchen Ort für den gemeinschaftlichen Mittelpunkt P jener zwei Strahlenbüschel, dass das Product aus den Strahlen des einen Büschels zum Product aus den Strahlen des andern Büschels in einem unveränderlichen Verhältnisse stehe.

Besondere Fälle.

Unter den Elementen dieses allgemeinen Problems können auch wiederholte vorkommen; welcher Fall eintritt, wenn z. B. zwei oder mehrere feste Gerade in der einen oder in beiden Gruppen in eine zusammenfallen und zugleich die Winkel zwischen diesen zusammenfallenden Geraden und ihren Strahlen unter sich gleich werden, und in Folge auch diese Strahlen in einen zusammenfallen, so dass dann in den Producten Potenzen zusammenfallender Strahlen vorkommen. Den einfachsten Fall der Art, wo für drei feste Gerade das Quadrat eines Strahls, der zugleich senkrecht auf der zugehörigen festen Grundlinie steht, zum Product der beiden andern ebenfalls auf ihren festen Geraden senkrechten Strahlen in einem beständigen Verhältnisse steht, oder wo ein Dreieck entsteht aus einem Viereck durch das Zusammenfallen zweier Seiten: diesen besondern Fall werden wir unten hervorheben und ausführlich behandeln, sowohl synthetisch, als nach der Coordinatenmethode, mit der noch nähern Bestimmung, dass das Verhältniss jener Producte aus den Strahlen den Werth 1 annehme, oder dass das Quadrat eines Strahles (Perpendikels) gleich sei dem Producte der beiden andern Strahlen (Perpendikel). Den Werth 1 kann übrigens das Verhältniss der Producte auch unter andern Umständen annehmen, bei vier und mehreren Geraden, bei zusammenfallenden und getrennt bleibenden Elementen, wie sich von selbst versteht.

§. 2.

Geschichte und Zusammenhang des Problems mit der Theorie der Kegelschnitte.

Nach Pappus war das Problem im weitern Sinne eine Klippe der Alten und blieb daher unberührt, bis ihm Descartes eine neue Berühmtheit verschaffte dadurch, dass die erste Anwendung seiner analytischen Geometrie oder Coordinaten-Geometrie bestand in der Lösung dieses Problems durch dieselbe. Seit Descartes

ist das Problem daher bekannt unter dem Namen „Problem des Pappus“, obgleich es schon den Scharfsinn eines Euklides und Apollonius erprobt hatte. Diese Geometer des Alterthums haben die Aufgabe gerade nur für drei oder vier Gerade gelöst, in welchem Falle der gesuchte geometrische Ort ein Kegelschnitt ist, wie nachher bewiesen werden soll, woraus weiter folgende allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte hervorgeht: Wenn ein beliebiges Viereck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so steht das Product der Entfernungen jedes Curvenpunktes von zwei Seiten des Vierecks zum Product der Entfernungen desselben Punktes von den beiden andern Seiten in einem beständigen Verhältniss. Newton hat dieses letzte schöne Theorem erweitert in dem Sinne, dass aus den Curvenpunkten auf die Seiten beliebig schiefe Strahlen statt der Perpendikel gezogen werden, und von dem so gestellten Theorem einen rein geometrischen Beweis gegeben, obgleich Chasles das Theorem ihm nur in jenem engeren Sinne zuschreibt. Der Verfasser der Principia mathematica philosophiae naturalis bedient sich in diesem Werk jenes erweiterten Theorems mit Vortheil und Gewandtheit, die an ihm nicht überrascht, aber doch immer Bewunderung einflösst, zu weiterer Entwickelung der Kegelschnitte. Die Werke über Kegelschnitte, welche zunächst nach dem genannten Werke Newton's erschienen sind, haben von ihm dieses Theorem in engerer oder weiterer Fassung entlehnt, ohne jedoch alle die Anwendungen davon zu machen, deren es fähig ist; später ist es so zu sagen ganz aus der Theorie der Kegelschnitte verschwunden, wenigstens lange ohne Folgen und Entwickelung geblieben bei der blossen unveränderten Ueberlieferung an spätere Zeiten, als wäre es zu ewiger Unfruchtbarkeit verdammt. Diese Unfruchtbarkeit, mit welcher dieser Hauptsatz Jahrhunderte hindurch sich fortschleppte, während sich aus ihm beinahe alle Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten lassen, und die geringe Wichtigkeit, welche bis auf die neuere Zeit die schönen Sätze des Desargues und Pascal, die natürliche und so zu sagen unmittelbare Folgerungen daraus sind, zu verdienen schienen, rufen nach Chasles eine sehr wahre Bemerkung des Bailly in's Gedächtniss, die noch durch manches Beispiel in Chasles Geschichte der Geometrie bestätigt wird. Bailly sagt nämlich: „Es scheint, dass die Ideen, wie wir, eine Kindheit und einen anfänglichen Zustand der Schwäche haben; bei ihrem Entstehen können sie noch nicht selbst zeugen, sondern verdanken ihre fruchtbringende Kraft erst dem Alter und der Zeit.“ Seitdem aber hat die neue Geometrie es durch die That bewiesen, dass obiges Theorem vom eingeschriebenen Viereck des Kegelschnitts als die allgemeinste

und fruchtbringendste Eigenschaft dieser Curve zu betrachten ist. Als einfache Folgerungen daraus sind schon angedeutet und hier noch bestimmter anzuführen: das bekannte mystische Sechseck des Pascal, das Theorem des Desargues über die Involution von den sechs Punkten einer Transversale, die entstehen durch den Durchschnitt mit der Curve und mit den vier Seiten eines eingeschriebenen Vierecks, das beständige Verhältniss des Quadrats einer Halbsehne (Ordinate) zum Product aus den Abschnitten des conjugirten Durchmessers, das schöne Theorem des Newton über die „organische" Beschreibung der Kegelschnitte, durch zwei der Grösse nach beständige Winkel, deren jeder um seinen festen Scheitel als Pol gedreht wird und deren eines Schenkelpaar zum Ort des Durchschnittspunktes hat eine Gerade, nach Newton selbst, oder einen Kegelschnitt, nach der erweiterten Auffassung der neuen Geometrie, während das andere Schenkelpaar zum Ort des Durchschnittspunktes immer einen Kegelschnitt hat, der durch die beiden festen Scheitel oder Pole geht. Ebendahin gehört endlich auch das Haupttheorem über das projectivische Verhalten der Punkte eines Kegelschnitts, aus dem sich umgekehrt die meisten Eigenschaften der Kegelschnitte ableiten lassen, mitinbegriffen die obige vom eingeschriebenen Viereck.

So viel zur Einleitung über Begriffsbestimmung, Zusammenhang und Geschichte unsers Problems im Allgemeinen, da mit der Rückkehr zum Anfang und Ausgangspunkt der Kreislauf dieser Begriffsentwicklung geschlossen ist.

§. 3.

Beschränkung des allgemeinen Problems durch das Theorem Newton's vom eingeschriebenen Viereck des Kegelschnitts.

Um die hier gesteckten Grenzen nicht zu überschreiten, heben wir aus dem weiten Umfang der Bestimmungen des §. 1. über das allgemeine Problem des Pappus ad tres aut plures lineas zu einlässlicher Behandlung bloss heraus die auf ein Viereck beschränkte Ortsbestimmung des Mittelpunktes P der Strahlen, wobei wir um des geschichtlichen Gewichtes willen auffrischen wollen die geometrischen Methoden Newton's und seiner Zeit an folgendem an sich wichtigen Theorem:

Wenn von einem beliebigen Punkte P eines gegebenen Kegelschnitts nach den Seiten eines eingeschriebenen Vierecks $ABDC$ Gerade gezogen werden,

deren jede mit der zugehörigen Seite einen bestimmten unveränderlichen Winkel bildet, nämlich *PQ* nach *AB*, *PR* nach *CD*, *PS* nach *AC*, *PT* nach *BD*: so ist das Rechteck oder Product *PQ.PR* der Geraden nach dem einen Paar Gegenseiten zum Product oder Rechteck *PS.PT* der Geraden nach dem andern Paar Gegenseiten in einem gegebenen Verhältnisse.

Im Sinn und Geist der vom Einzelnen zum Allgemeinen fortschreitenden alterthümlichen Synthesis unterscheidet Newton beim Beweise dieses Satzes drei Fälle, sowohl nach der Art des Vierecks, als nach der Richtung der Strahlen.

Erster Fall. Das Viereck sei nach Taf. I. Fig. 1. ein Trapez mit den parallelen Seiten *AC* und *BD*, und es sei sowohl *PQ* als *PR* parallel mit diesen, und sowohl *PS* als *PT* parallel zu einer der nicht parallelen Seiten *AB*. Nun ist nach allbekannten Eigenschaften der Kegelschnitte die Gerade *XX* durch die Mitten der parallelen Seiten als Sehnen des Kegelschnitts ein Durchmesser der Curve und hälftet auch den Abstand *RQ* zwischen den Theilpunkten *R* und *Q* der nicht parallelen Seiten, da nach der Voraussetzung *PR* und *PQ* in einer zu den parallelen Seiten *AC* und *BD* parallelen Richtung liegen. Die Mitte der Strecke *RQ* sei *O*, so ist *PO* eine zu jenem Durchmesser *XX* conjugirte Halbsehne oder sogenannte Ordinate (ordinatim applicata ad diametrum). Verlängere *PO* nach *K*, so dass *OK* gleich *OP*, so ist *OK* Ordinate auf der andern Seite des Durchmessers und *K* der sechste Punkt unserer Curve zu den fünf vorausgesetzten *A*, *B*, *C*, *D*, *P*. Da nun also die Punkte *A*, *B*, *K* auf dem Kegelschnitt liegen und *PK* die *AB* unter einem gegebenen Winkel schneidet, so ist (Satz 17. und 18. Buch III. der Kegelschnitte des Apollonius) das Rechteck *PQ.QK* zum Rechteck *AQ.QB* in einem gegebenen Verhältnisse. Aber *QK* gleich *PR* als Differenzen der gleichen Grössenpaare *OK* und *OP*, *OQ* und *OR*, und daher auch Rechteck *PQ.QK* gleich Rechteck *PQ.PR*, und folglich auch Rechteck *PQ.PR* zum Rechteck *AQ.QB* oder zum Rechteck *PS.PT* in einem gegebenen Verhältnisse, wie zu beweisen war.

Doch ich besinne mich, dass viele Leser den Apollonius weder in Urschrift, noch in der Uebersetzung Balsams zur Hand haben, um den Beweis des so eben angeführten Satzes selbst nachzuschlagen, wenn er ihnen nicht schon vorher geläufig ist, sei es aus synthetischen Hülfsmitteln oder aus analytischen der Coordinaten-Geometrie, eine Voraussetzung, die nicht allzu zu-

versichtlich aufgestellt werden darf, da jener Satz, der nächste Verwandte vom Potenzsatz im Kreise, selbst in ausführlichen Handbüchern der Coordinaten-Geometrie fehlt.

Daher sei für alle Fälle so kurz als möglich ein anderer Beweis jenes Satzes hier versucht.

Lehrsatz. Wenn durch irgend einen Punkt Q innerhalb oder ausserhalb eines Kegelschnitts zwei der Lage nach gegebene Gerade so gezogen werden, dass sie die Curve treffen, so steht das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne zum Rechteck aus den Abschnitten der andern Sehne in einem beständigen Verhältniss, oder nach Taf. I. Fig. 1. ist $AQ.QB:PQ.QK$ ein gegebenes Verhältniss.

Beweis. Erster Fall. Man verbinde in Taf. I. Fig. 1., die der Leser aus sich selbst ergänzen wolle, den Theilpunkt Q der AB mit dem Centrum M des Kegelschnitts durch den Durchmesser $FMQG$, dessen Enden seien F und G, ziehe aus dem Curvenpunkte A die zu diesem Durchmesser conjugirte Halbsehne oder Ordinate $AE=y$. Setzen wir ferner für die Durchmesserabschnitte aus dem Fusspunkt E der Ordinate $FE=m$, $GE=n$, so haben wir nach einer wohlbekannten Eigenschaft der Kegelschnitte $y^2:mn=p$ oder das Verhältniss des Quadrates der Ordinate zum Rechteck der Durchmesserabschnitte ist ein gegebenes (Apoll., Kegelschn., I. Bd., 21. Satz). Nun ist der Winkel AQP zwischen AB und PQ ein gegebener, und sicher auch der Winkel (r, x) zwischen $AQ=r$ und dem Durchmesser $FMQG$ als der Axe der x, ebenso der Winkel (x, y) zwischen derselben Axe der x und der Ordinate $AE=y$. Es sind also gegeben die Verhältnisse:

$$y^2:mn=p \quad \text{und} \quad r^2:y^2=\text{Sin}^2(x, y):\text{Sin}^2(r, x)=s,$$

und daraus auch zusammengesetzt:

$$r^2:mn=ps \quad \text{oder} \quad r^2=mnps \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

Auf dieselbe Art bekommen wir aus $QB=\varrho$ und BL als Ordinate aus dem Curvenpunkte B auf denselben Durchmesser $FMQG$ als Axe der x das gegebene Verhältniss $y^2:\mu\nu=p$, dessen Werth p derselbe geblieben ist wie vorhin, wenn $FL=\mu$ und $GL=\nu$ vorstellen die Durchmesserabschnitte aus dem Fusspunkte L der Ordinate BL, wozu kömmt

$$\varrho^2:y^2=\text{Sin}^2(x, y):\text{Sin}^2(\varrho, x)=s$$

als ebenfalls mit den fraglichen Winkeln gegebenes Verhältniss und gleich an Werth dem vorigen Sinusverhältniss. Aus diesen beiden Verhältnissen aber bekommen wir durch Zusammensetzung:

$$\varrho^2 : \mu\nu = ps \text{ oder } \varrho^2 = \mu\nu ps \qquad (2)$$

Nun geben die Gleichungen (1) und (2) $r\varrho = ps\sqrt{mn\mu\nu}$ oder das Product $AQ.BQ$ als ein gegebenes.

Dieselbe Taf. I. Fig. 1. mit den nöthigen Ergänzungen gibt für $PQ = u$, $KQ = v$ mit Bezug auf den nämlichen Durchmesser $FMQG$ und mit Hülfe der conjugirten Halbsehnen oder Ordinaten aus P und K auf denselben das Product uv oder $PQ.KQ$ als ein gegebenes, wenn auch wegen der Verschiedenheit der Winkel einen andern Werth desselben. Daher ist auch das Verhältniss $r\varrho : uv$ oder $AQ.BQ : PQ.KQ$ dieser Producte ein gegebenes, w. z. b. w.

Zweiter Fall. Setzen wir nun das Viereck $ABDC$ habe gar keine parallelen Seiten oder sei ein Trapezoid. Es sei aber in Taf. I. Fig. 2. PS sowohl als PT parallel zu AB, und daher diese beiden Strahlen in einer Richtung, ebenso PQ und PR parallel zu AC, und daher in einer Richtung. Nun ziehe man noch die Hülfslinie Bd parallel zu AC und verlängere sie bis zum Durchschnitt mit der Richtung ST in t; diese Hülfslinie Bd treffe zugleich den Kegelschnitt in d. Ziehe Cd, die PQ in r schneide, zu PQ und AC parallel die DMN, die Cd in M und AB in N schneide. Nun sind die Dreiecke BTt und BDN ähnlich, und daraus folgt die Proportion:

$$Bt : Tt = DN : BN \quad \text{oder} \quad PQ : Tt = DN : BN;$$

ebenso diese:

$$Rr : DM = AQ : AN \quad \text{oder} \quad Rr : PS = DM : AN;$$

durch Zusammensetzung:

$$PQ.Rr : Tt.PS = DN.DM : AN.BN,$$

und nach dem ersten Falle:

$$PQ.Pr : PS.Pt = DM.DN : AN.BN,$$

und daher:

$$PQ.(Pr - Rr) : PS(Pt - Tt) = DM.DN : AN.BN$$

oder

$$PQ.PR : PS.PT = DM.DN : AN.BN,$$

oder das Verhältniss jener Rechtecke ein gegebenes. Denn Bd ist der Richtung nach gegeben mit der Richtung AC und PQ,



und mit dem Kegelschnitt auch der Durchschnittspunkt d, daher auch Cd mit C und d. Durch die AC und PQ ist auch gegeben die Richtung DMN aus dem gegebenen Punkte D, daher auch ihre Durchschnittspunkte M und N mit den gegebenen Cd und AB. Damit ist endlich das Verhältniss der Rechtecke $DM.DN:AN.BN$ ein gegebenes und nach der letzten Proportion auch das Verhältniss der Rechtecke $PQ.PR:PS.PT$ ein gegebenes, wie zu beweisen war.

Dritter Fall. Setzen wir endlich ein Trapezoid wie im vorigen Fall, nach Taf. I. Fig. 3. aber keinen Strahl PQ, PR, PS, PT parallel zu irgend einer Seite AC oder AB, sondern zu denselben unter beliebigen Winkeln geneigt. Anstatt derselben ziehe Pq, Pr parallel zu AC, und Ps, Pt parallel zu AB. Und wegen der gegebenen Winkel der Dreiecke PQq, PRr, PSs, PTt sind auch gegeben die Seitenverhältnisse $PQ:Pq$, $PR:Pr$, $PS:Ps$, $PT:Pt$ und damit auch die zusammengesetzten Verhältnisse $PQ.PR:Pq.Pr$ und $PS.PT:Ps.Pt$. Aber nach dem oben Bewiesenen ist das Verhältniss $Pq.Pr:Ps.Pt$ gegeben, also auch das Verhältniss $PQ.PR:PS.PT$, wie zu beweisen war.

§. 4.

Umgekehrter Lehrsatz Newton's. (Taf. I. Fig. 4.)

Es sei wie im Vorigen gegeben ein beliebiges Viereck, und das Rechteck $PQ.PR$ der Strahlen aus einem Punkte P nach zwei Gegenseiten stehe zum Rechteck $PS.PT$ der Strahlen aus demselben Punkte nach den zwei andern Seiten in einem gegebenen Verhältnisse: so ist der Ausgangspunkt P der Strahlen auf einem Kegelschnitte, der dem gegebenen Viereck umschrieben ist.

Beweis. Durch die vier Ecken A, B, C, D des gegebenen Vierecks und irgend einen fünften Punkt p aus den unendlich vielen, unter obiger Bedingung möglichen Punkten P sei ein Kegelschnitt beschrieben: so behaupte ich, der Punkt P liegt immer auf dieser Curve. Denn angenommen das Gegentheil, so verbinde diesen Punkt P mit einer Ecke, z. B. A, des Vierecks, so wird die AP den Kegelschnitt in einem andern Punkte als in P treffen, etwa in b, wenn es möglich ist. Daher ziehe man aus diesen Punkten p und b nach den Seiten des Vierecks Strahlen pq, pr, ps, pt; bk, $b\varrho$, bs, bd unter gegebenen Winkeln, so wird nach dem vorigen Lehrsatze bestehen die Proportion:

$bk.b\varrho : bs.bd = pq.pr : ps.pt = PQ.PR : PS.PT$ (nach der Voraussetzung). Aber wegen der Aehnlichkeit der Vierecke $bkAs$, $PQAS$ besteht auch diese Proportion: $bk : bs = PQ : PS$; diese gibt mit der vorigen: $b\varrho : bd = PR : PT$, und daher die gleichwinkligen Vierecke $D\varrho bd$, $DRPT$ ähnlich, so dass ihre Diagonalen Db, DP zusammenfallen müssen. Also fällt b in den Durchschnitt der Geraden AP und DP oder fällt mit dem Punkte P zusammen. Daher muss der Punkt P, wo er auch angenommen wird, unter obiger Bedingung, fallen auf den oben bestimmten Kegelschnitt, wie zu beweisen war.

Zusatz. Wenn daher aus einem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte P drei Strahlen PQ, PR, PS nach drei der Lage nach gegebenen Geraden AB, CD, AC oder nach den Seitenrichtungen eines Dreiecks gezogen werden, so dass zu jeder festen Geraden ein Strahl gehört, mit ihr einen gegebenen Winkel bildet und zugleich das Rechteck $PQ.PR$ aus zwei Strahlen zum Quadrat PS^2 des dritten Strahls in einem gegebenen Verhältnisse steht: so liegt der gemeinschaftliche Ausgangspunkt P der drei Strahlen auf einem Kegelschnitt, welcher die Geraden AB, CD in A und C berührt, und umgekehrt: Wenn gegeben ist ein Kegelschnitt mit zwei Tangenten AB, CD, ihren Berührungspunkten A und C, und folglich der Berührungssehne AC, und es werden aus einem beliebigen Curvenpunkte P Strahlen unter gegebenen Winkeln nach jenen drei Geraden gezogen: so steht das Rechteck $PQ.PR$ der nach den Tangenten AB, CD gezogenen Strahlen zum Quadrat PS^2 des nach der Berührungssehne AC gezogenen Strahls in einem gegebenen Verhältnisse.

Denn in Taf. I. Fig. 4. falle die Gerade BD zusammen mit der Geraden AC, ohne Aenderung in der Lage der drei Geraden AB, CD, AC; ferner falle der Strahl PT zusammen mit dem Strahl PS, so wird aus dem Rechteck $PS.PT$ das Quadrat PS^2 oder PT^2, und die Geraden AB, CD, welche die Curve in je zwei Punkten A, B; C, D schnitten, können sie nun in jenen zusammenfallenden Punkten nicht mehr schneiden, sondern nur noch berühren.

Erklärung. Der Name Kegelschnitt wird hier im weitesten Sinne gefasst, so dass er auch in sich schliesst sowohl den geradlinigen Schnitt durch den Kegelscheitel, als den kreisförmigen Schnitt, der parallel ist zur Kegelbasis im aufrechten und schie-

fen Kegel, als den kreisförmigen Schnitt, der antiparallel ist zur Kegelbasis im schiefen Kegel.

Anmerkung. Die letzte Unterscheidung, obgleich hier übergangen von Newton und von uns beigefügt, kann jenem unmöglich fremd gewesen sein, da er ja überall zu diesen Beweisen den Apollonius anruft, der dieses Alles scharf unterscheidet. Denn, um zur Sache zurückzukehren, wenn der Punkt p auf irgend eine Gerade der Punkte A, B, C, D fällt, so verwandelt sich der Kegelschnitt sofort in ein Paar Gerader, deren eine den Punkt p enthält, deren andere eine Gerade irgend zweier andern Punkte ist, und das Verhältniss der Rechtecke bekömmt 0 zum Werthe. Wenn zwei gegenüberliegende Winkel des Vierecks einander zu zwei Rechten ergänzen und die vier Strahlen PQ, PR, PS, PT rechtwinklig oder schief, aber unter gleichen Winkeln nach den Seiten gezogen werden, und das Rechteck $PQ.PR$ des einen Strahlenpaares gleich ist dem Rechteck $PS.PT$ des andern Strahlenpaares, so ist der Kegelschnitt ein Kreis. Dasselbe findet Statt, wenn die vier Strahlen zwar unter ungleichen Winkeln nach den Seiten gezogen werden, aber mit der Bedingung, dass das Rechteck $PQ.PR$ des einen Strahlenpaares zum Rechteck $PS.PT$ sich verhalte wie das Rechteck aus den Sinus der Winkel (PS, AC) und (PT, BD) zum Rechteck aus den Sinus der Winkel (PQ, AB) und (PR, CD), so dass die Strahlen und ihre Winkel zu den Seiten in umgekehrter Ordnung erscheinen. In allen andern Fällen ist der Ort des Punktes P als des gemeinschaftlichen Ausgangspunktes der Strahlen, eine der drei eigentlichen Kegelschnittfiguren. Statt des gemeinen Vierecks $ABCD$ kann aber gesetzt werden das vollständige Vierseit, das alle Geraden der vier Punkte A, B, C, D zu Seiten hat. Es kann aber auch von den vier Punkten A, B, C, D eines solchen Vierseits einer oder ein Paar in's Unendliche hinausrücken, wodurch die Geraden parallel werden, die sonst in jenen Punkten convergirten. In diesem Falle geht der Kegelschnitt durch die übrigen Punkte und verwandelt sich in ein Paar Paralleler.

§. 5.

Construction zum Problem des Pappus.

Aufgabe. Zu finden einen Punkt P, aus dem vier Strahlen PQ, PR, PS, PT nach vier gegebenen Geraden AB, CD, AC, BD der Reihe nach unter gegebenen

Winkeln gezogen, geben ein bestimmtes Verhältniss der Rechtecke $PQ.PR$ und $PS.PT$.

Die Geraden AB, CD, nach welchen die das eine Rechteck bildenden Strahlen PQ, PR gezogen werden, schneiden die andern zwei Geraden in den Punkten A, B, C, D. Aus einem dieser Punkte, z. B. A, ziehe in beliebiger Richtung eine Gerade AH, auf welcher der gesuchte Punkt P liegen soll. Diese schneide die Gegenseiten BD, CD, die erste in H, die zweite in J. Weil nun alle Winkel der Figur gegeben sind, so sind damit auch gegeben die Verhältnisse $PQ:PA$, $PA:PS$, und daher das Verhältniss PQ zu PS. Das vorausgesetzte Verhältniss der Rechtecke ist $PQ.PR:PS.PT$; dieses dividirt durch das vorige gibt $PR:PT$, dieses zusammengesetzt mit $PJ:PR$ gibt $PJ:PT$, und dieses zusammengesetzt mit $PT:PH$ gibt endlich $PJ:PH$ und damit auch den Punkt P, der zu finden war.

Zusatz 1. Daher kann auch zu jedem beliebigen Punkte D unter den unendlich vielen Punkten P, die unter obiger Ortsbedingung möglich sind, eine Tangente gezogen werden. Denn in Taf. I. Fig. 5. geht die Sehne PD in eine Tangente zum Punkte D über, sobald die Punkte P und D zusammenfallen, d. h. wenn die AH durch den Punkt D geht, also in AD übergeht. In diesem Falle wird das letzte Verhältniss der bis zum Verschwinden abnehmenden Abschnitte PJ und PH mit Hülfe des vorigen Beweises gefunden wie folgt: Man ziehe Dq parallel zu PQ, Ds parallel zu PT, als dem Curvenpunkte D entsprechende Strahlen zu AB und AC, deren jeder mit der zugehörigen Geraden immer seinen gegebenen Winkel bilden soll.

Nun geht unsere obige Bedingung, dass $PQ.PR:PS.PT$ ein gegebenes Verhältniss sei, durch die besondere Lage des Punktes P bei D unmittelbar über in $(Dq+x).Pr:(Ds+y).Pt$, welcher Ausdruck denselben gegebenen Werth hat, und wo P vorstellt einen Punkt, dessen Entfernung von D bis zum Verschwinden abnehmend gedacht wird, so dass x und y gleichfalls und gleichzeitig mit Pr und Pt bis zum Verschwinden abnehmen. Nun verschwinden die unendlich kleinen x und y vor den endlichen Grössen Dq und Ds, so dass wir haben: $Dq.Pr:Ds.Pt$, gleich demselben Werth, den wir für $PQ.PR:PS.PT$ vorausgesetzt haben; Dq und Ds sind aber durch die besondere Lage des Punktes P bei D unmittelbar gegeben und damit auch das letzte Verhältniss $Pr:Pt$ der bis zum Verschwinden abnehmenden Pr und Pt oder die „ultima ratio evanescentium" mittelbar bestimmt, so dass wir haben, $PQ.PR:PS.PT=g$ vorausgesetzt, $Pr:Pt=g.Ds:Dq$, wo das Verhältniss der unendlich klei-

nen Pr und Pt übersetzt ist in ein Verhältniss endlicher Grössen und erst dadurch zur Construction geeignet erscheint. Nun ziehe man nach Newton CF, parallel zu AD, theile sie in jenem letzten Verhältniss der JP und PH in E und ziehe DE als gesuchte Tangente, weil CF, deren Endpunkt F auf der Richtung BD, und das verschwindend kleine JH, unendlich nahe an D, zu einander und zu AD parallel sind und daher auch in E und P in demselben Verhältniss getheilt, das als letztes Verhältniss der bis zum Verschwinden abnehmenden JP und PH aus dem letzten Verhältniss $Pr:Pt$ abgeleitet wird wie im vorigen Beweis $JP:PH$ aus der Bedingung $PQ.PR:PS.PT=g$ und den übrigen geometrischen Bedingungen.

Noch unmittelbarer lässt sich aber nach Taf. I. Fig. 5. a. die Tangentenrichtung DE aus dem einmal gefundenen letzten Verhältniss $Pr:Pt$ bestimmen wie folgt: Man ziehe $M\varrho$ parallel zu PR aus einem beliebigen Punkte ϱ der CD in beliebiger Länge, durch ihren Endpunkt M eine Gerade G parallel zu CD, aus einem beliebigen Punkte τ der BDF die $N\tau$ parallel zu BDF, so dass $M\varrho:N\tau=Pr:Pt=g.Ds:Dq$, d. h. die Länge der $N\tau$ nach Maassgabe des letzten Verhältnisses $Pr:Pt$; durch den Endpunkt N eine Gerade K parallel zu BDF: der Treffpunkt L der Geraden G und K, verbunden mit D, gibt die gesuchte Tangente des Kegelschnittes im Punkte D. Der Leser möge in Taf. I. Fig. 5. die nöthigen Ergänzungen selbst machen.

Zusatz 2. Daraus kann auch nach Taf. I. Fig. 6. die Ortscurve des Punktes P bestimmt werden. Durch irgend einen der vier gegebenen Punkte A, B, C, D, z. B. durch A, ziehe eine Tangente AE der Ortscurve und durch irgend einen andern Punkt B eine Parallele BF zu derselben, deren Treffpunkt mit der Curve F sei; dieser wird aber gefunden nach der Analysis der vorigen Aufgabe. Dann hälfte BF in G, aus dem Berührungspunkt A der Tangente AE ziehe AG nach der Mitte G der parallelen Sehne BF unbestimmt lang, so ist AG eine Durchmesserrichtung, zu welcher die Sehne BGF conjugirt ist. Die AG treffe die Curve in H, dann ist AH eine Durchmesserlänge, welche mit dem Parameter p gibt die Proportion $p:AH=BG^2:AG.GH$. Wenn kein Durchschnitt Statt findet zwischen AG und der Curve, oder wenn AH unendlich gross wird, so ist die Ortscurve eine Parabel und der zu AG gehörige Parameter (latus rectum oder erectum) ist $\frac{BG^2}{AG}$. Wenn aber die Punkte A und H auf derselben Seite von G liegen in endlicher Entfernung, so ist die Ortscurve eine Hyperbel; eine Ellipse hingegen, wenn A und H zu

beiden Seiten von G liegen in endlicher Entfernung; es sei denn, dass der Winkel AGB ein rechter sei und ausserdem das Quadrat BG^2 gleich dem Rechteck $AG.GH$, in welchem Falle ein Kreis sich ergibt. Damit ist also auseinandergesetzt die Aufgabe der Alten de quatuor lineis, die von Euklid aufgestellt und in der Lösung begonnen, von Apollonius fortgeführt worden ist. Und zwar gibt dieser Zusatz die Auflösung nicht durch Rechnung, sondern durch geometrische Construction, wie sie die Alten anstrebten.

§. 6.

Das Problem des Pappus im Kreise und zugleich beschränkt auf drei Gerade, wo der Werth des Verhältnisses 1 ist.

Schon oben in §. 4. im Zusatz zum umgekehrten Lehrsatz des Newton ist das Problem des Pappus auf drei Gerade beschränkt worden. Eine noch engere Begränzung desselben liegt darin, wenn jenes die Ortsbedingung des Punktes P enthaltende Verhältniss des Rechtecks zweier Strahlen zum Quadrat des dritten Strahls den Werth 1 annimmt, d. h. wenn das Rechteck zweier Strahlen gleich ist dem Quadrat des dritten Strahles und zugleich die Strahlen auf den festen Geraden senkrecht stehen. Auch in dieser Beschränkung der Aufgabe geht im Allgemeinen ein Kegelschnitt als Ortscurve aus derselben hervor; wenn aber noch bestimmter die drei festen Geraden ein gleichschenkliges Dreieck bilden, so spricht sich das Ergebniss unserer Ortsbestimmung aus in dem Lehrsatze:

Der geometrische Ort des Punktes P, dessen Entfernung von der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks das geometrische Mittel ist zwischen den Entfernungen desselben Punktes von den gleichen Schenkeln, gibt als Ortscurve einen Kreis, welcher die beiden gleichen Schenkel in den Basisecken berührt.

Beweis. Es sei also zu diesem Ende in Taf. 1. Fig. 7. als gegeben angenommen der Punkt C mit der Bestimmung, dass seine Entfernung CD von der Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreiecks das geometrische Mittel sei zwischen seinen Entfernungen CP und CQ von den Schenkeln AG und BG des Dreiecks, dass also bestehe die Voraussetzung $\overline{CD}^2 = CP.CQ$, und es sei zu suchen der Ort des so bestimmten Punktes C.

Nun ist Winkel $\alpha = DCQ = DCP = ABG = BAG$ wegen der Perpendikularität der Schenkel; aus der Voraussetzung aber

folgt die Proportion $CP:CD = CD:CQ$; also in den Dreiecken CDP und CDQ ein Winkel gleich und die einschliessenden Seiten in gleichem Verhältniss, womit hergestellt ist ihre Aehnlichkeit. Zugleich sind $ADCP$ und $BDCQ$ Kreissehnenvierecke, und zwar speciell solche, wo eine Diagonale zugleich Durchmesser des umschriebenen Kreises, weil wegen der Perpendikel CD, CP, CQ ein Paar Gegenwinkel Rechte sind, woraus die in der Figur mit denselben Buchstaben bezeichneten Winkel gleich sind, und daher die Dreiecke ADP und BDQ ebenfalls ähnlich; aber auch Winkel $ACB = \gamma + \beta = \alpha = ABG = BAG$ oder gleich dem Winkel an der Grundlinie: was den Ort des Punktes C constituirt als den Kreis auf der Sehne AB, welche abschneidet das Segment, das den Peripheriewinkel $\alpha = ABG = BAG$ in sich fasst; zugleich berührt der Kreis die Schenkel AG und BG, wie zu beweisen war.

Umkehrung des vorigen Satzes.

Ist gegeben ein Kreis mit zwei Tangenten und ihren Berührungspunkten, also auch der Berührungssehne AB: so ist die Entfernung jedes Peripheriepunktes von der Berührungssehne das geometrische Mittel zwischen seinen Entfernungen von den Tangenten.

Der Satz vom Höhenquadrat des rechtwinkligen Dreiecks oder vom Quadrat der Ordinate auf den Durchmesser bildet am besten den Eingang zu einem besondern Falle unsers Satzes und damit auch den Uebergang zu unserm allgemeinen Satze selbst. Werden nämlich an die Enden des Durchmessers, auf welchen die Ordinate gefällt ist, Tangenten gelegt, zugleich die Durchmesserrichtung parallel mit sich selbst verschoben bis an die Peripherie, so lautet der Satz vom Quadrat der Ordinate, weil durch jene Verschiebung die Durchmesserabschnitte die Maasse abgeben für die Entfernungen des Peripheriepunktes von jenen (parallelen) Tangenten, folgendermaassen:

Die Entfernung jedes Peripheriepunktes von einem Durchmesser ist das geometrische Mittel zwischen den Entfernungen desselben Punktes von den Tangenten in den Enden des Durchmessers.

Nun liegt die Voraussetzung nahe, dass der Satz allgemeiner gelte in obiger Fassung. Dazu ist der Beweis folgender: Wird noch in Taf. I. Fig. 8. der Fusspunkt D der Ordinate CD verbunden mit den Fusspunkten P und Q der Perpendikel auf die Tan-

genten, so haben wir vermöge der Perpendikel zwei Kreissehnenvierecke $CDAP$ und $CDBQ$ mit ihren Diagonalen AC und DP, BC und DQ, die mit den Seiten die Paare gleicher Winkel machen, die mit denselben Buchstaben α und β bezeichnet sind, bei A und P, bei A und D; dass aber auch die Winkel α und β bei A und B einzeln, denselben Buchstaben entsprechend, einander gleich sind, folgt aus der Eigenschaft der Tangentensehnenwinkel, so dass aus der Gleichheit der Winkel folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke CDP und CDQ mit der gemeinschaftlichen Seite CD, worauf eben Alles ankam zur Erzeugung der stetigen Proportion $\overset{\beta}{P}\overset{\alpha}{C}:\overset{\alpha}{CD} = \overset{\beta}{C}D:\overset{\alpha}{CQ}$, wo zur besseren Uebersicht der jeder Seite gegenüberstehende Winkelbuchstabe oben darauf gesetzt wurde, und diese Proportion ist die Behauptung, die zu beweisen war.

§. 7.

Anwendung des vorigen Satzes auf das Kreissehnenviereck.

Schon oben in §. 4. ist nach Newton hervorgehoben worden der Fall, wenn als die durch das Problem des Pappus bestimmte Ortscurve der Kreis hervorgeht aus dem Viereck. Darauf kommen wir hier wieder zurück, nicht nur des näheren Nachweises wegen, sondern weil der Beweis jenes besonderen Falles nur eine wiederholte Anwendung unsers so eben bewiesenen Satzes ist. Ist nämlich in Taf. II. Fig. 9. gegeben das Kreissehnenviereck $ABKL$ mit den Tangenten an den Ecken, der fünfte freie Punkt C auf der Peripherie des umschriebenen Kreises, aus C auf die Seiten der Figur gefällt die Perpendikel $CD=f$, $CG=g$, $CE=h$, $CF=k$ und auf die Tangenten in den Ecken derselben Figur die Perpendikel $CP=m$, $CQ=r$, $CU=n$, $CV=s$, so gibt die widerholte Anwendung des obigen Satzes folgende Reihe von Gleichungen:

$$f^2=mr,\quad g^2=ms,\quad h^2=nr,\quad k^2=ns;$$

durch Multiplication:

$$mnrs=f^2k^2,\quad g^2h^2=mnrs \text{ oder } fk=gh,$$

und in Worten:

Das Product der Entfernungen eines Punktes auf der Peripherie des Kreises von einem Paar zugeordneter Seiten eines eingeschriebenen Vierecks ist gleich dem Product der Entfernungen desselben Punktes von

dem einen oder andern der übrigen Paare zugeordneter Seiten.

Zusammenhang dieses Satzes mit dem Satz des Ptolemäus vom Product der Diagonalen eines Kreissehnenvierecks.

Ein allgemeiner von jedem beliebigen Viereck $ABCD$ geltender Satz sagt in Bezug auf einen Punkt E seiner Ebene aus die Gültigkeit folgender Flächengleichung zwischen den Dreiecken, deren gemeinschaftlicher Scheitel E und deren Gegenseiten sind die sechs Strecken zwischen den vier Ecken A, B, C, D:

$$\triangle EAC . \triangle EBD = \triangle EAB . \triangle ECD + \triangle EBC . \triangle EAD$$

oder (die Figur weggelassen):

$$x . AC . y . BD = m . AB . n . CD + p . BC . q . AD,$$

wo x, y, m, n, p, q der Reihe nach die Perpendikel aus E auf AC, BD, AB, CD, BC, AD vorstellen, die aber, um Ueberladung zu vermeiden, in der Figur weggelassen sind. Nun gilt dieser Satz sicher auch vom Kreissehnenviereck für einen beliebigen Punkt E auf der Peripherie des umschriebenen Kreises und, damit nach dem Lehrsatz des Ptolemäus bestehe die Gleichung $AC.BD = AB.CD + BC.AD$, muss nothwendig $xy = mn = pq$ sein. Die Gleichheit der Perpendikel-Producte gilt also für alle drei Paare zugeordneter Seiten, d. h. auch für die sogenannten Diagonalen, wie auch aus Taf. II. Fig. 9. leicht gezeigt werden könnte, was nicht geschehen, um ihre Ueberladung zu vermeiden. Noch ein Beweis zu unserm Satz ergibt sich aus den projectivisch gleichen Strahlbüscheln im Kreis, nämlich in Taf. II. Fig. 10., wo p, q, u, v der Reihe nach die Perpendikel aus m auf $PA, PB, P'A, P'B$ vorstellen, und gültig ist die Proportion:

$$\frac{\text{Sin}\, mPA}{\text{Sin}\, mPB} = \frac{\text{Sin}\, mP'A}{\text{Sin}\, mP'B} \text{ oder } \frac{mP . \text{Sin}\, mPA}{mP . \text{Sin}\, mPB} = \frac{mP' . \text{Sin}\, mP'A}{mP' . \text{Sin}\, mP'B}$$

$$\text{oder } \frac{p}{q} = \frac{u}{v} \text{ oder } pv = qu,$$

also wieder die in Rede stehenden Producte der Perpendikelpaare auf zugeordnete Seiten des Kreissehnenvierecks einander gleich.

Noch ein Fall der Kreiserzeugung aus dem Viereck durch das Problem des Pappus ist oben in §. 4. nach Newton hervorgehoben worden, nämlich der besondere Fall, wo die vier Strahlen

zwar unter ungleichen Winkeln nach den Seiten gezogen werden, aber mit der Bedingung, dass in Taf. I. Fig. 3. $PQ.PR:PS.PT = \mathrm{Sin}(PS, AC).\mathrm{Sin}(PT, BD):\mathrm{Sin}(PQ, AB).\mathrm{Sin}(PR, CD)$, also in umgekehrter Ordnung der Strahlen und Seiten. Diess ist aber nur eine andere Einkleidung des Satzes der gleichen Perpendikelproducte im Kreissehnenviereck, denn die vorliegende Bedingung gibt nach und nach, wenn p, q, v, u der Reihe nach die Perpendikel auf AB, AC, CD, BD vorstellen:

$$p.\mathrm{Cosec}(PQ, AB).v\,\mathrm{Cosec}(PR, CD)$$
$$:q\,\mathrm{Cosec}(PS, AC).u\,\mathrm{Cosec}(PT, BD)$$
$$=\mathrm{Sin}(PS, AC).\mathrm{Sin}(PT, BD):\mathrm{Sin}(PQ, AB).\mathrm{Sin}(PR, CD)$$

oder $pv=qu$ wie oben.

Zusammenhang desselben Satzes mit der Involution des Desargues.

Schon oben im §. 2. ist angedeutet der Zusammenhang unsers Satzes mit dem des Desargues über die Involution der sechs Punkte einer Transversale durch einen Kegelschnitt und die vier Seiten eines eingeschriebenen Vierecks. Sind nun in Taf. II. Fig. 11., zur näheren Begründung dieses Zusammenhanges oder vielmehr zur Ableitung des einen Satzes aus dem andern, a und a' die Durchschnittspunkte zwischen der Transversale und dem einen Paar zugeordneter Viereckseiten AB und ED, ferner b und b' für das andere Paar AD und BE, endlich c und c' die Durchschnittspunkte zwischen Curve und Transversale, so spricht sich das Involutionstheorem unter andern aus in folgender Gleichung:

$$ac.a'c:bc.b'c=ac'.a'c':bc'.b'c'.$$

Werden nun aus dem einen Curvenpunkte c gefällt die Perpendikel m auf AB, dann n auf DE, p auf AD, q auf BE; aus dem andern Curvenpunkt c' in derselben Ordnung die Perpendikel m', n', p', q' auf dieselben Seiten, so ist $m=ac.\mathrm{Sin}\,\alpha$, $n=a'c.\mathrm{Sin}\,\beta$, $p=bc.\mathrm{Sin}\,\gamma$, $q=b'c.\mathrm{Sin}\,\delta$, wo α, β, γ, δ die Winkel zwischen der Transversale und den einzelnen Viereckseiten; ebenso $m'=ac'.\mathrm{Sin}\,\alpha$, $n'=a'c'.\mathrm{Sin}\,\beta$, $p'=bc'.\mathrm{Sin}\,\gamma$, $q'=b'c'.\mathrm{Sin}\,\delta$. Nun gibt unsere obige Involutionsgleichung, verbunden mit der identischen:

$$\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta:\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Sin}\,\delta = \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta:\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Sin}\,\delta,$$

diese:

$$ac\,\mathrm{Sin}\,\alpha.a'c\,\mathrm{Sin}\,\beta:bc\,\mathrm{Sin}\,\gamma.b'c\,\mathrm{Sin}\,\delta$$
$$=ac'\,\mathrm{Sin}\,\alpha.a'c'\,\mathrm{Sin}\,\beta:bc'\,\mathrm{Sin}\,\gamma.b'c'\,\mathrm{Sin}\,\delta.$$

Wird nun die Transversale gedreht um den festgehaltenen Punkt c', so bleiben die Perpendikel m', n', p', q' unverändert, so dass vermöge unserer Proportion das beständige Verhältniss ihrer Producte, nämlich $m'.n':p'q'$ oder $ac'.\mathrm{Sin}\alpha.a'c'.\mathrm{Sin}\beta:bc'.\mathrm{Sin}\gamma.b'c'.\mathrm{Sin}\delta$, auch zur Folge hat die Beständigkeit des Productenverhältnisses $m.n:p.q$ oder $ac.\mathrm{Sin}\alpha.a'c.\mathrm{Sin}\beta:bc.\mathrm{Sin}\gamma.b'c.\mathrm{Sin}\delta$, womit bewiesen ist die allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte vom beständigen Verhältniss der in Rede stehenden Perpendikelproducte.

§. 8.

Das Reciproke des Satzes von den Entfernungen zwischen Curvenpunkt, zwei festen Tangenten und ihrer Berührungssehne beim Kegelschnitt.

Es seien in Taf. II. Fig. 12. gegeben zu einem Kegelschnitt zwei feste Tangenten AF, BF mit den Berührungspunkten A und B und dem Treffpunkt F, eine dritte freie Tangente sei PQ, die die beiden festen schneidet in P, Q: zu bestimmen die Beziehungen zwischen den Entfernungen AC und BD der festen Berührungspunkte A, B von einer freien Tangente PQ und der Entfernung FJ des festen Treffpunktes F von derselben. Nun ist nichts leichter, als diese Beziehungen zu finden, wenn wir zu Hülfe nehmen die projectivischen Eigenschaften der Kegelschnittstangenten. Es sind nämlich aus Taf. II. Fig. 12. selbstverständlich die zwei Proportionen:

$$FJ:AC=FP:AP,$$
$$FJ:BD=FQ:BQ;$$

und daraus die zusammengesetzte:

$$FJ^2:AC.BD=FP.FQ:AP.BQ$$

oder

$$FJ^2:AC.BD=\frac{FP}{AP}:\frac{BQ}{FQ},$$

ebenso für eine zweite freie Tangente $P_{,}Q_{,}$, in der Figur weggelassen,

$$FJ_{,}^2:AC_{,}.BD_{,}=\frac{FP_{,}}{AP_{,}}:\frac{BQ_{,}}{FQ_{,}}.$$

Nun ist nach den angeführten projectivischen Eigenschaften der Kegelschnittstangenten:

$$\frac{FP}{AP}:\frac{FP_{,}}{AP_{,}}=\frac{BQ}{FQ}:\frac{BQ_{,}}{FQ_{,}}$$

oder

$$\frac{FP}{AP}:\frac{BQ}{FQ}=\frac{FP_{,}}{AP_{,}}:\frac{BQ_{,}}{FQ_{,}},$$

also auch

$$FJ^2:AC.BD=FJ_{,}^2:AC_{,}.BD_{,}=\text{constante},$$

d. h. die angeführten Doppelverhältnisse für alle freien Tangenten PQ, $P_{,}Q_{,}$, $P_{,,}Q_{,,}$ u. s. f. von beständigem Werthe. Daraus der Satz, das Reciproke zu dem auf das Dreieck beschränkten Newtonschen Satz in §. 4.: das Quadrat des Abstandes zwischen dem Treffpunkt zweier festen Tangenten und einer beliebigen dritten Tangente steht zu dem Rechteck der Entfernungen zwischen den festen Berührungspunkten und derselben Tangente in einem beständigen Verhältnisse.

Oben in §. 6. hat die Ortsbestimmung des Pappus, auf Kreis und gleichschenkliges Dreieck beschränkt, den Werth des fraglichen beständigen Verhältnisses zur Folge gehabt. Nun könnte es scheinen, auch der reciproke Satz führe für den Kreis auf denselben Werth 1 des hier in Rede stehenden beständigen Verhältnisses. Dass es aber nicht so ist, das veranlasst uns, den zwar schon in voriger allgemeiner Eigenschaft der Kegelschnitte eingeschlossenen besondern Fall des Kreises hier noch besonders hervorzuheben, für den wir zudem einen neuen Beweis gefunden zu haben glauben, besonders zur Erhärtung der Thatsache, dass das fragliche Verhältniss nicht 1 ist, sondern einen anderen Werth hat, und endlich zur Bestimmung dieses Werthes selbst.

Es sei also in Taf. II. Fig. 13. gegeben ein Kreis aus dem Centrum M mit dem Halbmesser $MG=r$, den festen Tangenten AF, BF, den Berührungspunkten A, B, also der Berührungssehne AB, mit ihrem Pol F als dem Treffpunkt der Tangenten, dazu eine freie dritte Tangente PQ, die festen Tangenten in P, Q schneidend, ihr Berührungspunkt G; der Abstand des Poles F vom Centrum M hingegen $FM=c$; der Abstand des Berührungspunktes G der freien Tangente PQ von der festen Polare oder Berührungssehne AB sei $GE=p$; der Abstand des festen Berührungspunktes A von der PQ ferner $AC=u$; der Abstand des andern festen Berührungspunktes B von derselben PQ end-

lich $BD = v$; der Abstand des freien Berührungspunktes G von der festen Tangente AF sei $GH = AC = u$; der Abstand desselben G von der andern festen Tangente BF endlich $GK = BD = v$, denn auch $AP = GP$ und $GQ = BQ$ als Tangentenpaare am Kreis: so lässt sich aus diesen Voraussetzungen beweisen die Aehnlichkeit der Dreiecke FJM und EGM mit dem gleichen Winkel $JFM = EGM = \vartheta$ oder die Proportion $JF : FM = EG : GM$. Es ist nämlich FJL senkrecht auf PQ, ebenso der Berührungshalbmesser MG senkrecht auf PQ, daher FJL parallel zu GM, ebenso LM parallel zu PQ und gleich JG, MN parallel zu AB und gleich OE, und daher nach und nach:

$$m = JF = FL - JL = FL - GM = c \operatorname{Cos} \vartheta - r,$$

$$c = FM, \quad JF : FM = \operatorname{Cos} \vartheta - \frac{r}{c},$$

$$p = GE = GN - EN = GN - OM = r \operatorname{Cos} \vartheta - \frac{r^2}{c},$$

$$r = GM, \quad EG : GM = \operatorname{Cos} \vartheta - \frac{r}{c},$$

und damit bewiesen die Proportion $JF : FM = EG : GM$ oder $m : c = p : r$ oder die Productengleichung $cp = rm$. Nun ist aber in §. 6. bewiesen $GE^2 = GH . GK$ oder $p^2 = uv$, also $m^2 r^2 = c^2 p^2$, $m^2 r^2 = c^2 uv$, oder $m^2 : uv = c^2 : r^2$, d. h.:

im Kreis ist das Quadrat des Abstandes zwischen dem Treffpunkt zweier festen Tangenten und einer freien Tangente zum Rechteck der Abstände zwischen den festen Berührungspunkten und derselben freien Tangente in einem beständigen Verhältnisse, und zwar ist dieses Verhältniss wie das Quadrat des Abstandes zwischen dem festen Treffpunkt und dem Centrum zum Quadrat des Halbmessers, welches Flächenverhältniss oder quadratische Verhältniss sich auch übersetzen lässt in das lineare $FM : OM$ oder $c : \frac{c}{r^2}$.

Durch wiederholte Anwendung dieser Beziehungen ergibt sich das zu §. 4. reciproke Theorem:

Ist gegeben ein Kegelschnitt mit einem umschriebenen Viereck oder einem Tangentenviereck: so steht das Rechteck aus den Entfernungen zweier Gegenecken von einer freien fünften Tangente zum Rechteck der Entfernungen der zwei andern Gegenecken von derselben freien Tangente in einem beständigen Verhält-

nisse, das aber beim Kreis nie den Werth 1 annimmt, so dass in diesem Falle nie ein Product gleich einem andern ist.

§. 9.

Coordinatenanalysis zum Satz des Newton und seines Reciproken.

Zum Schluss sei noch die Coordinatenanalysis in Wettkampf gesetzt mit unsern synthetischen und neugeometrischen Methoden, zuerst am Lehrsatz des Newton §. 4. vom Kegelschnitt und dem eingeschriebenen Viereck. Die dort aufgestellte Ortsbedingung des die Curve beschreibenden Punktes P gibt sofort die Gleichung $\frac{PQ.PR}{PS.PT}=g$ oder $\frac{m.n}{p.q}=g$, wo die Perpendikel oder schiefen Strahlen $PQ=m$, $PR=n$, $PS=p$, $PT=q$, durch die laufenden Coordinaten x, y des Punktes P ausgedrückt, lineare Functionen dieser Coordinaten vorstellen, so dass wirklich die Bedingungsgleichung $\frac{m.n}{p.q}=g$, wo je zwei solcher linearer Functionen zum Product verbunden sind, eine quadratische wird in Bezug auf die Coordinaten x, y, und also im Allgemeinen einen Kegelschnitt vorstellt, der durch die vier Ecken des gegebenen Vierecks geht; denn wenn $n=0$ ist, so muss auch q oder $p=0$ sein, und wenn $m=0$ auch p oder $q=0$. Die Curve muss also durch die vier Ecken gehen, da nur solche Punkte je zwei der Strahlen oder Perpendikel zugleich zu 0 machen.

Hier ist überhaupt zu bemerken, dass immer $mn+gpq=0$ vorstellt die Gleichung der Curve zweiten Grades, die durch vier Durchschnittspunkte der Geraden geht, deren Gleichungen sind $m=0$, $n=0$, $p=0$, $q=0$. Mit Hülfe dieser einfachen Zeichen lässt sich auch leicht obiger Satz Newton's umkehren, wie folgt:

Die Curve zweiten Grades, die dem Viereck der Geraden

$$m=y+a_1x+b_1=0,\quad n=y+a_2x+b_2=0,\quad p=y+a_3x+b_3=0,$$
$$q=y+a_4x+b_4=0$$

umschrieben ist, hat die Gleichung:

$$mn+gpq=0.$$

Die Perpendikel aus dem beschreibenden Punkt (x, y) sind:

$$M=\frac{m}{\sqrt{1+a_1^2}},\quad N=\frac{n}{\sqrt{1+a_2^2}},\quad P=\frac{p}{\sqrt{1+a_3^2}},\quad Q=\frac{q}{\sqrt{1+a_4^2}}.$$

Die Punkte (x, y) der Curve müssen auch die durch die Curvengleichung $mn + gpq = 0$ ausgedrückte Bedingung erfüllen, und also geben:

$$mn = -gpq \text{ oder } MN.\sqrt{1+a_1^2}.\sqrt{1+a_2^2} = -g.PQ.\sqrt{1+a_3^2}.\sqrt{1+a_4^2}$$

oder

$$MN : PQ = g\sqrt{1+a_3^2}.\sqrt{1+a_4^2} : \sqrt{1+a_1^2}.\sqrt{1+a_2^2},$$

die Producte der Perpendikel zugeordneter Seiten in beständigem Verhältniss, was sich auf beliebig schiefe Strahlen ausdehnen lässt.

Auch der zum Newtonschen reciproke Satz vom Kegelschnitt und dem umschriebenen Viereck lässt sich durch eine ebenso einfache Coordinatenanalysis erledigen wie folgt:

Wenn das Product der Abstände m, n einer freien Geraden von zwei festen Punkten A, B zu dem Product der Abstände p, q derselben Geraden von zwei andern festen Punkten C, D in einem beständigen Verhältnisse steht, so dass $\frac{m.n}{p.q} = g$, so umhüllt die freie Gerade als Tangente eine Curve des zweiten Grades, welche die vier Geraden berührt aus der Verbindung des A oder B mit C oder D. Denn was zunächst den Grad der Umhüllungscurve betrifft, so wird sie gefunden wie folgt: Wir setzen α, β als Coordinaten des festen Punktes A, ferner γ, δ als Coordinaten des festen Punktes B, dann ε, ζ als Coordinaten des festen Punktes C, endlich η, ϑ als Coordinaten des festen Punktes D und $y + ax + b = 0$ als Gleichung der freien Geraden mit den veränderlichen Parametern a und b. Dann sind die Perpendikel aus den festen Punkten auf dieselbe der Reihe nach:

$$m = \frac{\alpha + a\beta + b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad n = \frac{\gamma + a\delta + b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad p = \frac{\varepsilon + a\zeta + b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad q = \frac{\eta + a\vartheta + b}{\sqrt{1+a^2}},$$

und die Bedingung ist:

$$\frac{mn}{pq} = g \quad \text{oder} \quad \frac{(\alpha + a\beta + b)(\gamma + a\delta + b)}{(\varepsilon + a\zeta + b)(\eta + a\vartheta + b)} = g.$$

Die veränderlichen Parameter a, b der Geraden $y + ax + b = 0$ oder der Tangenten zur gesuchten umhüllenden Curve heissen nach Plücker und Chasles Tangentialcoordinaten, und da unsere Bedingungsgleichung in Bezug auf diese offenbar vom zweiten Grade ist, so ist die Gleichung der umhüllenden Curve in den Punktcoordinaten x, y ebenfalls vom zweiten Grade, wie zu beweisen war. Was dann ferner die Berührung der Geraden

zwischen A, B, C, D durch unsere umhüllende Curve betrifft, so ist gleichzeitig der Abstand zwischen dem festen Punkt von A und der Tangente mit dem Abstand des festen Punktes B oder D von derselben Null. Die Curve berührt also die beiden Geraden AB und AD, ebenso die beiden Geraden BC und CD, d. h. sie ist dem Viereck $ABCD$ eingeschrieben.

§. 10.

Der Kegelschnitt im ungleichseitigen Dreieck, bestimmt als Ort durch das Problem des Pappus, wo das Verhältniss eines Perpendikelproducts zum Quadrat des dritten Perpendikels den Werth 1 hat, oder wo ein Perpendikelproduct gleich dem Quadrat des dritten Perpendikels, in synthetischer Entwicklung.

Es sei also in Taf. II. Fig. 14. gegeben ein Dreieck ABH und in seiner Ebene der Punkt C so bestimmt, dass seine Entfernung CE von einer Grundlinie AB das geometrische Mittel sei zwischen seinen Entfernungen CF und CG von den beiden andern Seiten AH und BH oder dass als Voraussetzung gelte die stetige Proportion $CF:CE = CE:CG$ oder die Gleichung $CE^2 = CF.CG$. Zur Vergleichung und Vermittlung dieser Bestimmung mit Früherem, namentlich mit §. 6., und zur Herstellung beliebig vieler so bestimmter Curvenpunkte C dient folgende Hülfsconstruction: aus einer bestimmten Lage C des Curvenpunktes werde parallel mit der Bissectrix HM des Dreieckswinkels $AHB = 2\alpha$ die Richtung CD gezogen und darauf von C aus abgemessen $CD = CE = p$ als eine bestimmte Grösse der Entfernung eines Curvenpunktes C von der Grundlinie AB des gegebenen Dreiecks ABH, dann durch das Ende D dieser Strecke JK senkrecht zu derselben und folglich auch zur Bissectrix HM, bis an die Dreiecksseiten AH und BH in J und K, wodurch aus dem ungleichseitigen Dreieck ABH abgeleitet ist das gleichschenklige HJK, das den Winkel $JHK = 2\alpha$ mit jenem gemein hat. Durch diese Drehung der ursprünglichen Perpendikelrichtung CE in die CD mit unveränderter Strecke, da die Seitenrichtungen AH und BH und daher auch die Perpendikel CF und CG darauf ebenfalls unverändert geblieben sind nach Richtung und Grösse, und durch die Drehung der Grundlinie AB in die JK des gleichschenkligen Dreiecks ist der Curvenpunkt C zurückgeführt nach §. 6. auf einen Peripheriepunkt C des unter den neuen Bedingungen entstehenden Krei-

ses, und die bloss affinen Dreiecke *CEF* und *CEG* mit der Seitenproportion $CF:CE = CE:CG$, ohne Gleichheit der Winkel zwischen diesen proportionalen Seiten, verwandelt in die ähnlichen *CDF* und *CDG*, wobei zu merken, dass der Kreis, als Stellvertreter unserer Ortscurve für vier Punkte, sein Centrum *M* auf der Bissectrix *HM* hat und die Seiten *AH* und *BH* in *J* und *K* berührt.

Die vier, unserer ursprünglichen Ortscurve und dem Hülfskreis gemeinschaftlichen Punkte *C* ergeben sich leicht aus der Bestimmung, dass immer die Entfernung $CE=p$ zwischen einem beliebigen Curvenpunkt *C* und der festen Grundlinie *AB* des ursprünglichen Dreiecks *ABH* gleich sein muss der Entfernung *CD* zwischen demselben Curvenpunkt *C* und der beweglichen Grundlinie *JK* des veränderlichen gleichschenkligen Dreiecks *HJK*. Es ist nämlich der Ort des Punktes *C*, der von zwei Geraden *AB* und *JK* gleichweit entfernt ist nach unserer Bestimmung, nichts anders als das Paar Gerader, die die beiden Nebenwinkel der *AB* und *JK* hälften, wie Taf. II. Fig. 14. zeigt. Man ziehe also durch einen beliebigen Punkt *P* der festen Grundlinie *AB*, aber immer zwischen den Enden *A* und *B*, eine Gerade *JK* bis an die Seiten *AH* und *BH* und senkrecht zur Bissectrix *HM*, errichte in *J* ein Perpendikel *JM* auf *AH* bis an die Bissectrix in *M*, beschreibe aus *M* mit dem Halbmesser *MJ* einen Kreis, der die *AH* und *BH* in *J* und *K* berühren und zugleich ein erster Ort sein wird für vier Curvenpunkte *C* auf einmal; ein zweiter Ort für dieselben vier Punkte ist, wie gesagt, das Paar Gerader *CPC* und *CPC*, die die Nebenwinkel der *AB* und *JK* hälften, und, ebenso leicht zu construiren, rechtwinklig zu einander sind. Also schneidet ein solcher Kreis, dessen Centrum auf der Bissectrix *HM*, und der die Seiten *AH* und *BH* berührt, unsere Curve immer in vier solchen Punkten, dass zwei Verbindungslinien derselben rechtwinklig zu einander sind. Diese vier Punkte sind übrigens die einzigen gemeinschaftlichen zwischen dem genannten Kreise und unserer Curve, die nach dem früher in §. 4. Zusatz und in §. 6. Bewiesenen weder ein Kreis, noch eine höhere Curve, sondern nur ein anderer Kegelschnitt sein kann; denn wenn noch mehr Punkte des Kreises unserer Curve angehörten, so müssten sich Kreis und Kegelschnitt in mehr als vier Punkten schneiden, was unmöglich ist.

Als zwei Grenzfälle unserer Curvenpunkte sind nach Taf. III. Fig. 15. zu betrachten die, wo eine Berührungssehne *AD* des stellvertretenden Kreises durch die Grundlinienecke *A*, und eine andere *BE* dieser Berührungssehnen durch die andere Grund-

linienecke B des gegebenen ungleichseitigen Dreiecks ABH geht. In dem einen Grenzpunkte A fallen zwei Curvenpunkte zusammen in einen einfachen Berührungspunkt zwischen Curve und stellvertretendem Kreis, AH ist also Tangente zu beiden in diesem Punkt; AM_1, senkrecht auf AH in A bis an die Bissectrix HM, ist Berührungshalbmesser des stellvertretenden Kreises, und hat also die Richtung der Normale zur Curve, wenn auch M_1 nicht Krümmungsmittelpunkt und daher AM_1 nicht Krümmungshalbmesser ist. Der Kreis um M_1 hat dann ausser A nur noch die zwei Punkte C_1 und C_1 mit der Curve gemein; sie liegen, wie Taf. III. Fig. 15. zeigt, auf den Geraden AC_1 und AC_1, welche die Nebenwinkel zwischen der Grundlinie AB und der Berührungssehne AD des berührenden Kreises um M_1 hälften. Ebenso ist B Berührungspunkt, BH Tangente an Curve und Berührungskreis, BM, senkrecht auf BH in B bis an die Bissectrix HM, Halbmesser des berührenden Kreises, M Centrum desselben; ausser B hat der berührende Kreis um M nur noch die zwei Punkte C und C mit der Curve gemein; sie liegen auf den Geraden BC und BC, die die Nebenwinkel zwischen der Grundlinie AB und der Berührungssehne BE des berührenden Kreises um M hälften. Wie die Berührungssehnen AD und BE als Grundlinien der gleichschenkligen Dreiecke ADH und BEH gefunden werden, ist wohl nicht nöthig zu bemerken.

Noch unmittelbarer ergeben sich AH und BH als Tangenten unserer Curve mit den Berührungspunkten A und B aus der Bedingungsgleichung $CE^2 = CF.CG$ zu Taf. II. Fig. 14.; denn in A, indem man sich von zwei Seiten, sowohl von oben, als von unten her in Bezug auf AB nähert, wird $CE = 0$, $CF = 0$, daher $CE^2 = 0 = 0.CG = 0$, und deshalb die Bedingungsgleichung befriedigt. Bei B geschieht dasselbe und es ist $CE = 0$, $CG = 0$, daher $CE^2 = 0 = CF.0 = 0$ und die Bedingungsgleichung ebenfalls befriedigt, so dass vorerst wenigstens A und B als Curvenpunkte aufgezeigt sind, da sie die Ortsbedingung erfüllen. Aber gleichzeitig nähern sich die Curvenpunkte C von zwei Seiten her, bis zum Verschwinden der Entfernungen, nicht nur den A und B, sondern auch den Richtungen AH und BH, da nach der Bedingung gleichzeitig CF mit CE oder CG mit CE bis zum Verschwinden abnehmen muss, und zwar sowohl für ein positives oder oberhalb AB liegendes CE, als auch für ein negatives oder unterhalb AB liegendes CE, womit AH und BH als Tangenten aufgezeigt sind, nach allgemein anerkannten Grundsätzen. Dieser Beweis gilt auch für den allgemeinern Fall in §. 4. Zusatz, wo das Verhältniss zwischen dem Rechteck zweier Perpendikel zum Quadrat des dritten Perpendikels ein beliebiges ist. Noch zwei

Curvenpunkte sind mittelbar gegeben in und mit dem Dreieck *ABH*, nämlich der Mittelpunkt *C* des eingeschriebenen Kreises in Taf. III. Fig. 16. und der Mittelpunkt *C* des angeschriebenen Kreises, der die Richtungen *AH* und *BH* in ihren Verlängerungen und die Grundlinie *AB* zwischen den Ecken *A* und *B* berührt. Denn in beiden Fällen haben wir $CE=CF=CG$ und daher $CE^2=CF.CG$ nach der Bedingung unserer Ortscurve. Aber mit jedem dieser Punkte ist eine ganze Quaterne von Curvenpunkten und ein stellvertretender Kreis gegeben. Diese werden gefunden wie folgt: Aus dem Centrum *C* des dem Dreieck *ABH* eingeschriebenen oder des auf die beschriebene Art angeschriebenen Kreises fälle man das Perpendikel *CE* auf die Grundlinie *AB*, hälfte den Winkel *DCE* durch die *CP*, wo *HCDM* Bissectrix des Dreieckswinkels $AHB=2\alpha$; die *CP* treffe *AB* in *P*, durch *P* ziehe man *JPK* rechtwinklig zu *HCDM*, und *CPC* rechtwinklig zu *CP*, so ist *JPK* Berührungssehne des die Seiten *AH* und *BH* berührenden Kreises, *JM* rechtwinklig in *J* auf *AH* bis *HM* gibt den Halbmesser des unsere vier Curvenpunkte *C* auf *CP* und *CP* enthaltenden Kreises für beide Fälle. Und damit wieder acht Curvenpunkte gefunden.

Da *AH* und *BH* Tangenten an unsere Curve in *A* und *B* sind, also *AB* Berührungssehne derselben, so ist *HO* durch die Mitte *O* der *AB* eine zu *AB* conjugirte Durchmesserrichtung, und es ist daher zur völligen Bestimmung unserer Curve Alles daran gelegen, zu finden die Curvenpunkte auf *HO*, d. h. zu bestimmen die Länge dieses Durchmessers und mit der Mitte desselben auch das Centrum der Curve, ferner den zu *HO* conjugirten Durchmesser parallel zu *AB*. Nun gibt es eine einfache Hülfsconstruction zur Bestimmung der Curvenpunkte nicht nur auf der Durchmesserrichtung *HO*, sondern auf jeder beliebigen durch *H* gehenden Richtung *HQ* nach Taf. III. Fig. 17. Man wähle auf der Bissectrix *HM* des Winkels *AHM* einen beliebigen Punkt *M*, fälle aus *M* auf *AH* oder *BH* das Perpendikel *MJ* oder *MK* als Halbmesser des die Seiten *AH* und *BH* berührenden Hülfskreises, welcher die *HQ* etwa in *X* schneiden wird, aus *X* fälle *XY* senkrecht auf die Berührungssehne *JK*, aus demselben *X* fälle *XZ* senkrecht auf die Grundlinie *AB*, messe auf *XZ* ab von *X* aus die Strecke $XV=XY$, ziehe durch *V* zu *AB* die Parallele *WU*, die die *AH* und *BH* in *W* und *U* schneidet, ziehe *WX* und aus *A* die *AC* parallel zu *WX*; der Punkt *C*, wo *AC* die *HQ* trifft, ist der gesuchte Curvenpunkt. Der Beweis dieser Construction beruht eigentlich auf der Theorie ähnlicher Kegelschnitte, die dem Winkel *AHB* eingeschrieben sind, dessen Schenkel *AH*, *BH* gemeinsame Tangenten derselben sind,

dessen Scheitel H ihr Aehnlichkeitspunkt; die Construction kann aber auch elementar bewiesen werden wie folgt. Es sei:

$$LX=m, \quad PX=n, \quad WX=q, \quad AC=q_1, \quad UX=r,$$

$$CF=m_1, \quad CG=n_1, \quad VX=p, \quad CE=p_1, \quad CB=r_1,$$

so besteht die Gleichung $p^2=mn$ nach §. 6. und die Proportionen

$m:m_1=q:q_1=p:p_1$ um der Parallelen willen,

$n:n_1=r:r_1=p:p_1$ aus gleichen Gründen,

$mn:m_1n_1=qr:q_1r_1=p^2:p_1^2$ durch Zusammensetzung.

Weil nun nach §. 6. besteht die Gleichung $p^2=mn$, so ist auch $p_1^2=m_1n_1$, wie zu beweisen war, oder C ein Punkt der gesuchten Curve und X der entsprechende Punkt der ähnlichen Hülfscurve. Die nun selbstverständliche Taf. III. Fig. 18. zeigt dieselbe Construction mit Bezug auf den Curvenpunkt C der Durchmesserrichtung HO.

Vorhin ist aus der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte angeführt und angenommen worden die Thatsache, die nicht nur gilt für unser auf's Engste beschränkte Problem, sondern auch für das Weitere im Sinne des Zusatzes zu §. 4., wo das Verhältniss zwischen dem Rechteck zweier Perpendikel zum Quadrat des dritten Perpendikels ein beliebiges ist, dass nämlich in Taf. IV. Fig. 19. die Berührungssehne AB der Tangenten AH und BH und die HO aus dem Treffpunkt H dieser Tangenten durch die Mitte O der AB zwei conjugirte Richtungen sind, oder dass HO alle zu AB parallelen Sehnen unserer Curve hälftet. Die Gründlichkeit der Methode verlangt aber diess nicht nur so unmittelbar aus der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte anzunehmen, sondern ins Besondere zu beweisen aus dem hier gerade vorliegenden Grundsatz der Curvenbeschreibung. Dieser Forderung nun wird genügt auf folgende ziemlich einfache Weise, mit Hülfe der Taf. IV. Fig. 19., in der wir setzen: den Curvenpunkt C rechts von HO mit der Voraussetzung, dass seine Entfernung von AB sei $CE=p$, von AH aber $CF=u$, von BH endlich $CG=v$, und dass diese drei Grössen eingehen nicht nur die hier in diesem Paragraphen geltende beschränkte Beziehung $p^2:uv=1$ oder $p^2=uv$, sondern, wie gesagt, die nach §. 4. Zusatz erweiterte, wonach $p^2:uv=g$ oder $p^2=guv$, d. h. das Quadrat der Entfernung CE des Curvenpunktes C von der Grundlinie AB soll zum Rechteck $CF.CG$ der Entfernungen desselben Punktes von den beiden andern Seiten des gegebenen Dreiecks ABH in einem beständigen Verhältnisse stehen, dessen Werth g gegeben sei.

Aus dem so bestimmten Curvenpunkte C rechts von HO leiten wir ab die Lage eines zweiten noch fraglichen Punktes C so, dass durch jenen ersten gezogen wird die Gerade $ACOCB$ parallel zu AB, auf derselben abgemessen OC links von HO gleich dem gegebenen OC rechts von derselben, wodurch wir zugleich bekommen auf $ACOCB$ was folgt: $OC = OC = d$, $AO = BO = c$, $ACOC = BCOC = c + d$ und $AC = BC = c - d$, wo A und B wieder auf AH und BH liegen. Aus der nun selbstverständlichen Taf. IV. Fig. 19. lässt sich unter diesen Voraussetzungen beweisen, dass C, links von HO, ebenfalls ein Punkt unserer durch obige erweiterte Bedingung bestimmten Curve ist, d. h. dass auch $CE^2 = g.CR.CS$ oder $p^2 = g.st$, wo $CR = s$ und $CS = t$ angenommen wird. So bekommen wir nämlich für unsere Perpendikel unmittelbar folgende trigonometrische Ausdrücke:

$$CF = u = (c+d)\operatorname{Sin} A, \quad CG = v = (c-d)\operatorname{Sin} B,$$

$$CR = s = (c-d)\operatorname{Sin} A, \quad CS = t = (c+d)\operatorname{Sin} B,$$

und daraus:

$$\begin{aligned} CR.CS = st &= (c-d)(c+d)\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \\ &= CF.CG = uv = (c-d)(c+d)\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B, \end{aligned}$$

daher: $gst = guv = p^2$, d. h. der Punkt C links von HO ebenfalls ein Curvenpunkt und damit bewiesen der Satz, dass HO alle zu AB parallelen Curvensehnen $ACOCB$ hälftet oder dass HO und AB conjugirte Richtungen sind und HO folglich eine Durchmesserrichtung.

Ist nun nach Taf. III. Fig. 18. bestimmt die Durchmesserlänge COC auf der Richtung HO und bestimmt die Mitte P auf CC, so ist eine Gerade durch P, parallel zu AB, der zu COC conjugirte Durchmesser der Richtung nach, auf der nur noch die Curvenpunkte zu bestimmen übrig sind. Doch diese besondere Aufgabe geht auf in der allgemeineren: auf einer gegebenen, zur Grundlinie AB parallelen Richtung zu bestimmen die Punkte unserer Curve. Die Analysis dieser Aufgabe, die man sich in Taf. IV. Fig. 20. gelöst denkt, ist folgende: ACB, parallel zur Grundlinie AEB, habe von dieser die Entfernung $CE = p$ und enthalte den Curvenpunkt C mit der Bedingung $p^2 = uv$, wo $CF = u$ und $CG = v$ vorstellen die Entfernungen dieses Punktes von den Seiten AH und BH des gegebenen Dreiecks. Dann geben die Abschnitte der ACB im Curvenpunkte C die trigonometrischen Ausdrücke $AC = u \operatorname{Cosec} A$, $BC = v \operatorname{Cosec} B$ und beide zusammen die Gleichung:

$$u\,\mathrm{Cosec}\,A + v\,\mathrm{Cosec}\,B = d = ACB,$$

und die Bedingungsgleichung gibt:

$$u\,\mathrm{Cosec}\,A \,.\, v\,\mathrm{Cosec}\,B = p\,\mathrm{Cosec}\,A \,.\, p\,\mathrm{Cosec}\,B = f.g$$

oder $x_{\prime} + x_{\prime\prime} = d$, $x_{\prime}.x_{\prime\prime} = fg$ oder $x^2 - dx + fg = 0$,

welche letzte quadratische Gleichung nach einem bekannten Lehrsatze zu Wurzeln hat die Ausdrücke:

$$x_{\prime} = u\,\mathrm{Cosec}\,A, \quad x_{\prime\prime} = v\,\mathrm{Cosec}\,B,$$

mit deren Construction auch gefunden ist der Curvenpunkt C auf der zur Grundlinie AEB parallelen ACB. Nun ist

$$f = p\,\mathrm{Cosec}\,A = AA \quad \text{und} \quad g = p\,\mathrm{Cosec}\,B = BB$$

und die Construction unserer quadratischen Gleichung ist eins mit der Construction der Proportion $f:x = d-x:g$, deren äussere Glieder f und g gegeben sind, während die Summe d der inneren unbekannten Glieder x und $d-x$ ebenfalls bekannt ist. Man errichte also auf ACB in den Enden A und B die Perpendikel $AK = AA = f$, $BL = BB = g$, ziehe durch die Enden dieser Perpendikel die KL, aus der Mitte M der KL den Halbkreis $KCCL$ mit dem Halbmesser $LM = KM$. Dieser schneidet die ACB in zwei Curvenpunkten C, C, wegen der ähnlichen Dreiecke ACK und BCL und der daraus folgenden Proportion $BL:BC = AC:AK$ oder $g:x = d-x:f$. Im Grenzfalle dieser Construction fallen die beiden Curvenpunkte C der ACB in einen Berührungspunkt dieser Geraden als Tangente des Kreises und der Curve zusammen und die beiden Halbmesser MC in einen Berührungshalbmesser, so dass wir haben:

$$MC = \tfrac{1}{2}(AK + BL),\ KL = 2MC = AK + BL = f + g \text{ und } AC = BC$$

oder den Berührungspunkt C auf der Mitte der ACB, und daher zugleich auf der Richtung HO oder der Mittellinie des gegebenen Dreiecks, die verbindet den Scheitel H mit der Mitte O der Grundlinie $AEB = 2c$. Diess gibt nach Taf. IV. Fig. 21., wenn gesetzt wird:

$$HO = m,\ CO = x,\ CH = m - x,\ \angle AHB = 2\alpha,\ \angle AHO = \alpha - \varphi,$$
$$\angle BHO = \alpha + \varphi,\ AO = BO = c,\ \angle BOH = \mu,\ p = x\,\mathrm{Sin}\,\mu,$$
$$AH = b,\ BH = a\ .$$

die Flächengleichung:

$$\Delta ABH = \Delta\, ACH + \Delta\, BCH + \Delta\, ABC,\quad av + bu + 2cp = 2cm\,\mathrm{Sin}\,\mu$$

oder,

$$u=(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi),\quad v=(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi),$$

$$p=\sqrt{uv}=(m-x)\sqrt{\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi)}$$

gesetzt:

$$a(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)+b(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi)$$
$$+2c(m-x)\sqrt{\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi)}=2cm\operatorname{Sin}\mu;$$

aber

$$av=bu$$

oder

$$a(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)=b(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi)\ \text{ oder }\ a\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)=b\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi),$$

und daher:

$$2a(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)+2c(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)\sqrt{\frac{a}{b}}=2cm\operatorname{Sin}\mu$$

oder

$$\left(a+c\sqrt{\frac{a}{b}}\right)(m-x)\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)=cm\operatorname{Sin}\mu;$$

aber

$$am\operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)=cm\operatorname{Sin}\mu\ \text{ und daher }\ \operatorname{Sin}(\alpha+\varphi)=\frac{c}{a}\operatorname{Sin}\mu,$$

weil $BH.PO=BO.HQ$; zuletzt:

$$\left(a+c\sqrt{\frac{a}{b}}\right)(m-x).\frac{c}{a}\operatorname{Sin}\mu=cm\operatorname{Sin}\mu,\quad \left(a+c\sqrt{\frac{a}{b}}\right)(m-x)=am,$$

$$m-x=\frac{am}{a+c\sqrt{\frac{a}{b}}},\quad m-x=\frac{am\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+c\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{ab}}{c+\sqrt{ab}},$$

$$x=m-\frac{m\sqrt{ab}}{c+\sqrt{ab}}=\frac{cm}{c+\sqrt{ab}},\quad p=\frac{cm\operatorname{Sin}\mu}{c+\sqrt{ab}}.$$

Für den andern Curvenpunkt C auf HO haben wir:

$$av+bu-2cp=2cm\operatorname{Sin}\mu,\quad \left(a-c\sqrt{\frac{a}{b}}\right)(m+x_{,})=am,$$

$$m+x_{,}=\frac{am}{a-c\sqrt{\frac{a}{b}}},\quad m+x_{,}=\frac{m\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-c},$$

$$x_{,}=\frac{m\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-c}-m=\frac{cm}{\sqrt{ab}-c}=-\frac{cm}{c-\sqrt{ab}},\quad p=-\frac{cm\operatorname{Sin}\mu}{c-\sqrt{ab}}.$$

Die Formel für x, enthält im Nenner $c-\sqrt{ab}$ die Bedingung, unter welcher die Durchmesserlänge auf der Richtung HO unendlich wird. Diess findet nämlich Statt, wenn dieser Nenner $c-\sqrt{ab}=0$ oder $c=\sqrt{ab}$, d. h. wenn die halbe Grundlinie $c=AO=BO$ das geometrische Mittel ist zwischen den beiden andern Seiten $a=BH$ und $b=AH$ des gegebenen Dreiecks. In diesem Falle ist unsere Ortscurve des Punktes C offenbar eine Parabel. Ein Zahlenbeispiel für eine solche ist:

$$AB=2c=12 \text{ oder } c=6,\ BH=a=4,\ AH=b=9 \text{ oder } 6=\sqrt{4.9}.$$

Eine Ellipse hingegen ist unsere Ortscurve, wenn $c<\sqrt{ab}$ und daher $x_{,}=-\dfrac{cm}{c-\sqrt{ab}}$ positiv wird. Zahlenbeispiel:

$$a=14,\ b=13,\ 2c=15,\ c=7\tfrac{1}{2},\ c^2=56\tfrac{1}{4},\ ab=182,$$

wo entschieden $c^2<ab$ oder $c<\sqrt{ab}$. Eine Hyperbel endlich geht hervor, wenn $c>\sqrt{ab}$ und daher $x_{,}=-\dfrac{cm}{c-\sqrt{ab}}$ negativ wird, und folglich oberhalb AB liegt, während bei der Ellipse unterhalb dieser Grundlinie. Zahlenbeispiel für die Hyperbel:

$$a=4,\ b=13,\ 2c=15,\ c=7\tfrac{1}{2},$$

wo entschieden $(7\tfrac{1}{2})^2>4.13$ oder $56\tfrac{1}{4}>52$. Die Bedingung der Parabel, wonach $c=\sqrt{ab}$, zeigt uns, dass es an diesem Kegelschnitt Tangentenpaare a und b gibt, deren halbe Berührungssehne c das geometrische Mittel ist zwischen den Strecken derselben von den Berührungspunkten bis zum Treffpunkt. Dass aber der Satz nicht allgemein, sondern nur für besondere Lagen der Parabeltangenten gilt, dafür ist das schlagendste Beispiel der Parameter c (die zur Axe rechtwinklige Ordinate aus dem Brennpunkte) und ihr Pol, der auf der Directrix liegt, im Durchschnitt mit der verlängerten Axe. Die Tangenten aus diesem Punkt an die Curve sind rechtwinklig zu einander, gleich lang, jede sei a, so ist ihr Product $a^2=2c^2$, also nicht wie oben $c=\sqrt{ab}$ oder, weil $b=a$, $c=a$.

Die Durchmesserlänge auf HO ist:

$$x+x_{,}=\frac{cm}{\sqrt{ab}+c}+\frac{cm}{\sqrt{ab}-c}=\frac{2cm\sqrt{ab}}{ab-c^2}=2\mathfrak{A};$$

$$\mathfrak{A}=\frac{cm\sqrt{ab}}{ab-c^2}=\frac{m\sqrt{ab}}{\dfrac{ab}{c}-c}=\frac{m\sqrt{ab}}{d-c}$$

halber Durchmesser, wo $d = \frac{ab}{c}$ oder vierte Proportionale zu den drei Seiten c, a, b.

Der halbe Durchmesser $\mathfrak{B}$, parallel zur Grundlinie AB, und zu $\mathfrak{A}$ auf der Richtung HO conjugirt, ist gegeben durch die Proportion:

$$xx_{\prime} : c^2 = \mathfrak{A}^2 : \mathfrak{B}^2 \quad \text{oder} \quad \frac{c^2 m^2}{ab - c^2} : c^2 = \frac{m^2 ab}{(d-c)^2} : \mathfrak{B}^2 \text{ *)}$$

oder

$$\frac{m^2}{ab - c^2} : 1 = \frac{m^2 ab}{(d-c)^2} : \mathfrak{B}^2,$$

$$1 : ab - c^2 = \frac{ab}{(d-c)^2} : \mathfrak{B}^2,$$

$$1 : c(d-c) = \frac{ab}{(d-c)^2} : \mathfrak{B}^2,$$

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{abc}{d-c} = \frac{c^2 \frac{ab}{c}}{d-c} = \frac{c^2 d}{d-c}.$$

Diese Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden aber leichter nach Taf. III. Fig. 18. und Taf. IV. Fig. 20. als nach diesen Formeln construirt.

Noch erübrigt die Bestimmung solcher Curvenpunkte, die auf beliebigen, von A und B ausgehenden Richtungen liegen; diese lässt sich um so leichter ausführen, als sich die projectivischen Beziehungen zwischen den Punkten unsers Kegelschnittes und den zwei Tangenten AH und BH vermitteln lassen mit unserm Gesetz der Curvenbeschreibung. Ist nämlich in der selbstverständlichen Taf. IV. Fig. 22. allgemein $CF.CG : CE^2 = g$ als ein gegebenes Verhältniss oder $uv : p^2 = g$, und verbunden der Curvenpunkt C mit den Berührungspunkten A und B der Tangenten AH und BH durch die Geraden ACD und BCK, die jene in D und K treffen, so haben wir offenbar:

$$KL : KN = p : v \quad \text{und} \quad AK : HK = p \operatorname{Cosec} A : v \operatorname{Cosec} C,$$

$$DM : DP = p : u \quad \text{und} \quad BD : HD = p \operatorname{Cosec} B : u \operatorname{Cosec} C,$$

$$\frac{AK}{HK} \cdot \frac{BD}{HD} = \frac{p^2 . \operatorname{Cosec} A \operatorname{Cosec} B}{uv \operatorname{Cosec}^2 C},$$

*) Siehe Apollonius, Kegelschnitte, III. B., 17. u. 18. Satz.

$$\frac{AK}{HK}\cdot\frac{BD}{HD}=\frac{p^2\mathrm{Sin}^2C}{uv\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B}=\frac{p^2c^2}{uvab},$$

oder, wo $AB=c$, $BH=a$, $AH=b$:

$$\frac{HK}{AK}\cdot\frac{HD}{BD}=\frac{abuv}{c^2p^2}=\frac{abg}{c^2}\ \text{oder}\ \frac{HK}{AK}:\frac{BD}{HD}=\frac{abg}{c^2},$$

oder das projectivische Doppelverhältniss der vier Abschnitte ein beständiges. In unserem besonderen Falle ist $g=1$, weil

$$CF.CG=CE^2 \text{ oder } p^2=uv, \text{ und daher } \frac{HK}{AK}:\frac{BD}{HD}=\frac{a}{c}:\frac{c}{b}.$$

Ist nun gegeben AD und damit das Verhältniss $\frac{BD}{HD}=k$, so ist das Verhältniss $\frac{HK}{AK}=\frac{ab}{c^2}.k$ und damit die Richtung BK auch vermittelt, so dass der Durchschnitt C der AD und BK den gesuchten, auf AD liegenden Curvenpunkt gibt. Aehnlich wird gefunden der Curvenpunkt C auf der als gegeben angenommenen BK, womit die vorgelegte Aufgabe als erledigt zu betrachten ist. Nur merke man sich für die Construction, dass

$$\frac{ab}{c^2}.k=\frac{d}{c}.k, \text{ wenn } d=\frac{ab}{c}$$

oder vierte Proportionale zu den drei Seiten c, a, b des gegebenen Dreiecks ist.

Tangentenconstruction.

Sei in Taf. IV. Fig. 23. wie bisher immer AH und BH ein Paar fester Tangenten an den nach dem vorigen allgemeinern Gesetz bestimmten Kegelschnitt mit den Berührungspunkten A und B, so dass die Entfernungen $CU=u$, $CV=v$, $CP=p$ eines beliebigen Curvenpunktes C von jenen festen Tangenten AH und BH und ihrer Berührungssehne AB eingeben die Beziehung eines beständigen Verhältnisses zwischen dem Quadrat der Entfernung p und dem Reckteck der Entfernungen u und v, und daher geben die Gleichung $p^2:uv=g$, wo p, u, v veränderlich, hingegen g einen beständigen gegebenen Werth dieses Verhältnisses vorstellt. Wird nun der so bestimmte Curvenpunkt C verbunden durch AC, BC mit den festen Berührungspunkten A und B und diese Geraden verlängert bis an die festen Tangenten BH und AH oder nach D und E, diese Durchschnittspunkte verbunden durch die Gerade ED und diese verlängert bis zum Durchschnitt T mit der

Richtung der Berührungssehne AB, so ist CT die Tangente des Kegelschnitts im Punkte C.

Beweis. Bei Apollonius Kegelschnitte, IV. Buch, im Anfang und die Theorie der harmonischen Pole und Polaren im Kegelschnitt, mit Anwendung auf den Punkt T als Pol und auf HCF als Polare, wegen des Vierseits $CDHE$ und seiner harmonischen Eigenschaften, die übrigens leicht zu vermitteln sind mit unserm Gesetz der Curvenbeschreibung, wie wir bei Taf. IV. Fig. 22. und im Anfange dieses §. 8. an Taf. II. Fig. 12. gesehen haben.

Besonderer Fall dieser Construction, Durchmesserconstruction.

Die nächst liegende Anwendung dieser Tangentenconstruction ist wohl die auf den Mittelpunkt F des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises in Taf. V. Fig. 24., wo aber der besondere Fall eintritt, dass F ein Punkt desjenigen Kegelschnitts ist, dessen Punkte in obigen Zeichen die Beziehung eingehen $p^2 = uv$, oder wo die Entfernung p eines beliebigen Curvenpunktes C von der Grundlinie AB des Dreiecks das geometrische Mittel ist zwischen den Entfernungen desselben Punktes von den beiden anderen Seiten AC, BC desselben. In der selbstverständlichen Taf. V. Fig. 24. ist FT die Tangente des näher bestimmten Kegelschnitts im genannten Punkt, ebenso TH die Tangente derselben Curve im Mittelpunkt H des äussern der Grundlinie AB angeschriebenen Kreises, der zugleich die Seiten AC, BC auf ihren Verlängerungen berührt. Ferner ist G die Mitte der Curvensehne FH und daher TG ein Durchmesser der Curve; im Durchschnitt J zwischen der Mittellinie CN als einem andern Durchmesser und dem Durchmesser TG ist der Mittelpunkt der Curve. Die angeführten Umstände, verbunden mit dem weitern, dass CF innere und CT äussere Bissectrix des Winkels ACB und seines Nebenwinkels oder Aussenwinkels ist, machen den Curvenpunkt F und den Curvenpunkt H mit den Tangenten FT und HT zu neuen bedeutsamen Verbindungsgliedern zwischen Elementar-Geometrie und Kegelschnitts-Geometrie, welche Bedeutung noch erhöht wird dadurch, dass aus diesen Gesichtspunkten noch näher vermittelt werden die oben schon vorläufig gefundenen Bedingungen, unter denen aus unserm Gesetz der Curvenbeschreibung die einzelnen Arten der Kegelschnitte, nämlich Parabel, Ellipse, Hyperbel hervorgehen. Wird nämlich in Taf. V. Fig. 24. der Durchmesser TG parallel zur Mittellinie CN des Dreiecks, so rückt der Durchschnittspunkt J als Mittelpunkt der Curve in's Unendliche hinaus, so dass wir es in diesem Falle offenbar mit einer Parabel zu

thun haben. Sehen wir nun näher zu, was diese Annahme weiter voraussetzt in Bezug auf die Grössenbeziehungen der Seiten des Dreiecks ABC unter einander, so ergibt sich nach und nach Folgendes: Winkel $NGO=\frac{1}{2}(A-B)$, das heisst gleich der halben Differenz der Winkel an der Grundlinie AB. Daraus folgt nach und nach unter den Annahmen

$$BN=AN=c,\quad BC=a,\quad AC=b$$

diese Reihe von Beziehungen aus der selbstverständlichen Figur:

$$NG=c\,\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}C,$$

$$GO=NG.\mathrm{Sec}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{c\,\mathrm{Tg}\frac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{2c^2\,\mathrm{Tg}\frac{1}{2}C}{(a+b)\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C}=\frac{2c^2}{(a+b)\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C},$$

weil nach den Gleichungen Mollweide's

$$\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{2c}(a+b)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C;$$

$$OT=AO+AT=\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{a-b}=\frac{4abc}{a^2-b^2},$$

weil

$$BO:AO=BC:AC=a:b,\quad BT:AT=BC:AC=a:b.$$

Nun gibt die für die Parabel geltende Annahme TG parallel zu CN die Proportion: $NO:CO=OT:OG$, oder wo

$$NO=BO-BN=\frac{2ac}{a+b}-c=\frac{(a-b)c}{a+b}\ \text{und}\ CO=\frac{2ab\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b},$$

was in die Proportion eingesetzt gibt:

$$\frac{(a-b)c}{a+b}:\frac{2ab\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b}=\frac{4abc}{a^2-b^2}:\frac{2c^2}{(a+b)\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C}$$

oder

$$(a-b)c:2ab\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C=2ab\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C:(a-b)c,$$

und daraus:

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{(a-b)^2c^2}{4a^2b^2}\ \text{oder}\ \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}C=\frac{(a-b)c}{2ab}=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

wenn $c=\sqrt{ab}$ und damit befriedigt wird die Formel:

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{(a+b+2c)(a+b-2c)}{4ab}=\frac{(a+b)^2-4c^2}{4ab}=\frac{(a+b)^2-4ab}{4ab}=\frac{(a-b)^2}{4ab}.$$

Zu demselben Ergebnisse gelangt man durch die Hülfslinie GK parallel zu CN. In unserem Falle ist nämlich GK eins mit GT und K mit T oder $KT=0$, so dass wir haben:

$$KT=NT-NK=0 \text{ oder } NT=AN+AT=c+\frac{2bc}{a-b}=\frac{(a+b)c}{a-b};$$

$$NK=NG.\text{Cotg}\,\vartheta=c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cotg}\,\vartheta,$$

und daher:

$$\frac{(a+b)c}{a-b}-c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cotg}\,\vartheta=0$$

oder

$$(a+b)\,\text{Sin}\,\vartheta-(a-b)\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos}\,\vartheta=0$$

oder

$$(a+b)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Sin}\,\vartheta-(a-b)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos}\,\vartheta=0,$$

$$2(a+b)cm\,\text{Cos}^2\tfrac{1}{2}C\,\text{Sin}\,\vartheta-2(a-b)cm\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos}\,\vartheta=0,$$

wo $CN=m$ und $\text{Cos}\,\vartheta=\frac{a^2-b^2}{4cm}$;

$$(a+b)ab\,\text{Sin}\,C\,\text{Cos}^2\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}(a-b)\,(a^2-b^2)\,\text{Sin}\,C=0,$$

$$\text{Cos}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{(a-b)^2}{4ab} \text{ oder } \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}C=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

was wieder voraussetzt $c=\sqrt{ab}$ oder die halbe Grundlinie c gleich dem geometrischen Mittel aus den beiden andere Dreiecksseiten $BC=a$ und $AC=b$.

Dieselbe Hülfslinie GK hilft auch bestimmen die Strecke NJ zwischen dem Fusspunkte N der Mittellinie CN auf der Grundlinie AB und dem Centrum J der Curve, nämlich aus folgender Proportion:

$$JN:GK=NT:KT, \text{ wo } GK=NG.\text{Cosec}\,\vartheta=c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cosec}\,\vartheta,$$

so dass nach dem Obigen:

$$JN:c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cosec}\,\vartheta=\frac{(a+b)c}{a-b}:\frac{(a+b)c}{a-b}-c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cotg}\,\vartheta$$

oder

$$JN=\frac{(a+b)c^2\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cosec}\,\vartheta}{(a+b)c-(a-b)c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cotg}\,\vartheta}=\frac{(a+b)c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C}{(a+b)\text{Sin}\,\vartheta-(a-b)\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{Cos}\,\vartheta},$$

$$JN=$$

$$\frac{(a+b)c\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C}{(a+b)\text{Sin}\,\vartheta-(a-b)\frac{(a^2-b^2)}{4cm}\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C}=\frac{2(a+b)c^2m\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C}{2(a+b)cm\text{Sin}\,\vartheta-(a+b)(a-b)^2\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}C},$$

$$JN = \frac{2c^2m\,\mathrm{Tg}\frac{1}{2}C}{ab\,\mathrm{Sin}\,C-(a-b)^2\mathrm{Tg}\frac{1}{2}C} = \frac{2c^2m\,\mathrm{Tg}\frac{1}{2}C}{2ab\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}(a-b)^2\mathrm{Tg}\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{4c^2m}{4ab\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}C-(a-b)^2},$$

$$JN = \frac{4c^2m}{4ab-4c^2} = \frac{cm}{d-c},$$

wo $d=\frac{ab}{c}$ oder vierte Proportionale zu a, b, c. Ist nun P der nähere Curvenpunkt auf dem Durchmesser CNJ, so haben wir nach Seite 30. die Gleichung:

$$PN = x = \frac{cm}{c+\sqrt{ab}},$$

und daher für den Halbmesser:

$$PJ = PN + NJ = \frac{cm}{c+\sqrt{ab}} + \frac{cm}{d-c} = \frac{cm\sqrt{ab}}{ab-c^2} = \frac{m\sqrt{ab}}{d-c},$$

wie auf Seite 31. Ferner ergibt sich:

$$CJ = CN + NJ = m + \frac{cm}{d-c} = \frac{dm}{d-c},$$

und das Product aus CJ und NJ endlich:

$$CJ.NJ = \frac{cdm^2}{(d-c)^2} = \frac{m^2ab}{(d-c)^2} = PJ^2,$$

so dass unsere Ergebnisse die Probe halten, nach welcher der Curvenhalbmesser PJ sein muss das geometrische Mittel zwischen CJ und NJ und gefunden werden kann durch eine Construction, die leichter ist als alle früheren.

Der zu AB parallele und zu CNJ conjugirte Durchmesser.

Oben auf Seite 29. und 31. ist an Taf. IV. Fig. 20. gezeigt worden eine Methode, sowohl die zu AB parallele Durchmesserlänge, als irgend eine zu derselben Richtung parallele Sehnenlänge zu construiren. Noch leichter wird die Construction dieser Durchmesserlänge auf unserm jetzigen Standpunkte. Wird nämlich in Taf. V. Fig. 24. aus der Ecke A des gegebenen Dreiecks ABC gezogen ARL parallel zum Durchmesser CNJ, aus dem Curvencentrum J die zu AB parallele und zu CNJ conjugirte Durchmesserrichtung JRQ, bis zum Durchschnitt Q mit der Seitenrichtung

AC als einer Curventangente, so ist Q der Pol zur ARL, wo L ein Curvenpunkt, weil $RL = AL$ und R Durchschnitt zwischen AL und JQ. Nun ergibt sich sofort:

$$JQ : AN = CJ : CN \text{ oder } JQ = \frac{c}{m} \cdot \frac{dm}{d-c} = \frac{cd}{d-c} = \frac{abc}{ab-c^2},$$

und das Product aus JQ und JR ist:

$$JQ \, . \, JR = JQ \, . \, AN = \frac{c^2 d}{d-c} = \mathfrak{B}^2,$$

wie oben auf Seite 32. gefunden für die Länge $\mathfrak{B}$ des zu AB parallelen und zu CNJ conjugirten Halbmessers, der also wieder das geometrische Mittel ist zwischen JQ und JR und daher auch leichter zu construiren, als früher.

Auf dieselbe Weise construirt man an der selbstverständlichen Taf. V. Fig. 25. die Durchmesserlängen auf JU parallel zur Bissectrix $CFOGH$ und auf der dazu conjugirten Richtung TGJ, deren Grössenbestimmung durch die Elemente des Dreiecks aber hier zu weit führen würde. Auf dieselbe Art verfährt man auf jeder beliebigen Durchmesserrichtung.

§. 11.

Coordinatengleichung des Kegelschnitts aus Taf. V. Fig. 26.

Nach den vorangegangenen Untersuchungen kann es nicht mehr zweifelhaft sein, welches Coordinatensystem das bequemste ist für die Coordinatenanalysis unsers Ortes, da AB als Berührungssehne der zwei festen Tangenten AC und BC und die Mittellinie CD als Durchmesser der Curve unmittelbar als conjugirte Richtungen gegeben sind und als Coordinatenaxen die einfachste Gleichung für die Curve unsers Ortes in Aussicht stellen. Sei also in Taf. V. Fig. 26. die CD Axe der x, die AB Axe der y, und wie früher $AB = 2c$, $CD = m$, $AC = b$, $BC = a$ und P ein solcher Punkt, dass seine Entfernung $PK = s$ von der AB sei das geometrische Mittel zwischen seinen Entfernungen $PH = p$, $PG = q$ von den AC und BC oder bestehe die Gleichung $s^2 = pq$. Setzen wir den Coordinatenwinkel $CDA = \vartheta$ und die Coordinaten des Punktes P wie Figur zeigt $PJ = x = LD$ und $PL = JD = y$, wo $EPLF$ durch P parallel zu AB und L der Durchschnitt zwischen CD und EF, ferner $EL = LF = u$ und $EP = u - y$, $FP = u + y$; so gibt die Proportion $LF : BD = CL : CD$ in diesen Zeichen:

$$u:c = m - x : m \text{ oder } u = \frac{c(m-x)}{m};$$

daraus folgt ferner:

$$EP = u - y = \frac{c(m-x)}{m} - y = \frac{1}{m}(cm - cx - my),$$

$$FP = u + y = \frac{c(m-x)}{m} + y = \frac{1}{m}(cm - cx + my).$$

Diese Werthe benutzt zur Bestimmung jener Perpendikel geben:

$$PK = s = x \operatorname{Sin} \vartheta,$$

$$PH = p = PE . \operatorname{Sin} A = (cm - cx - my)\frac{\operatorname{Sin} A}{m} = (cm - cx - my)\frac{\operatorname{Sin}\vartheta}{b},$$

$$PG = q = FP . \operatorname{Sin} B = (cm - cx + my)\frac{\operatorname{Sin} B}{m} = (cm - cx + my)\frac{\operatorname{Sin}\vartheta}{a}.$$

Diese Ergebnisse, eingeführt in die Bedingungsgleichung $s^2 = pq$, führen zu der Curvengleichung:

$$x^2 \operatorname{Sin}^2\vartheta = [c^2(m-x)^2 - m^2y^2]\frac{\operatorname{Sin}^2\vartheta}{ab},$$

oder

$$abx^2 = c^2(m-x)^2 - m^2y^2,$$

oder geordnet nach den Coordinaten:

$$(ab - c^2)x^2 + 2c^2mx + m^2y^2 = c^2m^2$$

oder

$$x^2 + \frac{2c^2m}{ab-c^2}x + \frac{c^4m^2}{(ab-c^2)^2} + \frac{m^2}{ab-c^2}y^2 = \frac{c^2m^2}{ab-c^2} + \frac{c^4m^2}{(ab-c^2)^2}$$

und

$$\left(x + \frac{c^2m}{ab-c^2}\right)^2 + \frac{m^2}{ab-c^2}y^2 = \frac{abc^2m^2}{(ab-c^2)^2}.$$

Wird nun gesetzt x statt $x + \frac{c^2m}{ab-c^2}$, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten versetzt in den Mittelpunkt der Curve, und wir haben:

$$x^2 + \frac{m^2}{ab-c^2}y^2 = \frac{abc^2m^2}{(ab-c^2)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{\mathfrak{A}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2} = 1$$

als Mittelpunktsgleichung bezogen auf ein System conjugirter Durchmesser, wo

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{abc^2m^2}{(ab-c^2)^2} = \frac{abm^2}{(d-c)^2} = \frac{cdm^2}{(d-c)^2}, \quad \mathfrak{B}^2 = \frac{abc^2}{ab-c^2} = \frac{c^2d}{d-c} \text{ und } d = \frac{ab}{c}$$

oder vierte Proportionale zu a, b, c, welche Ergebnisse auf's Schönste übereinstimmen mit denen der früheren Synthesis auf Seite 38. Taf. V. Fig. 24. und Seite 31. und 32. Taf. IV. Fig. 21. Auch die Entfernung des ursprünglichen Anfangspunktes D in Taf. V. Fig. 26. vom Mittelpunkt der Curve oder die Strecke $NJ = \frac{c^2m}{ab-c^2} = \frac{cm}{d-c}$ in Taf. V. Fig. 24. stimmt ganz überein mit dem zweiten Gliede des Binoms $x + \frac{c^2m}{ab-c^2}$ unserer ursprünglichen Gleichung, welches bezeichnet die Strecke, um welche die Axe der y verschoben werden muss, um den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt zu versetzen. Wird in der ursprünglichen Gleichung gesetzt $y=0$, so folgt:

$$x + \frac{c^2m}{ab-c^2} = \frac{cm\sqrt{ab}}{ab-c^2} \text{ oder } x = \frac{cm(\sqrt{ab}-c)}{ab-c^2} = \frac{cm}{c \pm \sqrt{ab}},$$

was wieder übereinstimmt mit Seite 30. Taf. IV. Fig. 21. In den Ausdrücken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für die conjugirten Halbmesserlängen sind zugleich die Bedingungen ausgesprochen, unter denen aus unserer Ortsbestimmung die verschiedenen Arten von Kegelschnitten, nämlich: Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln hervorgehen. Diese sind wie oben $c=\sqrt{ab}$ für die Parabel, $c<\sqrt{ab}$ für die Ellipse und $c>\sqrt{ab}$ für die Hyperbel. Im Fall der Parabel geht unsere ursprüngliche Gleichung über in:

$$2c^2mx + m^2y^2 = c^2m^2 \text{ oder } y^2 = c^2 - \frac{2c^2}{m}x = \frac{2c^2}{m}(\tfrac{1}{2}m - x) = 2px',$$

wo $p=\frac{c^2}{m}$, d. h. der Parameter die dritte Proportionale zur halben Grundlinie c und zur Mittellinie m, und x' statt $\frac{1}{2}m-x$ gesetzt ist. Die Gleichungen für AC und BC in unserem ursprünglichen Coordinatensystem sind:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{c} = 1 \text{ und } \frac{x}{m} - \frac{y}{c} = 1,$$

und es lässt sich leicht zeigen, dass diess Tangentengleichungen sind, wie folgt:

$$x = m \mp \frac{m}{c}y,$$

aus den Gleichungen der Geraden AC und BC eingesetzt in die ursprüngliche Curvengleichung, gibt nämlich:

$$(m \mp \frac{m}{c}y + \frac{c^2m}{ab-c^2})^2 + \frac{m^2}{ab-c^2}y^2 = \frac{abc^2m^2}{(ab-c^2)^2}$$

oder

$$\left(\frac{abm}{ab-c^2} \mp \frac{m}{c}y\right)^2 + \frac{m^2}{ab-c^2}y^2 = \frac{abc^2m^2}{(ab-c^2)^2},$$

$$\left(\frac{ab}{ab-c^2} \mp \frac{y}{c}\right)^2 + \frac{y^2}{ab-c^2} = \frac{abc^2}{(ab-c^2)^2},$$

$$\left(\frac{abc}{ab-c^2} \mp y\right)^2 + \frac{c^2y^2}{ab-c^2} = \frac{abc^4}{(ab-c^2)^2},$$

$$(abc \mp (ab-c^2)y)^2 + (ab-c^2)c^2y^2 = abc^4,$$

$$a^2b^2c^2 \mp 2abc(ab-c^2)y + ab(ab-c^2)y^2 = abc^4,$$

$$\mp 2abc(ab-c^2)y + ab(ab-c^2)y^2 = abc^2(c^2-ab),$$

$$\mp 2abcy + aby^2 = -abc^2$$

oder

$$y^2 \mp 2cy = -c^2, \text{ oder } (y \mp c)^2 = 0, \quad y = \pm c,$$

so dass die Gerade AC nur einen Punkt

$$y = +c \text{ und } x = m - \frac{m}{c}.c = 0$$

mit der Curve gemein hat, und ebenso die Gerade BC nur den Punkt

$$y = -c \text{ und } x = m + \frac{m}{c}\cdot(-c) = 0,$$

wie zu beweisen war.

Zeigte oben schon die Form der ursprünglichen Curvengleichung, der das Product xy der Coordinaten fehlte, durch diesen Umstand, dass in Taf. V. Fig. 26. die AB und die CD conjugirte Richtungen der Curve sind und also mit Recht gewählt wurden als Coordinatenaxen, so zeigt der andere Umstand, dass dieselbe Curvengleichung kein y der ersten Potenz enthält, die CD sogleich als Durchmesserrichtung und bestätigt mit der Tangenteneigenschaft der AC und BC noch mehr jene Wahl des Coordinatensystems.

Gleichung der Tangenten FT und HT in den Mittelpunkten F und H der dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreise nach Taf. V. Fig. 25. im ursprünglichen Coordinatensystem der AB und CN.

In diesem sind die Coordinaten $NK = PF = x$ und $FK = NP = y$ des Punktes F gegeben durch die Proportionen:

$$NK:CN=OF:CO,\quad FK:NO=CF:CO,$$

wo nach früheren Ergebnissen und Voraussetzungen:

$$CN=m,$$

$$OF=CO-CF=\frac{2ab}{a+b}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C-\frac{2ab\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b+2c}=\frac{4abc\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{(a+b+2c)(a+b)},$$

$$CO=\frac{2ab\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b},\quad NO=\frac{(a-b)c}{a+b},\quad CF=\frac{2ab\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b+2c};$$

also:

$$NK:m=\frac{4abc\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{(a+b)(a+b+2c)}:\frac{2ab\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b}$$

oder

$$NK=\frac{2cm}{a+b+2c},\quad FK:\frac{(a-b)c}{a+b}=\frac{2ab\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b+2c}:\frac{2ab\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b}$$

oder

$$FK=\frac{(a-b)c}{a+b+2c}.$$

Wird noch gezogen PF parallel zu CN bis auf die AB, ferner die Tangente TF verlängert bis L auf CN, so sind die Dreiecke LNT und PFT ähnlich und geben die Proportion $LN:NT=PF:PT$, wo

$$NT=\frac{(a+b)c}{a-b},\quad PF=NK=\frac{2cm}{a+b+2c},$$

$$PT=NT-NP=\frac{(a+b)c}{a-b}-\frac{(a-b)c}{a+b+2c}=\frac{4abc+2ac^2+2bc^2}{(a-b)(a+b+2c)};$$

also:

$$LN:\frac{(a+b)c}{a-b}=\frac{2cm}{a+b+2c}:\frac{4abc+2ac^2+2bc^2}{(a-b)(a+b+2c)}\text{ oder }LN=\frac{(a+b)cm}{2ab+ac+bc}.$$

Endlich aus NT und LN die Gleichung der LFT, nämlich:

$$\frac{x}{LN}+\frac{y}{NT}=1\text{ oder }\frac{(2ab+ac+bc)x}{(a+b)cm}+\frac{(a-b)y}{(a+b)c}=1,$$

oder

$$(2ab+ac+bc)x+(a-b)my=(a+b)cm.$$

Ebenso gibt die höhere Analysis durch Ableitung aus der Curvengleichung

$$(ab-c^2)x^2+2c^2mx+m^2y^2-c^2m^2=f(x,y)=0$$

für den Berührungspunkt

$$F\ \left(x=\frac{2cm}{a+b+2c},\quad y=\frac{(a-b)c}{a+b+2c}\right)$$

die Tangentengleichung:

$$(X-x)f_x'(x,y)+(Y-y)f_y'(x,y)=0,$$

wo X, Y die laufenden Coordinaten und x, y die des Berührungspunktes sind. So bekommen wir nämlich:

$$\left(X-\frac{2cm}{a+b+2c}\right)\left(2(ab-c)^2\cdot\frac{2cm}{a+b+2c}+2c^2m\right)$$
$$+\left(Y-\frac{(a-b)c}{a+b+2c}\right).2m^2.\frac{(a-b)c}{a+b+2c}=0,$$

$$\left(X-\frac{2cm}{a+b+2c}\right)\cdot\frac{2ab+ac+bc}{a+b+2c}+\left(Y-\frac{(a-b)c}{a+b+2c}\right)\cdot\frac{(a-b)m}{a+b+2c}=0,$$

$$(2ab+ac+bc)X+(a-b)mY=\frac{2(2ab+ac+bc)cm+(a-b)^2cm}{a+b+2c},$$

$$(2ab+ac+bc)X+(a-b)mY=(a+b)cm,$$

wie oben durch Synthesis.

Ist Q der Treffpunkt zwischen TH und CNJ, so sind C, L, N, Q harmonische Punkte und geben die Proportion:

$$CQ:CL=NQ:LN,\quad \text{oder}\quad m+NQ:m-LN=NQ:LN,$$

oder

$$NQ:m=LN:m-2.LN,$$

$$NQ:m=\frac{(a+b)cm}{2ab+ac+bc}:\frac{(2ab-ac-bc)m}{2ab+ac+bc},\quad \text{also}\quad NQ=\frac{(a+b)cm}{2ab-ac-bc}.$$

Gleichung der THQ diese:

$$-\frac{x}{NQ}+\frac{y}{NT}=1,\quad \frac{(ac+bc-2ab)x}{(a+b)cm}+\frac{(a-b)y}{(a+b)c}=1,$$

$$(ac+bc-2ab)x+(a-b)my=(a+b)cm.$$

Denken wir uns in Taf. V. Fig. 25. aus H nach CNJ die HU parallel zu AB, so folgt:

$$HU:ON=CH:CO$$

oder

$$HU:\frac{(a-b)c}{a+b}=\tfrac{1}{2}(a+b+2c)\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}C:\frac{2ab\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{a+b},$$

$$HU=\frac{(a-b)(a+b+2c)c}{4ab\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}C}=\frac{(a-b)c}{a+b-2c}=y=NV,$$

wenn HV zu CNJ parallel nach ABT gezogen ist. Dann folgt auch

$$VT = NT - NV = \frac{(a+b)c}{a-b} - \frac{(a-b)c}{a+b-2c}, \quad VT = \frac{4abc - 2ac^2 - 2bc^2}{(a-b)(a+b-2c)},$$

und HV ist gegeben durch die Proportion:

$$HV : HO = CN : CO, \text{ oder } HV : CH - CO = m : \frac{2ab}{a+b} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} C,$$

oder

$$HV : \frac{2ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C}{a+b-2c} - \frac{2ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C}{a+b} = m : \frac{2ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C}{a+b},$$

oder

$$HV : \frac{4abc \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C}{(a+b)(a+b-2c)} = m : \frac{2ab \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C}{a+b}, \quad HV = \frac{2cm}{a+b-2c} = NU = x;$$

daraus die Tangentengleichung im Punkte H:

$$\left(X - \frac{2cm}{2c-a-b}\right)\left(2(ab-c^2) \cdot \frac{2cm}{2c-a-b} + 2c^2 m\right)$$
$$+ \left(Y - \frac{(a-b)c}{a+b-2c}\right) . 2m^2 \cdot \frac{(a-b)c}{a+b-2c} = 0,$$

$$\left(X - \frac{2cm}{2c-a-b}\right) \cdot \frac{2ab-ac-bc}{2c-a-b} + \left(Y - \frac{(a-b)c}{a+b-2c}\right) \cdot \frac{(a-b)cm}{a+b-2c} = 0,$$

$$(ac+bc-2ab)x + (a-b)my = \frac{(2ab-ac-bc) . 2cm + (a-b)^2 cm}{a+b-2c},$$

$$(ac+bc-2ab)x + (a-b)my = \frac{(2ab-2ac-2bc+a^2+b^2)cm}{a+b-2c},$$

$$(ac+bc-2ab)x + (a-b)my = (a+b)cm;$$

wie oben durch Synthesis.

Axenrichtungen und Axenlängen.

Sind nach Obigem nicht nur zwei conjugirte Durchmesser nach Lage und Grösse, sondern sogar zwei Paare solcher leicht gefunden, so ergeben sich nach der Methode von Chasles, Geschichte der Geometrie, Seite 42., Note 43 der Uebersetzung von Sohncke, leicht Grösse und Richtung der Axen, welche Construction am einen oder andern Paar conjugirter Durchmesser ausgeführt werden kann. Vergleiche noch das ebengenannte Werk von Chasles Seite 386., wo vorausgeht die Entwickelung derselben Construction: Durch den Endpunkt A des einen der beiden conjugirten Halbmesser zieht man eine Gerade senkrecht gegen den zweiten Halbmesser und trägt auf dieser Geraden von A aus zwei

Abschnitte auf, jeden gleich dem zweiten Halbmesser; die Endpunkte *B* und *C* dieser beiden Abschnitte verbindet man mit dem Mittelpunkte *M* der Curve durch die Geraden *MB*, *MC*; den Winkel *BMC* und seinen Nebenwinkel hälftet man durch zwei neue Gerade, die die Richtungen für die beiden Axen der Curve angeben. Die Summe $MB + MC$ wird der grossen Axe und die Differenz $MB - MC$ der kleinen Axe gleich. Eine andere Entwickelung dieser Construction siehe im „Problem des Mydorge" von Gymnasiallehrer Brändli. Schaffhausen 1860. S. 36.

§. 12.

Hauptergebniss und Schluss unserer Untersuchung.

Erklärung. Nach Steiner S. 157. der „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten." Berlin 1832. heisst ein Kegelschnitt einem Viereck harmonisch umschrieben, wenn er der Ort eines freien Punktes ist, der die festen Ecken des Vierecks in einem harmonischen Strahlbüschel projicirt.

Eben so heissen die festen Ecken des Vierecks in Bezug auf den zugehörigen Kegelschnitt vier harmonische Punkte, ohne auf einer Geraden zu liegen.

Ein Kegelschnitt heisst einem Vierseit harmonisch eingeschrieben, wenn die vier Seiten der Figur als feste Tangenten des Kegelschnitts jede fünfte freie Tangente desselben harmonisch schneiden. Ebenso heissen die vier festen Tangenten in Bezug auf den zugehörigen Kegelschnitt vier harmonische Tangenten, ohne einen Strahlbüschel zu bilden.

Aus diesen Voraussetzungen ergibt sich noch leicht für die vier harmonischen Punkte, wenn man den fünften freien Curvenpunkt mit irgend einem jener vier zusammenfallen und ihn seine eigene Projection sein lässt, so dass die Tangente in demselben Projectionsstrahl ist, Folgendes: Die Tangente in jedem der vier harmonischen Punkte ist zu den drei Strahlen, welche er mit den drei übrigen bestimmt, der vierte harmonische Strahl, und zwar demjenigen Strahl zugeordnet, welcher durch den dem jedesmaligen Punkte zugeordneten Punkt geht. Die Tangenten in je zwei zugeordneten Punkten und die Gerade zwischen den zwei übrigen Punkten gehen durch einen Punkt. Erfüllen umgekehrt vier Punkte eines Kegelschnitts eine der zwei Bedingungen, so sind sie harmonisch.

Lässt man ebenso den Berührungspunkt der fünften freien Tangente zusammenfallen mit dem Berührungspunkt irgend einer

der vier festen harmonischen Tangenten, so dass jene fünfte Tangente zu einem Punkt zusammenschwindet, der zusammenfällt mit ihrem Durchschnittspunkt u. s. f., so folgt: Der Berührungspunkt einer jeden der vier festen harmonischen Tangenten ist zu den drei Punkten, in welchen sie von den drei übrigen geschnitten wird, der vierte harmonische Punkt, und zwar demjenigen zugeordnet, in welchem die jedesmalige Tangente von der ihr zugeordneten geschnitten wird. Ferner: die Berührungspunkte je zweier zugeordneten Tangenten und der Durchschnittspunkt der zwei übrigen Tangenten liegen in einer Geraden. Erfüllen umgekehrt vier Tangenten eines Kegelschnitts eine der zwei Bedingungen, so sind sie harmonisch. Vier Tangenten eines Kegelschnitts, deren Berührungspunkte harmonisch sind, bestehen selbst als harmonische. Vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts haben vier harmonische Berührungspunkte. Alles dieses zeigen die Figuren 24. u. 25. auf Taf. V. ganz deutlich, und zwar unter der besonderen Bedingung, dass in den harmonischen Strahlbüscheln A und B das eine Paar zugeordneter Strahlen AF und AH, BF und BH rechtwinklig und die Winkel des andern Paares zugeordneter Strahlen AC, AB und BC, BA hälften. Ferner sind die vier harmonischen Punkte $ABFH$ die Ecken eines Kreissehnenvierecks.

Ist nun $ABFH$ ein beliebiges, einem Kegelschnitt eingeschriebenes harmonisches Viereck, an dessen Ecken Tangenten construirt, auf dieselben und die Curvenpunkte angewandt der Satz von den Entfernungen zwischen Curvenpunkten, Tangentenpaaren und Seiten des Vierecks als Berührungssehnen, so ergibt sich der

Lehrsatz. Ist einem Viereck umschrieben ein harmonischer Kegelschnitt, so ist das Product der Entfernungen eines beliebigen Curvenpunktes von zwei coordinirten Seiten gleich dem Product der Entfernungen desselben Punktes von je zwei andern coordinirten Seiten.

Beweis aus Taf. V. Fig. 27. durch projectivische Eigenschaften: Es seien a, b, c drei Punkte eines Kegelschnitts und dieselben projicirt aus dem vierten Punkte P desselben Kegelschnitts durch die Strahlen A, B, C; aus dem fünften Punkte $P_{\prime}$ durch die Strahlen A', B', C' und alle diese Elemente als fest angenommen, hingegen m als freier sechster Punkt der Curve, und derselbe ebenfalls projicirt aus denselben Punkten P und $P_{\prime}$ durch die Strahlen M und M', so gibt die projectivische Eigenschaft der Kegelschnitte die Proportion:

$$\frac{\operatorname{Sin}(A, M)}{\operatorname{Sin}(B, M)} : \frac{\operatorname{Sin}(A, C)}{\operatorname{Sin}(B, C)} = \frac{\operatorname{Sin}(A', M')}{\operatorname{Sin}(B', M')} : \frac{\operatorname{Sin}(A', C')}{\operatorname{Sin}(B', C')} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}(A, M)}{\mathrm{Sin}(B, M)} = \frac{\mathrm{Sin}(A', M')}{\mathrm{Sin}(B', M')}\left[\frac{\mathrm{Sin}(A, C)}{\mathrm{Sin}(B, C)} : \frac{\mathrm{Sin}(A', C')}{\mathrm{Sin}(B', C')}\right] \text{ oder}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}(A, M)}{\mathrm{Sin}(B, M)} = \lambda . \frac{\mathrm{Sin}(A', M')}{\mathrm{Sin}(B', M')},$$

wo der constante Coefficient λ gegeben ist durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{\mathrm{Sin}(A, C)}{\mathrm{Sin}(B, C)} : \frac{\mathrm{Sin}(A', C')}{\mathrm{Sin}(B', C')}.$$

Dieser Coefficient λ kann den Werth 1 annehmen unter der Bedingung, dass Winkel (A, C) = Winkel (A', C'); Winkel (B, C) = Winkel (B', C'), was einen Kreis voraussetzt. In diesem Falle haben wir:

$$\frac{\mathrm{Sin}(A, M)}{\mathrm{Sin}(B, M)} = \frac{\mathrm{Sin}(A', M')}{\mathrm{Sin}(B', M')} \text{ oder } \frac{M\,\mathrm{Sin}(A, M)}{M\,\mathrm{Sin}(B, M)} = \frac{M'\,\mathrm{Sin}(A', M')}{M'\,\mathrm{Sin}(B', M')}$$

oder $\frac{p}{v} = \frac{u}{q}$ oder $pq = uv$, d. h. im Kreissehnenviereck $aPP_{,}b$ ist das Product aus den Entfernungen eines Peripheriepunktes von zwei coordinirten Seiten gleich dem Product aus den Entfernungen desselben Punktes von je zwei andern coordinirten Seiten, wie schon oben in §. 7. gefunden.

Der zweite Fall, wo λ den Werth 1 annimmt, ist die Bedingung, dass $\frac{\mathrm{Sin}(A, C)}{\mathrm{Sin}(B, C)} = \frac{\mathrm{Sin}(A', C')}{\mathrm{Sin}(B', C')} = \frac{\mathrm{Sin}(A, D)}{\mathrm{Sin}(B, D)} = \frac{\mathrm{Sin}(A', T)}{\mathrm{Sin}(B', T)}$ $= \frac{\mathrm{Sin}(A', D)}{\mathrm{Sin}(B', D)} = \frac{\mathrm{Sin}(A, T_{,})}{\mathrm{Sin}(B, T_{,})}$, wo D den gemeinschaftlichen Strahl der beiden Büschel P und $P_{,}$, und $T_{,}$ die Tangente in P, hingegen T die Tangente in $P_{,}$ vorstellt. Diese Bedingung setzt voraus einen dem Viereck $aPP_{,}b$ umschriebenen harmonischen Kegelschnitt und führt als Schlussergebniss den oben ausgesprochenen Lehrsatz herbei: denn die harmonische Proportion für den freien Curvenpunkt m und seine Projectionsstrahlen M, M' nach P und $P_{,}$ gibt aus Taf. V. Fig. 27. nach und nach:

$$\frac{\mathrm{Sin}(A, M)}{\mathrm{Sin}(B, M)} : \frac{\mathrm{Sin}(A', M')}{\mathrm{Sin}(B', M')} = 1 \text{ oder } \frac{M.\mathrm{Sin}(A, M)}{M.\mathrm{Sin}(B, M)} : \frac{M'.\mathrm{Sin}(A', M')}{M'.\mathrm{Sin}(B', M')} = 1$$

oder $\frac{p}{v} : \frac{u}{q} = 1$ oder $pq = uv$, wie zu beweisen war.

Ist der Coefficient λ nicht 1, sondern ein anderer Werth, so folgt auf dieselbe Weise der allgemeine Satz Newton's vom eingeschriebenen Viereck des Kegelschnitts nach §. 3., wie er bei den Schriftstellern über neue Geometrie sich findet.

II.

Grundzüge der Theorie der hyperbolischen Functionen und der Anwendung derselben zur Ausziehung der Wurzeln und zur Auflösung der Gleichungen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Da die Wichtigkeit der Theorie der hyperbolischen Functionen für die Analysis sich immer mehr herauszustellen, mir aber die bisherige Entwickelung derselben und namentlich ihre Anwendung zur Auflösung der Gleichungen noch in mancher Rücksicht einer Vereinfachung und Verbesserung fähig zu sein scheint; so halte ich es für zweckmässig, in diesem Aufsatze, ohne irgendwie auf Vollständigkeit Anspruch machen zu wollen, zu zeigen, wie nach meiner Ansicht dieser Gegenstand darzustellen sein dürfte *). Bemerken will ich für jetzt hier nur, dass der Umstand, dass die hyperbolischen Functionen, — wie übrigens nach der Natur derselben von vorn herein zu erwarten war und eigentlich sich von selbst verstand — eben so gut wie die Logarithmen zur Ausziehung der Wurzeln gebraucht werden können, nicht immer mit der erforderlichen Bestimmtheit und Deutlichkeit hervorgehoben wird; und rücksichtlich der Auflösung der cubischen Gleichungen bin ich der Meinung, dass ein besonderer Vortheil der in Rede stehenden Functionen gerade darin liegt, dass man bei ihrer Anwendung die cardanische Formel ganz entbehren kann, sich also von derselben auch mittelst der hyperbolischen Functionen ganz unabhängig machen muss. Dies wären etwa die we-

---

*) Man vergl. die sehr verdienstlichen Entwickelungen von Herrn Matzka in Thl. XXXVII. S. 399. und von Herrn Gronau in den unten anzuführenden Schriften.

sentlichsten Momente, denen ich bei den folgenden Entwickelungen vorzugsweise einige Beachtung wünschen möchte.

§. 2.

Wenn e wie gewöhnlich die Basis der natürlichen Logarithmen und φ eine beliebige veränderliche Grösse bezeichnet; so heissen die beiden Functionen

$$\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

respective der hyperbolische Cosinus und der hyperbolische Sinus von φ, und werden durch

$$1) \quad \ldots \quad \operatorname{Cos}\varphi=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{Sin}\varphi=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

bezeichnet, indem man sich zur Unterscheidung von dem cyklischen Cosinus und Sinus $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ bei der Bezeichnung der hyperbolischen Cosinus und Sinus grosser Anfangsbuchstaben bedient.

Bekanntlich können, indem wir für jetzt hier nur reelle Werthe von φ betrachten wollen, für jedes reelle φ die Functionen e^{φ} und $e^{-\varphi}$ in die convergirenden unendlichen Reihen:

$$e^{\varphi}=1+\frac{\varphi}{1}+\frac{\varphi^2}{1.2}+\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\frac{\varphi^4}{1\ldots.4}+\ldots.,$$

$$e^{-\varphi}=1-\frac{\varphi}{1}+\frac{\varphi^2}{1.2}-\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\frac{\varphi 4}{1\ldots.4}-\ldots.$$

entwickelt werden, woraus sich mit Bezug auf 1) unmittelbar die beiden folgenden allgemein gültigen Gleichungen ergeben:

$$2) \quad \ldots \quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\varphi=1+\dfrac{\varphi^2}{1.2}+\dfrac{\varphi^4}{1\ldots.4}+\dfrac{\varphi^6}{1\ldots.6}+\ldots., \\ \operatorname{Sin}\varphi=\dfrac{\varphi}{1}+\dfrac{\varphi^3}{1.2.3}+\dfrac{\varphi^5}{1\ldots.5}+\dfrac{\varphi^7}{1\ldots.7}+\ldots.; \end{cases}$$

aus denen man sogleich erkennt, dass $\operatorname{Cos}\varphi$ stets positiv ist, und, wenn φ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, von $+\infty$ bis 1 abnimmt und von 1 bis $+\infty$ wächst; dagegen ist $\operatorname{Sin}\varphi$ negativ oder positiv, jenachdem φ negativ oder positiv ist, und wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn φ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst. Es kann also $\operatorname{Cos}\varphi$ bloss positive Werthe annehmen, die nicht kleiner als die Einheit sind; dagegen kann $\operatorname{Sin}\varphi$ jeden beliebigen negativen oder positiven

Werth annehmen, welche Eigenschaften der hyperbolischen Cosinus und Sinus man bei der Anwendung dieser Functionen wohl zu beachten hat.

So wie in der Theorie der Kreisfunctionen bildet man aus den hyperbolischen Cosinussen und Sinussen neue hyperbolische Functionen nach den Formeln:

$$\operatorname{Tang}\varphi=\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi},\quad \operatorname{Cot}\varphi=\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi},$$

$$\operatorname{Sec}\varphi=\frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi},\quad \operatorname{Cosec}\varphi=\frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi}$$

u. s. w., was hier natürlich nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 3.

Aus den beiden Fundamentalformeln

$$\operatorname{Cos}\varphi=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2},\quad \operatorname{Sin}\varphi=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

lassen sich leicht eine Menge von Relationen zwischen diesen Functionen ableiten, von denen wir jedoch nur einige der wichtigsten entwickeln wollen.

Weil

$$\operatorname{Cos}(-\varphi)=\frac{e^{-\varphi}+e^{\varphi}}{2}=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2},$$

$$\operatorname{Sin}(-\varphi)=\frac{e^{-\varphi}-e^{\varphi}}{2}=-\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

ist; so ist:

$$3)\ \ldots\ \operatorname{Cos}(-\varphi)=\operatorname{Cos}\varphi,\quad \operatorname{Sin}(-\varphi)=-\operatorname{Sin}\varphi.$$

Ferner ist nach den Grundformeln:

$$\operatorname{Cos}\varphi^2=\left(\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\right)^2=\frac{e^{2\varphi}+e^{-2\varphi}+2}{4},$$

$$\operatorname{Sin}\varphi^2=\left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\right)^2=\frac{e^{2\varphi}+e^{-2\varphi}-2}{4};$$

also:

$$4)\ \ldots\ldots\ldots\ \operatorname{Cos}\varphi^2-\operatorname{Sin}\varphi^2=1$$

und

$$\operatorname{Cos}\varphi^2+\operatorname{Sin}\varphi^2=\frac{e^{2\varphi}+e^{-2\varphi}}{2}.$$

folglich, weil

$$\mathrm{Cos}\, 2\varphi = \frac{e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}}{2}$$

ist:

$$5) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathrm{Cos}\, \varphi^2 + \mathrm{Sin}\, \varphi^2 = \mathrm{Cos}\, 2\varphi.$$

Aus der Gleichung 4) folgt:

$$6) \; . \; . \; . \mathrm{Cos}\, \varphi = \sqrt{\mathrm{Sin}\, \varphi^2 + 1}, \quad \mathrm{Sin}\, \varphi = \pm \sqrt{\mathrm{Cos}\, \varphi^2 - 1}$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem φ positiv oder negativ ist.

Weil

$$\mathrm{Cos}\, \varphi\, \mathrm{Sin}\, \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \cdot \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = \frac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{4}$$

und

$$\mathrm{Sin}\, 2\varphi = \frac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{2}$$

ist, so ist:

$$7) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2\, \mathrm{Cos}\, \varphi\, \mathrm{Sin}\, \varphi = \mathrm{Sin}\, 2\varphi.$$

Ferner ist nach den Grundformeln:

$$\mathrm{Cos}\, (\varphi + \psi) = \frac{e^{\varphi+\psi} + e^{-(\varphi+\psi)}}{2} = \frac{2e^{\varphi} . e^{\psi} + 2e^{-\varphi} . e^{-\psi}}{4}$$

$$= \frac{(e^{\varphi} + e^{-\varphi})e^{\psi} + (e^{\varphi} - e^{-\varphi})e^{\psi} + (e^{\varphi} + e^{-\varphi})e^{-\psi} - (e^{\varphi} - e^{-\varphi})e^{-\psi}}{4}$$

$$= \frac{(e^{\varphi} + e^{-\varphi})(e^{\psi} + e^{-\psi}) + (e^{\varphi} - e^{-\varphi})(e^{\psi} - e^{-\psi})}{4}$$

$$= \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \cdot \frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2} + \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \cdot \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{2},$$

$$\mathrm{Sin}\, (\varphi + \psi) = \frac{e^{\varphi+\psi} - e^{-(\varphi+\psi)}}{2} = \frac{2e^{\varphi} . e^{\psi} - 2e^{-\varphi} . e^{-\psi}}{4}$$

$$= \frac{(e^{\varphi} - e^{-\varphi})e^{\psi} + (e^{\varphi} + e^{-\varphi})e^{\psi} + (e^{\varphi} - e^{-\varphi})e^{-\psi} - (e^{\varphi} + e^{-\varphi})e^{-\psi}}{4}$$

$$= \frac{(e^{\varphi} - e^{-\varphi})(e^{\psi} + e^{-\psi}) + (e^{\varphi} + e^{-\varphi})(e^{\psi} - e^{-\psi})}{4}$$

$$= \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \cdot \frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2} + \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \cdot \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{2};$$

also:

$$8) \ldots \begin{cases} \text{Cos}(\varphi+\psi) = \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi + \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\psi, \\ \text{Sin}(\varphi+\psi) = \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi + \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,\psi. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Farmeln $-\psi$ für ψ, so wird:

$$\text{Cos}(\varphi-\psi) = \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}(-\psi) + \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}(-\psi),$$

$$\text{Sin}(\varphi-\psi) = \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}(-\psi) + \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}(-\psi);$$

also nach 3):

$$9) \ldots \begin{cases} \text{Cos}(\varphi-\psi) = \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi - \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\psi, \\ \text{Sin}(\varphi-\psi) = \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi - \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,\psi; \end{cases}$$

folglich nach 8) und 9):

$$10) \ldots \begin{cases} \text{Cos}(\varphi\pm\psi) = \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi \pm \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\psi, \\ \text{Sin}(\varphi\pm\psi) = \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi \pm \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,\psi. \end{cases}$$

Hiernach ist:

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) + \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) - \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) + \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) - \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\psi;$$

also, wenn man für

$$\varphi,\quad \psi,\quad \varphi+\psi,\quad \varphi-\psi$$

respective

$$\varphi+\psi,\quad \varphi-\psi,\quad 2\varphi,\quad 2\psi$$

setzt:

$$11) \ldots \begin{cases} \text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,\psi = 2\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \\ \text{Cos}\,\varphi - \text{Cos}\,\psi = 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \\ \text{Sin}\,\varphi + \text{Sin}\,\psi = 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \\ \text{Sin}\,\varphi - \text{Sin}\,\psi = 2\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi). \end{cases}$$

Nach 10), 5), 7), 4) ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}\,3\varphi &= \mathrm{Cos}\,(2\varphi+\varphi)\\ &= \mathrm{Cos}\,2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\\ &= (\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Sin}\,\varphi^2)\,\mathrm{Cos}\,\varphi + 2\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\\ &= (2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - 1)\,\mathrm{Cos}\,\varphi + 2(\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - 1)\,\mathrm{Cos}\,\varphi\\ &= 4\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - 3\,\mathrm{Cos}\,\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}\,3\varphi &= \mathrm{Sin}\,(2\varphi+\varphi)\\ &= \mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\\ &= 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + (\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Sin}\,\varphi^2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi\\ &= 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi(\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + 1) + (2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + 1)\,\mathrm{Sin}\,\varphi\\ &= 4\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3 + 3\,\mathrm{Sin}\,\varphi;\end{aligned}$$

so dass man also die beiden folgenden Gleichungen hat:

$$12) \ldots\ldots \begin{cases}\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \frac{3}{4}\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{1}{4}\,\mathrm{Cos}\,3\varphi = 0,\\ \mathrm{Sin}\,\varphi^3 + \frac{3}{4}\,\mathrm{Sin}\,\varphi - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,3\varphi = 0;\end{cases}$$

und wenn man $\frac{1}{3}\varphi$ für φ setzt:

$$13) \ldots\ldots \begin{cases}\mathrm{Cos}\,\frac{1}{3}\varphi^3 - \frac{3}{4}\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{4}\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 0,\\ \mathrm{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{3}{4}\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,\varphi = 0.\end{cases}$$

Die aus dem Obigen bekannte Formel

$$\mathrm{Cos}\,2\varphi = \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \mathrm{Sin}\,\varphi^2$$

kann man nach 4) auch auf folgende Art darstellen:

$$\mathrm{Cos}\,2\varphi = 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - 1 = 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + 1,$$

woraus sich, wenn man $\frac{1}{2}\varphi$ für φ setzt, die Ausdrücke

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 - 1 = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 + 1;$$

also:

$$14)\quad \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi + 1}{2}},\quad \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi - 1}{2}}$$

ergeben, das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem φ positiv oder negativ ist.

Man sieht leicht ein, dass man diese Theorie ganz eben so durchführen kann, wie die Theorie der Kreisfunctionen, was noch weiter zu entwickeln, unnütze Weitläufigkeit sein würde. Haupt-

sächlich sind aber der späteren Anwendungen wegen uns noch einige Formeln nöthig, die wir im folgenden Paragraphen entwickeln wollen.

§. 4.

Durch Multiplication erhält man:

$$(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)(\operatorname{Cos}\varphi_1 \pm \operatorname{Sin}\varphi_1)$$

$$= (\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\varphi_1 + \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\varphi_1) \pm (\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi_1 + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi_1),$$

also nach 10):

15)

$$(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)(\operatorname{Cos}\varphi_1 \pm \operatorname{Sin}\varphi_1) = \operatorname{Cos}(\varphi + \varphi_1) \pm \operatorname{Sin}(\varphi + \varphi_1),$$

und durch successive Anwendung dieser Gleichung ergiebt sich sogleich:

16)

$$(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)(\operatorname{Cos}\varphi_1 \pm \operatorname{Sin}\varphi_1)(\operatorname{Cos}\varphi_2 \pm \operatorname{Sin}\varphi_2)\ldots(\operatorname{Cos}\varphi_{n-1} \pm \operatorname{Sin}\varphi_{n-1})$$

$$= \operatorname{Cos}(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1}) \pm \operatorname{Sin}(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1}).$$

Setzt man hierin

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n-1},$$

so ergiebt sich, unter der Voraussetzung, dass n eine positive ganze Zahl ist:

$$17) \quad \ldots\ldots (\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)^n = \operatorname{Cos} n\varphi \pm \operatorname{Sin} n\varphi.$$

Nun ist, wenn auch fernerhin n eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)^n}$$

$$= \frac{(\operatorname{Cos}\varphi \mp \operatorname{Sin}\varphi)^n}{(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)^n(\operatorname{Cos}\varphi \mp \operatorname{Sin}\varphi)^n}$$

$$= (\operatorname{Cos}\varphi \mp \operatorname{Sin}\varphi)^n,$$

weil

$$(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi)(\operatorname{Cos}\varphi \mp \operatorname{Sin}\varphi) = \operatorname{Cos}\varphi^2 - \operatorname{Sin}\varphi^2 = 1$$

ist. Nach 17) ist:

$$(\operatorname{Cos}\varphi \mp \operatorname{Sin}\varphi)^n = \operatorname{Cos} n\varphi \mp \operatorname{Sin} n\varphi,$$

also:

$$(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{-n} = \mathrm{Cos}\,n\varphi \mp \mathrm{Sin}\,n\varphi,$$

und folglich, weil

$$\mathrm{Cos}\,n\varphi = \mathrm{Cos}(-n\varphi), \quad \mathrm{Sin}\,n\varphi = -\mathrm{Sin}(-n\varphi)$$

ist:

18) . . . $(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{-n} = \mathrm{Cos}(-n\varphi) \pm \mathrm{Sin}(-n\varphi)$.

Nach 17) und 18) ist also für jedes positive oder negative ganze n:

19) . . . . . $(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{n} = \mathrm{Cos}\,n\varphi \pm \mathrm{Sin}\,n\varphi$.

Bezeichnen nun m und n beliebige positive oder negative ganze Zahlen, so ist hiernach:

$$(\mathrm{Cos}\,\frac{m}{n}\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\frac{m}{n}\varphi)^{n}$$

$$= \mathrm{Cos}\,n\,\frac{m}{n}\varphi \pm \mathrm{Sin}\,n\,\frac{m}{n}\varphi = \mathrm{Cos}\,m\varphi \pm \mathrm{Sin}\,m\varphi,$$

und folglich, weil

$$\mathrm{Cos}\,m\varphi \pm \mathrm{Sin}\,m\varphi = (\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{m}$$

ist:

20) . . . $(\mathrm{Cos}\,\frac{m}{n}\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\frac{m}{n}\varphi)^{n} = (\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{m}$.

Also ist, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\mathrm{Cos}\,\frac{m}{n}\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\frac{m}{n}\varphi$$

ein Werth der $n$ten Wurzel aus der Grösse

$$(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{m}$$

oder ein Werth der Grösse

$$\sqrt[n]{(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{m}} \quad \text{oder} \quad (\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{\frac{m}{n}}.$$

Weil

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2 = 1$$

oder

$$\mathrm{Sin}\,\varphi^2 = \mathrm{Cos}\,\varphi^2 - 1,$$

und daher immer

$$\mathrm{Sin}\,\varphi^2 < \mathrm{Cos}\,\varphi^2$$

ist; so ist die Grösse

$$\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi,$$

deren erster Theil stets positiv ist, immer positiv, was eben so natürlich auch von der Grösse

$$\mathrm{Cos}\frac{m}{n}\varphi \pm \mathrm{Sin}\frac{m}{n}\varphi$$

gilt, so dass also nach dem Obigen diese Grösse jederzeit den positiven Werth darstellt, welchen die Wurzel

$$\sqrt[n]{(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^m} \quad \text{oder} \quad (\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi)^{\frac{m}{n}}$$

immer hat.

Man wird in diesen Formeln sogleich die Analogie mit den entsprechenden Moivre'schen Formeln von den Kreisfunctionen erkennen.

§. 5.

Jetzt lässt sich schon zeigen, wie man sich der hyperbolischen Functionen zur Ausziehung der Wurzeln aller Grade bedienen kann. Zu dem Ende sei a eine beliebige positive von Null verschiedene Zahl. Da

$$(a-1)^2 \overline{\gt} 0,$$

also

$$a^2 - 2a + 1 \overline{\gt} 0$$

und folglich

$$a^2 + 1 \overline{\gt} 2a$$

ist, so ist

$$\frac{a^2+1}{2a} \overline{\gt} 1,$$

und man kann folglich

$$21) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{a^2+1}{2a}$$

setzen, wo φ positiv und negativ genommen werden kann. Nun ist aber, wie man sogleich übersieht:

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2=1;$$

also kann man, vermöge der Gleichung 4), und weil der hyperbolische Sinus jeden Werth von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann,

$$22) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{Sin}\varphi=\frac{a^2-1}{2a}$$

setzen, wo φ immer gleiches Vorzeichen mit dem Bruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens haben muss. Daher kann man φ immer so bestimmen, dass den beiden Gleichungen:

$$23) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{Cos}\varphi=\frac{a^2+1}{2a}, \quad \operatorname{Sin}\varphi=\frac{a^2-1}{2a}$$

zugleich genügt wird. Offenbar ist aber

$$a=\frac{a^2+1}{2a}+\frac{a^2-1}{2a},$$

also

$$a=\operatorname{Cos}\varphi+\operatorname{Sin}\varphi,$$

folglich, wenn wir immer nur die positiven Werthe der Wurzeln in's Auge fassen:

$$a^{\frac{m}{n}}=(\operatorname{Cos}\varphi+\operatorname{Sin}\varphi)^{\frac{m}{n}};$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a^{\frac{m}{n}}=\operatorname{Cos}\frac{m}{n}\varphi+\operatorname{Sin}\frac{m}{n}\varphi,$$

nach welchen Formeln sich also jede Wurzel durch hyperbolische Functionen berechnen lässt.

Zur Berechnung der Grösse φ hat man nach 23) auch die folgende Formel:

$$25) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{Tang}\varphi=\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{(a-1)(a+1)}{a^2+1}.$$

Nach 14) ist:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi^2=\frac{\operatorname{Cos}\varphi+1}{2}, \quad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi^2=\frac{\operatorname{Cos}\varphi-1}{2};$$

also nach 23):

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{(a+1)^2}{4a}, \quad \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{(a-1)^2}{4a}$$

und folglich:

$$26) \;.\;.\;.\;.\;.\; \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}, \quad \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a-1}{2\sqrt{a}};$$

denn dass man nicht

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi = -\frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

setzen darf, erhellet sowohl unmittelbar aus dem Obigen, als auch daraus, weil unter dieser Voraussetzung

$$2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi = -2.\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{a+1}{2\sqrt{a}} = -\frac{a^2-1}{2a},$$

also nach 23)

$$2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi$$

sein würde, da doch nach 7) bekanntlich

$$2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi$$

ist. Aus 26) folgt endlich noch die zur Berechnung von φ sehr bequeme Formel:

$$27) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a-1}{a+1}.$$

Da man mittelst der hyperbolischen Functionen Wurzeln aller Grade ausziehen kann, so kann man dieselben natürlich auch bei der Auflösung der quadratischen Gleichungen benutzen, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 6.

Der Auflösung der cubischen Gleichungen, welche wir uns auf die Form

$$x^3 + ax + b = 0$$

gebracht denken, was bekanntlich immer möglich ist, liegen die beiden aus der Theorie der Kreisfunctionen bekannten Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{3}\varphi^3 - \tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{1}{4}\cos\varphi = 0,$$

$$\sin\tfrac{1}{3}\varphi^3 - \tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{3}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin\varphi = 0$$

und die aus 13) bekannten Gleichungen zwischen den hyperbolischen Functionen:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi^3 - \tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{1}{4}\operatorname{Cos}\varphi = 0,$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi^3 + \tfrac{3}{4}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}\varphi = 0$$

zu Grunde. Indem wir aber diesen Gleichungen noch einen beliebigen Factor oder Divisor r beifügen, wollen wir sie unter den Formen:

$$\left(\frac{\cos\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 - \frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{3}\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{4r^3} = 0,$$

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 - \frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{3}\varphi}{r} + \frac{\sin\varphi}{4r^3} = 0$$

und

$$\left(\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 - \frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{r} - \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{4r^3} = 0,$$

$$\left(\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 + \frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\varphi}{r} - \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{4r^3} = 0$$

betrachten.

Wenn man die Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

mit der Gleichung

$$\left(\frac{\cos\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 - \frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{3}\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{4r^3} = 0$$

vergleicht, so erhält man die Gleichungen:

$$a = -\frac{3}{4r^2},\quad b = -\frac{\cos\varphi}{4r^3},\quad x = \frac{\cos\frac{1}{3}\varphi}{r};$$

also:

$$r = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{a}},\quad \cos\varphi = -4br^3.$$

Damit r reell sei, muss a negativ sein, und damit mittelst der zweiten Gleichung φ bestimmt werden kann, muss

$$16b^2r^6 \overline{\overline{<}}\, 1,\quad 16b^2\cdot\frac{1}{64}\left(-\frac{3}{a}\right)^3 \overline{\overline{<}}\, 1;$$

also:

$$-\frac{27b^2}{4a^3} \overline{\overline{<}}\, 1$$



sein. Ist nun ω der, der Gleichung $\cos\varphi = -4br^3$ genügende Werth von φ, welcher zwischen 0 und π liegt; so sind, weil

$$\cos\varphi = \cos(\varphi \mp 2\pi)$$

ist, überhaupt

$$\omega,\quad \omega - 2\pi,\quad \omega + 2\pi$$

drei der in Rede stehenden Gleichung genügende Werthe von φ, und es ist:

$$0 < \omega < +\pi,$$

$$-2\pi < \omega - 2\pi < -\pi,$$

$$+2\pi < \omega + 2\pi < +3\pi;$$

also:

$$0 < \frac{\omega}{3} < +\tfrac{1}{3}\pi,$$

$$-\tfrac{2}{3}\pi < \frac{\omega - 2\pi}{3} < -\tfrac{1}{3}\pi,$$

$$+\tfrac{2}{3}\pi < \frac{\omega + 2\pi}{3} < +\pi.$$

In Fig. I. sind daher die mit A, A_1, A_2 bezeichneten Intervalle diejenigen, in denen sich respective die Bogen

$$\frac{\omega}{3},\quad \frac{\omega - 2\pi}{3},\quad \frac{\omega + 2\pi}{3}$$

endigen, woraus auf der Stelle erhellet, dass im Allgemeinen

$$\cos\frac{\omega}{3},\quad \cos\frac{\omega - 2\pi}{3},\quad \cos\frac{\omega + 2\pi}{3}$$

sämmtlich unter einander ungleich sind; also sind

$$\frac{\cos\frac{1}{3}\omega}{r},\quad \frac{\cos\frac{1}{3}(\omega - 2\pi)}{r},\quad \frac{\cos\frac{1}{3}(\omega + 2\pi)}{r}$$

drei im Allgemeinen ungleiche reelle Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Diese Auflösung gilt also nach dem Obigen unter den folgenden Bedingungen:

$$a \text{ negativ},\quad -\frac{27b^2}{4a^3} \overset{=}{<} 1.$$



Wenn man ferner die Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

mit der Gleichung

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 - \frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{3}\varphi}{r} + \frac{\sin\varphi}{4r^3} = 0$$

vergleicht, so erhält man die Gleichungen:

$$a = -\frac{3}{4r^2},\quad b = \frac{\sin\varphi}{4r^3},\quad x = \frac{\sin\frac{1}{3}\varphi}{r};$$

also:

$$r = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{a}},\quad \sin\varphi = 4br^3.$$

Damit r reell sei, muss a negativ sein, und damit mittelst der zweiten Gleichung φ bestimmt werden kann, muss

$$16b^2r^6 \leqq 1,\quad 16b^2\cdot\frac{1}{64}\left(-\frac{3}{a}\right)^3 \leqq 1;$$

also

$$-\frac{27b^2}{4a^3} \leqq 1$$

sein. Ist nun ω der, der Gleichung $\sin\varphi = 4br^3$ genügende Werth von φ, welcher zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt; so sind, weil

$$\sin\varphi = \sin(\varphi \mp 2\pi)$$

ist, überhaupt

$$\omega,\quad \omega - 2\pi,\quad \omega + 2\pi$$

drei der in Rede stehenden Gleichung genügende Werthe von φ, und es ist:

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \omega < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$-\tfrac{5}{2}\pi < \omega - 2\pi < -\tfrac{3}{2}\pi,$$

$$+\tfrac{3}{2}\pi < \omega + 2\pi < +\tfrac{5}{2}\pi;$$

also:

$$-\tfrac{1}{6}\pi < \frac{\omega}{3} < +\tfrac{1}{6}\pi,$$

$$-\tfrac{5}{6}\pi < \frac{\omega - 2\pi}{3} < -\tfrac{3}{6}\pi;$$

$$+\tfrac{3}{6}\pi < \frac{\omega + 2\pi}{3} < +\tfrac{5}{6}\pi.$$



In Fig. 2. sind daher die mit A, A_1, A_2 bezeichneten Intervalle diejenigen, in denen sich respective die Bogen

$$\frac{\omega}{3},\quad \frac{\omega-2\pi}{3},\quad \frac{\omega+2\pi}{3}$$

endigen, woraus auf der Stelle erhellet, dass im Allgemeinen

$$\sin\frac{\omega}{3},\quad \sin\frac{\omega-2\pi}{3},\quad \sin\frac{\omega+2\pi}{3}$$

sämmtlich unter einander ungleich sind; also sind

$$\frac{\sin\frac{1}{3}\omega}{r},\quad \frac{\sin\frac{1}{3}(\omega-2\pi)}{r},\quad \frac{\sin\frac{1}{3}(\omega+2\pi)}{r}$$

drei im Allgemeinen ungleiche reelle Wurzeln der Gleichung

$$x^3+ax+b=0.$$

Diese Auflösung gilt also wiederum unter den folgenden Bedingungen:

$$a \text{ negativ},\quad -\frac{27b^2}{4a^3} \overset{=}{<} 1;$$

und wir haben daher jetzt für diesen Fall zwei Auflösungen.

Nur an den äussersten Gränzen der Intervalle können in gewissen ganz speciellen Fällen zwei der drei Wurzeln mit einander zusammenfallen; eine besondere Betrachtung dieser Fälle halten wir aber hier nicht für nöthig.

Vergleichen wir die Gleichung

$$x^3+ax+b=0$$

mit der Gleichung

$$\left(\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3-\frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{r}-\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{4r^3}=0;$$

so erhalten wir:

$$a=-\frac{3}{4r^2},\quad b=-\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{4r^3},\quad x=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{r};$$

also:

$$r=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{a}},\quad \operatorname{Cos}\varphi=-4br^3.$$

Damit r reell sei, muss a negativ sein; da bekanntlich $\operatorname{Cos}\varphi$



stets positiv und nicht kleiner als die Einheit ist, so muss man in der Formel

$$r = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-\frac{3}{a}}$$

das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem b negativ oder positiv ist. Es muss aber, wenn sich φ mittelst der zweiten Gleichung bestimmen lassen soll,

$$16b^2r^6 \stackrel{=}{>} 1, \quad 16b^2 . \frac{1}{64}(-\frac{3}{a})^3 \stackrel{=}{>} 1:$$

also

$$-\frac{27b^2}{4a^3} \stackrel{=}{>} 1$$

sein. Setzen wir unter diesen Voraussetzungen

$$u = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{3}\varphi}{r},$$

so ist

$$u^3 + au + b = 0$$

und folglich

$$x^3 + ax + b = x^3 - u^3 + a(x-u)$$
$$= (x-u)(x^2 + ux + u^2 + a),$$

woraus sich zur Bestimmung der beiden anderen Wurzeln der gegebenen Gleichung die Gleichung

$$x^2 + ux + u^2 + a = 0$$

ergiebt, durch deren Auflösung in Bezug auf x als unbekannte Grösse man

$$x = -\tfrac{1}{2}u \pm \sqrt{-(a + \tfrac{3}{4}u^2)}$$

erhält. Nun ist aber

$$a + \tfrac{3}{4}u^2 = -\frac{3}{4r^2}(1 - \operatorname{Cos} \tfrac{1}{3}\varphi^2),$$

folglich, weil

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{3}\varphi^2 - \operatorname{Sin} \tfrac{1}{3}\varphi^2 = 1$$

ist:

$$a + \tfrac{3}{4}u^2 = \frac{3}{4r^2} \operatorname{Sin} \tfrac{1}{3}\varphi^2,$$

und folglich



$$x = -\frac{\text{Cos}\,\frac{1}{3}\varphi}{2r} \pm \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi}{2r}\sqrt{-3}.$$

Bezeichnen wir also die drei Wurzeln unserer Gleichung durch u, v, w; so sind dieselben:

$$u = \frac{\text{Cos}\,\frac{1}{3}\varphi}{r},$$

$$v = -\frac{\text{Cos}\,\frac{1}{3}\varphi}{2r} + \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi}{2r}\sqrt{-3},$$

$$w = -\frac{\text{Cos}\,\frac{1}{3}\varphi}{2r} - \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi}{2r}\sqrt{-3}$$

oder:

$$u = \frac{1}{r}\text{Cos}\,\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$r = -\frac{1}{2r}(\text{Cos}\,\tfrac{1}{3}\varphi - \text{Sin}\,\tfrac{1}{3}\varphi\,\sqrt{-3}),$$

$$w = -\frac{1}{2r}(\text{Cos}\,\tfrac{1}{3}\varphi + \text{Sin}\,\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}).$$

Diese Auflösung gilt also nach dem Obigen unter den folgenden Bedingungen:

$$a \text{ negativ}, \quad -\frac{27b^2}{4a^3} \overline{\gtrless}\, 1.$$

Vergleichen wir die Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

mit der Gleichung

$$\left(\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 + \frac{3}{4r^2}\cdot\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi}{r} - \frac{\text{Sin}\,\varphi}{4r^3} = 0.$$

so erhalten wir:

$$a = \frac{3}{4r^2}, \quad b = -\frac{\text{Sin}\,\varphi}{4r^3}, \quad x = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{3}\varphi}{r};$$

also

$$r = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}, \quad \text{Sin}\,\varphi = -4br^3.$$

Damit r reell sei, muss a positiv sein; φ lässt sich aber immer bestimmen, weil Sin φ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann. Also gilt diese Auflösung immer, wenn a positiv ist.

Bezeichnen wir die auf diese Weise bestimmte reelle Wurzel durch u, und setzen also

$$u=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\varphi}{r},$$

so werden auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Falle die beiden anderen Wurzeln mittelst der Formel

$$x=-\tfrac{1}{2}u\pm\sqrt{-(a+\tfrac{3}{4}u^2)}$$

erhalten. Nun ist aber

$$a+\tfrac{3}{4}u^2=\frac{3}{4r^2}(1+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi^2),$$

also, weil

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi^2-\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi^2=1$$

ist:

$$a+\tfrac{3}{4}u^2=\frac{3}{4r^2}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi^2,$$

und folglich:

$$x=-\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\varphi}{2r}\pm\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{2r}\sqrt{-3}.$$

Bezeichnen wir also die drei Wurzeln unserer Gleichung durch u, v, w; so ist:

$$u=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\varphi}{r},$$

$$v=-\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\varphi}{2r}+\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{2r}\sqrt{-3},$$

$$w=-\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\varphi}{2r}-\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{3}\varphi}{2r}\sqrt{-3}$$

oder:

$$u=\frac{1}{r}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$v=-\frac{1}{2r}(\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}),$$

$$w=-\frac{1}{2r}(\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi+\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}).$$

Diese Auflösung gilt also nach dem Obigen allgemein unter der Bedingung:

a positiv.

Für die Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

haben wir nun hiernach vollständige Auflösungen für die folgenden Fälle gefunden:

I. . . . . a negativ, $-\frac{27b^2}{4a^3} \overset{=}{<} 1$;

II. . . . . a negativ, $-\frac{27b^2}{4a^3} \overset{=}{>} 1$;

III. . . . . a positiv.

Dass hiemit alle möglichen Fälle vollständig erschöpft sind, ist klar, und unsere cubische Gleichung ist daher jetzt allgemein aufgelöst.

Die Werthe von r in die im Vorhergehenden entwickelten Formeln wirklich einzuführen, halten wir nicht für nöthig, und sind selbst der Meinung, dass dadurch die Einfachheit nicht gewinnen würde. Auf jeden Fall scheint uns die obige Entwickelung der Natur der Sache am Meisten zu entsprechen, und das gegenseitige Verhältniss der cyclischen und hyperbolischen Functionen am Deutlichsten in's Licht zu setzen.

§. 7.

Wir wollen jetzt zeigen, wie die hyperbolischen Functionen mit der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel zusammenhängen. In Fig. 3. ist in gewöhnlicher Weise, was einer ausführlicheren Erläuterung hier nicht bedürfen wird, eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten dargestellt, deren beide Halbaxen wir durch a und b bezeichnen. Wir setzen:

$$CQ = u, \quad PQ = v \quad \text{und} \quad CQ' = x, \quad PQ' = y.$$

Verlängern wir PQ bis zur Asymptote in R' und ziehen durch P eine die Asymptote in R'' schneidende Parallele mit der Hauptaxe; so erhellet sehr leicht, dass in dem rechtwinkligen Dreiecke $R'PR''$ die Linien PQ', $Q'R'$, $Q'R''$ einander gleich sind, also

$$PQ' = Q'R' = Q'R'' = y$$

ist. Fällt man nun noch von R'' auf die Hauptaxe ein Perpendikel, so überzeugt man sich auf der Stelle von der Richtigkeit der beiden Proportionen:

$$a:\sqrt{a^2+b^2}=u:x+y,$$

$$b:\sqrt{a^2+b^2}=v:x-y;$$

aus denen

$$u=\frac{a(x+y)}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad v=\frac{b(x-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

und demnach

$$x+y=\frac{u}{a}\sqrt{a^2+b^2},\quad x-y=\frac{v}{b}\sqrt{a^2+b^2};$$

also

$$x=\tfrac{1}{2}\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)\sqrt{a^2+b^2},$$

$$y=\tfrac{1}{2}\left(\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

oder

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}.(bu+av),$$

$$y=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}.(bu-av)$$

folgt. Durch Multiplication ergiebt sich hieraus unmittelbar:

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4}\left\{\left(\frac{u}{a}\right)^2-\left(\frac{v}{b}\right)^2\right\},$$

folglich, weil nach der Natur der Hyperbel

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2-\left(\frac{v}{b}\right)^2=1$$

ist:

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Bezeichnen wir nun den Inhalt des Flächenstücks $AB'PQ'$ durch F, so ist, wenn α den Asymptoten-Winkel bedeutet, nach den Lehren der Integralrechnung:

$$F=\sin\alpha\int_{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}^{x} y\partial x,$$

folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$y=\frac{a^2+b^2}{4x}$$

ist:

$$F=\frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{4}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}^{x}\frac{\partial x}{x},$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$F=\frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{4}\,l\frac{2x}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Weil, wenn wir CP ziehen,

$$\Delta CPQ'=\tfrac{1}{2}xy\sin\alpha=\frac{a^2+b^2}{8}\sin\alpha,$$

$$\Delta CAB'=\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.\sin\alpha=\frac{a^2+b^2}{8}\sin\alpha;$$

also

$$\Delta CPQ'=\Delta CAB'$$

ist; so ist der hyperbolische Sector CAP, dessen Flächeninhalt wir von jetzt an durch S bezeichnen wollen, offenbar dem Flächenstücke $AB'PQ'$ gleich, und daher nach dem Vorhergehenden:

$$S=\frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{4}\,l\frac{2x}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

oder, weil nach dem Obigen

$$\frac{2x}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{u}{a}+\frac{v}{b}$$

ist:

$$S=\frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{4}\,l\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right).$$

Weil

$$\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)\left(\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)=\left(\frac{u}{a}\right)^2-\left(\frac{v}{b}\right)^2=1,$$

also

$$l\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)=-l\left(\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)$$

ist; so ist auch

$$S=-\frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{4}\,l\left(\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right).$$

Durch Addition der beiden vorstehenden Ausdrücke von S erhält man auch:

$$S = \frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{8} l \frac{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}}{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}$$

oder:

$$S = \frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{8} l \frac{bu+av}{bu-av}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist $a=b$, $\alpha=90^{\circ}$; also nach dem Obigen:

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}},\quad v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

und:

$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}},\quad y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}.$$

Ferner ist in diesem Falle:

$$S = \tfrac{1}{2}a^2 l \frac{u+v}{a} = -\tfrac{1}{2}a^2 l \frac{u-v}{a}$$

oder auch:

$$S = \tfrac{1}{4}a^2 l \frac{u+v}{u-v}.$$

Für $a=1$ ist:

$$S = \tfrac{1}{2}l(u+v) = -\tfrac{1}{2}l(u-v) = \tfrac{1}{4}l\frac{u+v}{u-v};$$

also:

$$2S = l(u+v) = -l(u-v),$$

und folglich:

$$\operatorname{Cos} 2S = \frac{e^{2S}+e^{-2S}}{2} = \frac{e^{l(u+v)}+e^{l(u-v)}}{2},$$

$$\operatorname{Sin} 2S = \frac{e^{2S}-e^{-2S}}{2} = \frac{e^{l(u+v)}-e^{l(u-v)}}{2};$$

woraus man, weil

$$e^{l(u+v)} = u+v,\quad e^{l(u-v)} = u-v$$

ist, sogleich

$$u = \operatorname{Cos} 2S,\quad v = \operatorname{Sin} 2S$$

erhält.



Weil nach dem Obigen

$$2S = \pm l(u \pm v)$$

ist, so ist:

$$2S = \pm l(\mathrm{Cos}\, 2S \pm \mathrm{Sin}\, 2S),$$

und folglich, wenn man S für $2S$ schreibt:

$$S = \pm l(\mathrm{Cos}\, S \pm \mathrm{Sin}\, S).$$

Nach 14) ist:

$$\mathrm{Cos}\, S = \sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\, 2S + 1}{2}}, \quad \mathrm{Sin}\, S = \sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\, 2S - 1}{2}};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\mathrm{Cos}\, S = \sqrt{\frac{u+1}{2}}, \quad \mathrm{Sin}\, S = \sqrt{\frac{u-1}{2}}.$$

Bezeichnet man in einen mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreise (Fig. 4.) den Inhalt des dem Bogen $\overline{AB}$ entsprechenden Sectors durch S; so ist bekanntlich:

$$S = \tfrac{1}{2}a^2.\overline{AB}, \quad 2S = a^2.\overline{AB};$$

und folglich für $a = 1$:

$$2S = \overline{AB}.$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten des Punktes B in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchem der positive Theil der ersten Axe von dem Mittelpunkte C aus durch den Punkt A gelegt ist, durch u, v; so ist bekanntlich

$$u = \cos \overline{AB}, \quad v = \sin \overline{AB};$$

also nach dem Obigen:

$$u = \cos 2S, \quad v = \sin 2S;$$

worin die Analogie mit den hyperbolischen Functionen unverkennbar ist.

§. 8.

Indem wir uns nun zu der Erläuterung der Tafeln wenden, welche man für die hyperbolischen Functionen construirt hat, bemerken wir zuerst die folgenden Transformationen.



Weil nach der Erklärung der hyperbolischen Functionen

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}, \quad \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

ist; so ist:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi = e^{\pm\varphi},$$

und folglich:

$$\pm\varphi = l(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi) \quad \text{oder} \quad \varphi = \pm l(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi).$$

Bekanntlich ist aber

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2 = 1,$$

und man kann also, weil

$$\sec\omega^2 - \mathrm{tang}\,\omega^2 = 1$$

ist, wenn man ω zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nimmt,

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \sec\omega, \quad \mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{tang}\,\omega;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\varphi = \pm l(\sec\omega \pm \mathrm{tang}\,\omega) = \pm l\frac{1\pm\sin\omega}{\cos\omega}$$

oder

$$\varphi = \pm l\frac{1\pm\cos(\frac{1}{2}\pi-\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\pi-\omega)}$$

setzen. Nun ist aber bekanntlich:

$$1+\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\omega) = 2\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\omega)^2,$$

$$1-\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\omega) = 2\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\omega)^2$$

und

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\omega) = 2\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\omega)\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\omega);$$

also:

$$\varphi = l\cot(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\omega) = -l\,\mathrm{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\omega)$$

oder:

$$\varphi = l\,\mathrm{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\omega) = -l\cot(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\omega).$$

Bemerken mag man auch noch die folgenden, aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$\mathrm{Tang}\,\varphi = \sin\omega, \quad \mathrm{Cot}\,\varphi = \mathrm{cosec}\,\omega, \quad \mathrm{Sec}\,\varphi = \cos\omega, \quad \mathrm{Cosec}\,\varphi = \cot\omega.$$

Aus der Vergleichung mit dem vorhergehenden Paragraphen



ergiebt sich, dass φ der zu dem Winkel ω gehörende Sector ist, natürlich in dem aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Sinne genommen.

Nach den hier entwickelten Formeln sind die neuen Tafeln der hyperbolischen Sinus und Cosinus construirt, durch deren Herausgabe sich Herr Gronau in Danzig verdient gemacht hat. Dieselben sind in dem vierten Hefte des sechsten Bandes der Neuesten Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig auch unter dem folgenden besonderen Titel erschienen:

Tafeln für die hyperbolischen Sectoren und für die Logarithmen ihrer Sinus und Cosinus. Von J. F. W. Gronau, Oberlehrer an der Realschule zu St. Johann in Danzig. Danzig. 1862. 4°.

und gehören zu der die Theorie der hyperbolischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades durch dieselben entwickelnden Schrift, welche in dem zweiten und dritten Hefte des sechsten Bandes der neuesten Schriften derselben hochverdienten gelehrten Gesellschaft unter dem folgenden besonderen Titel erschienen ist:

Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Functionen des Kreises und der Hyperbel. Von J. F. W. Gronau, Oberlehrer an der Realschule zu St. Johann in Danzig. Danzig. 1861. 4°.

Diese Tafeln wollen wir nun etwas näher erläutern, und dadurch zugleich der wohlverdienten Beachtung unserer Lehrer zu empfehlen suchen, wobei wir uns jedoch der im Obigen gebrauchten Bezeichnungen bedienen werden, was der Deutlichkeit keinen Eintrag thun wird.

Das Argument der Tafeln ist der Winkel ω, welcher von 0 bis 90° in den sechs ersten und sechs letzten Graden von 10 zu 10 Secunden, in den übrigen Graden von Minute zu Minute fortschreitet. Eine Tafel für negative Werthe von ω war natürlich unnöthig, weil bekanntlich $\mathrm{Cos}(-\varphi) = \mathrm{Cos}\,\varphi$, $\mathrm{Sin}(-\varphi) = -\mathrm{Sin}\,\varphi$ ist.

Für diese Argumente liefern nun die Tafeln in ihren drei Rubriken oder Colonnen, natürlich mit den entsprechenden Differenzen, die Werthe von

$$\varphi,\quad \log \mathrm{Cos}\,\varphi,\quad \log \mathrm{Sin}\,\varphi$$

nach den vorher entwickelten Formeln:

$$\varphi = l\,\mathrm{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\omega),\quad \log \mathrm{Cos}\,\varphi = \log \sec \omega,\quad \log \mathrm{Sin}\,\varphi = \log \mathrm{tang}\,\omega$$

wobei jedoch zu bemerken ist, dass in der ersten Formel an die Stelle der natürlichen Logarithmen l gewöhnliche Brigg'sche Logarithmen log gesetzt worden sind, die Tafeln also in der That die Werthe

$$\varphi = \log\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\omega)$$

enthalten, und demnach eigentlich die wirklichen φ erst erhalten werden, wenn man die φ der Tafeln sämmtlich durch den Modulus

$$M = 0{,}43429448$$

des Brigg'schen Systems dividirt, eine Einrichtung, welche einen wesentlichen Nachtheil nicht hat, weil, wie der Herr Herausgeber der Tafeln selbst richtig bemerkt, der Fehler, welchen man begeht, wenn man statt der natürlichen die Brigg'schen Logarithmen gebraucht, sich bei Weitem in den meisten Fällen der Anwendung hebt, indem er zweimal nach entgegengesetzter Seite hin gemacht wird; in den seltenen Fällen, wo dies nicht Statt findet, wird man natürlich die obige Division durch den Modulus nicht umgehen können. Einige specielle Einrichtungen der Tafeln müssen in diesen selbst nachgesehen werden, indem für den hiesigen Zweck das Obige vollständig hinreicht, um die an sich sehr einfache Einrichtung derselben im Allgemeinen zu charakterisiren, und zugleich zu zeigen, dass sie eigentlich unmittelbar aus gewöhnlichen Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln entnommen werden konnten.

Zur Erläuterung des Gebrauchs der Tafeln wollen wir ein Paar aus der Schrift des Herrn Gronau entlehnte, die Auflösung der cubischen Gleichungen betreffende Beispiele, nach den von uns im Obigen entwickelten Formeln, berechnen.

Es sei die cubische Gleichung

$$x^3 - 12x - 28 = 0$$

zu lösen. Vergleichen wir dieselbe mit der Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0,$$

so ist

$$a = -12, \quad b = -28$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$-\frac{27b^2}{4a^3} = \frac{21168}{6912}, \quad \text{also} \quad -\frac{27b^2}{4a^3} > 1.$$

Weil nun a negativ und auch b negativ ist, so sind nach §. 6. die Formeln zur Auflösung der Gleichung:

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{a}}, \quad \operatorname{Cos}\varphi = -4br^3$$

und:

$$u = \frac{1}{r}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$v = -\frac{1}{2r}(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi - \operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}),$$

$$w = -\frac{1}{2r}(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi + \operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-3})$$

oder:

$$u = \frac{1}{r}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$v = -\frac{1}{2r}(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi - \operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3}.\sqrt{-1}),$$

$$w = -\frac{1}{2r}(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi + \operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3}.\sqrt{-1}).$$

Leicht ergiebt sich nun:

$$r = \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{Cos}\varphi = 1{,}75000, \quad \log\operatorname{Cos}\varphi = 0{,}24304.$$

Schlägt man diesen letzteren Logarithmus in den Tafeln des Herrn Gronau auf und nimmt den entsprechenden Werth von φ aus der Tafel, so findet man:

$$\varphi = \frac{0{,}50326}{M}, \quad \tfrac{1}{3}\varphi = \frac{0{,}16775}{M}$$

und folglich, indem man wiederum mit M multipliciren muss, um auf die Zahlen der Tafel zu kommen:

$$\tfrac{1}{3}\varphi = 0{,}16775$$

woraus man sieht, dass die Division mit M in diesem Falle ganz unnöthig war, was durch das Vorhergehende erläutert werden sollte. Geht man nun mit diesem Werthe von $\frac{1}{3}\varphi$ in die Tafel ein, so erhält man mittelst derselben unmittelbar:

$$\log\operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi = 0{,}03162, \quad \log\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi = 0{,}59762 - 1.$$

Weil nun

$$\log\sqrt{3} = 0{,}23856$$

ist, so ist

$$\log.\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3} = 0{,}83618 - 1$$

und folglich:

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{3}\varphi = 1{,}07552$$

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3} = 0{,}68577$$

also:

$$u = \quad 4{,}30208,$$

$$v = -2{,}15104 + 1{,}37154 . \sqrt{-1},$$

$$w = -2{,}15104 - 1{,}37154 . \sqrt{-1};$$

wo man aber wegen der Einrichtung der Tafeln nur vier Decimalen wird beibehalten dürfen.

Die gegebene Gleichung sei

$$x^3 + 3x - 76 = 0,$$

also, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

vergleicht,

$$a = 3, \quad b = -76.$$

Weil a positiv ist, so sind nach §. 6 die Formeln zur Auflösung der Gleichung:

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}, \quad \operatorname{Sin}\varphi = -4br^3$$

wo man in §. 6. in der allgemeinen Formel für r das obere Zeichen genommen hat, damit $\operatorname{Sin}\varphi$ positiv werde, weil b negativ ist; ferner:

$$u = \quad \frac{1}{r}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$v = -\frac{1}{2r}(\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3} . \sqrt{-1}),$$

$$w = -\frac{1}{2r}(\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\varphi + \operatorname{Cos}\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3} . \sqrt{-1}).$$

Man findet leicht:

$$r = \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{Sin}\varphi = \frac{304}{8} = 38,$$

also:

$$\log \operatorname{Sin}\varphi = 1{,}57978.$$

Geht man hiemit in die hyperbolischen Tafeln ein, so findet man

mittelst einiger Interpolation, die Division mit dem Modulus unterlassend:

$$\varphi = 1{,}88089, \quad \tfrac{1}{3}\varphi = 0{,}62696;$$

und geht man ferner mit diesem Werthe von $\frac{1}{3}\varphi$ in die hyperbolische Tafel ein, so findet sich wiederum mittelst einiger Interpolation:

$$\log \mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{3}\varphi = 0{,}34948, \quad \log \mathrm{Sin}\, \varphi = 0{,}30102;$$

woraus sich leicht:

$$\mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{3}\varphi = \sqrt{5}, \quad \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{3}\varphi = 2$$

ergiebt. Also sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$u = \quad 4,$$
$$v = -2 + \sqrt{15}.\sqrt{-1},$$
$$w = -2 - \sqrt{15}.\sqrt{-1}$$

oder:

$$u = \quad 4,$$
$$v = -2 + \sqrt{-15},$$
$$w = -2 - \sqrt{-15}.$$

Diese Beispiele scheinen mir hinreichend zur Erläuterung des Gebrauchs der neuen hyperbolischen Tafeln des Herrn Gronau, und ich glaube, nachdem ich mich mit denselben sorgfältig und genau bekannt gemacht habe, sie nochmals zur Beachtung und zu sorgfältigem Gebrauch empfehlen zu können, indem ich zugleich der so vielfach und so erfolgreich thätigen naturforschenden Gesellschaft in Danzig für deren Publication in ihren Schriften meinen und gewiss vieler Leser des Archivs besonderen Dank sage. Dabei aber möchte ich dennoch wünschen, dass eine besondere Ausgabe der Tafeln in recht bequemem Format veranstaltet würde, wo dann vielleicht noch einige die Bequemlichkeit des Gebrauchs erhöhende neue Einrichtungen, und einige Abänderungen der jetzt bestehenden, angebracht werden könnten. Auch wären, glaube ich, wenigstens sechs Decimalstellen wünschenswerth, was die Tafeln zugleich mit den trefflichen sechsstelligen Logarithmen-Tafeln von Bremiker in gute Uebereinstimmung bringen würde.

III.

Note über die Integration einiger linearer Differentialgleichungen der Form

$$y^{(n)} = Ax^m y'' + Bx^{m-1} y' + Cx^{m-2} y. \tag{1}$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Schon zu wiederholten Malen führten mich meine Untersuchungen auf Gleichungen der Form (1). Ich habe die ersten Anfänge dieser Untersuchungen im 29sten und 33sten Bande dieses Archivs veröffentlicht, und weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand in meinem Werke: „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" mitgetheilt. Ich erlaube mir hier wieder einiges über die Integration specieller Fälle der Gleichung (1) mitzutheilen.

Die drei Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} y'' = x(Ax^2 y'' + Bxy' + Cy), \\ y' = x^2(Ax^2 y'' + Bxy' + Cy), \\ y = x^2(Ax^2 y'' + Bxy' + Cy); \end{cases}$$

welche specielle Fälle der Gleichung (1) sind, gehen, wenn man in selbe für x eine neue Variable ξ mittelst der Substitution

$$x^3 = \xi$$

einführt, über in:

$$6\frac{dy}{d\xi}+9\xi\frac{d^2y}{d\xi^2}=6A\xi\frac{dy}{d\xi}+9A\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+3B\xi\frac{dy}{d\xi}+Cy,$$

$$3\frac{dy}{d\xi}=6A\xi\frac{dy}{d\xi}+9A\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+3B\xi\frac{dy}{d\xi}+Cy,$$

$$y=6A\xi^2\frac{dy}{d\xi}+9A\xi^3\frac{d^2y}{d\xi^2}+3B\xi^2\frac{dy}{d\xi}+C\xi y;$$

und diese Gleichungen haben geordnet folgende Gestalt:

$$9(A\xi^2-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+3(2A\xi+B\xi-2)\frac{dy}{d\xi}+Cy=0,$$

$$9A\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+3(2A\xi+B\xi-1)\frac{dy}{d\xi}+Cy=0,$$

$$9A\xi^3\frac{d^2y}{d\xi^2}+3(2A+B)\xi^2\frac{dy}{d\xi}+(C\xi-1)y=0;$$

und sind nun, wie man sieht, sämmtlich specielle Fälle folgender einen Gleichung:

$$\xi^2(a_2+b_2\xi^n)\frac{d^2y}{d\xi^2}+\xi(a_1+b_1\xi^n)\frac{dy}{d\xi}+(a_0+b_0\xi^n)y=0,$$

deren Integration in allen Fällen gelingt. (Ich erlaube mir, bezüglich dieser Gleichung auf den dritten Abschnitt meiner früher erwähnten „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" zu verweisen.)

Aber nicht immer ist es nothwendig, gerade diesen Weg einzuschlagen, da man oftmals auf andere Weise einfacher zum Integrale gelangt. Bevor ich diess an einem Beispiele zeige, nehme ich die Gleichung:

$$(3)\quad \frac{d^3y}{dx^3}=3mx^2\frac{d^2y}{dx^2}+6m(\mu+2)x\frac{dy}{dx}+3m(\mu+2)(\mu+1)y$$

vor, zu welcher ich im 33sten Bande dieses Archivs S. 119 kam, und welcher, wenn μ eine ganz positive Zahl ist, genügt wird durch:

$$(4)$$

$$y=\frac{d^\mu}{dx^\mu}[Ce^{mx^3}+e^{mx^3}\int e^{-mx^3}(C_0+C_1x+C_2x^2+\dots+C_{\mu+1}x^{\mu+1})dx].$$

Da, wie leicht einzusehen,

$$\int e^{-mx^3}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{\mu+1} x^{\mu+1}) dx$$
$$= \int e^{-mx^3}(K_0 + K_1 x) dx + e^{-mx^3}(K_2 + K_3 x + \ldots + K_{\mu+1} x^{\mu-1})$$

ist, so gestattet die Gleichung (4) auch folgende Schreibweise:

$$y = \frac{d^\mu}{dx^\mu}[Ce^{mx^3} + e^{mx^3}\int e^{-mx^3}(K_0 + K_1 x) dx + K_2 + K_3 x + \ldots + K_{\mu+1} x^{\mu-1}]$$

oder kürzer:

$$(5) \qquad y = \frac{d^\mu}{dx^\mu}[L_1 e^{mx^3} + e^{mx^3}\int e^{-mx^3}(L_2 + L_3 x)\, dx]$$

und diess ist das vollständige Integral der Gleichung (3); L_1, L_2, L_3 bedeuten willkührliche Constanten der Integration.

Ich will nun folgende Differentialgleichung:

$$(6)$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x[3mx^3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6m(\mu+2)x \frac{dy}{dx} + 3m(\mu+2)(\mu+1)y],$$

in welcher μ ebenfalls eine ganze pofititive Zahl vorstellt, zu integriren versuchen.

Die Gleichung (6) gestattet folgende Schreibweise:

$$(7) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{d^{\mu+2}}{dx^{\mu+2}}[3mx^3 \frac{d^{-\mu} y}{dx^{-\mu}}]$$

(siehe 33. Band S. 119. des Archivs), und da

$$x \frac{d^\lambda \varphi(x)}{dx^\lambda} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}[x\varphi(x)] - \lambda \frac{d^{\lambda-1}\varphi(x)}{dx^{\lambda-1}}$$

ist, so kann man die Gleichung (7) auch so schreiben:

$$(8)$$
$$\frac{d^{\mu+1}}{dx^{\mu+1}}\left[\frac{d^{1-\mu} y}{dx^{1-\mu}}\right] = \frac{d^{\mu+1}}{dx^{\mu+1}}[3mx^3 \frac{d^{1-\mu} y}{dx^{1-\mu}} + 3m(1-\mu)x^2 \frac{d^{-\mu} y}{dx^{-\mu}}].$$

Ihr genügt man nun, wenn man y so wählt, auf dass:

$$\frac{d^{1-\mu} y}{dx^{1-\mu}} = 3mx^3 \frac{d^{1-\mu} y}{dx^{1-\mu}} + 3m(1-\mu)x^2 \frac{d^{-\mu} y}{dx^{-\mu}} + C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_\mu x^\mu$$

wird, und diese Gleichung hat, geordnet, folgende Gestalt:

$$(1 - 3mx^3)\frac{d^{1-\mu} y}{dx^{1-\mu}} + 3m(\mu-1)x^2 \frac{d^{-\mu} y}{dx^{-\mu}} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_\mu x^\mu.$$

Dividirt man diese Gleichung durch

$$(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}},$$

so erhält man:

$$(1-3mx^3)^{\frac{1-\mu}{3}}\frac{d^{1-\mu}y}{dx^{1-\mu}}+3m(\mu-1)x^2(1-3mx^3)^{-\frac{\mu+2}{3}}\frac{d^{-\mu}y}{dx^{-\mu}}$$
$$=\frac{C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots.+C_\mu x^\mu}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{d}{dx}[(1-3mx^3)^{\frac{1-\mu}{3}}\frac{d^{-\mu}y}{dx^{-\mu}}]=\frac{C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots.+C_\mu x^\mu}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}},$$

und hieraus folgt:

$$(1-3mx^3)^{\frac{1-\mu}{3}}\frac{d^{-\mu}y}{dx^{-\mu}}=\int\frac{C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots.+C_\mu x^\mu}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}}dx.$$

Bearbeitet man den zweiten Theil dieser Gleichung wiederholt mittelst der Formel:

$$\int\frac{x^\lambda dx}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}}$$
$$=\frac{x^{\lambda-2}}{3m(3\mu+5-\lambda)(1-3mx^3)^{\frac{\mu-1}{3}}}-\frac{\lambda-2}{3m(3\mu+5-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-3}dx}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}},$$

so kommt man zu folgender Gleichung:

$$(1-3mx^3)^{\frac{1-\mu}{3}}\frac{d^{-\mu}y}{dx^{-\mu}}=\int\frac{K_0+K_1x}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}}dx+\frac{K_2+K_3x+\ldots.+K_\mu x^{\mu-2}}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu-1}{3}}},$$

woraus folgt:

$$\frac{d^{-\mu}y}{dx^{-\mu}}=(1-3mx^3)^{\frac{\mu-1}{3}}\int\frac{K_0+K_1x}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}}dx+K_2+K_3x+\ldots.+K_\mu x^{\mu-2},$$

und hieraus folgt endlich:

$$y=\frac{d^\mu}{dx^\mu}[(1-3mx^3)^{\frac{\mu-1}{3}}\int\frac{K_0+K_1x}{(1-3mx^3)^{\frac{\mu+2}{3}}}dx]$$

als Integral der Gleichung (6).



IV.

Geometrische Aufgaben, welche zur Anwendung in der nautischen Geodäsie geeignet sind.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Geodätische Aufnahmen, welche zu nautischen Zwecken und unter den dabei jederzeit obwaltenden Verhältnissen, worüber wir das Weitere hier natürlich als bekannt voraussetzen, unternommen und ausgeführt werden, sind sehr durch die Instrumente beschränkt, die dabei in Anwendung gebracht werden können; diese Instrumente können kaum andere sein als die Boussole und der Spiegelsextant oder solche, die auf ganz ähnlichen Principien beruhen wie diese beiden, indem wir diese letzteren hier nur als Repräsentanten aller ähnlichen Instrumente betrachten und als solche nur nennen *). Daher können in der nautischen Geodäsie auch nur solche geometrische Aufgaben Anwendung finden, welche die möglichst leichte Anwendung der beiden genannten Instrumente zulassen. Vorzugsweise, ja nicht selten einzig und allein, hat man deshalb zum Gebrauche bei nautischen geodätischen Aufnahmen das gewöhnlich nach **Pothenot** benannte Problem in Vorschlag gebracht **), welches aber bekanntlich eigentlich die

---

*) M. s. z. B. Practical Geodesy. By J. Butler Williams. The third edition. London 1855. Chapter XI. On maritime surveying; und Traité de Géodésie à l'usage des marins. Par P. Begat. Paris 1839, so wie andere Werke.

) In dem mehrfach wichtigen Werke: Méthodes pour la levée et la construction des cartes hydrographiques, publiées en 1808, sous le titre d'Appendice à la Relation du Voyage du Contre-Amiral Bruny-Dentrecasteaux; par C. F. Beautemps-Beaupré. Et réimprimées par ordre de son Excell. le Comte Decrés, Vice-Amiral, Ministre de la Marine et des Colonies. Paris. 1811. 4°. ist eigentlich nur die Anwendung der **Pothenot'schen Aufgabe gelehrt, und nur in geometrischer Weise durch Construction.

Aufgabe des Snellius genannt werden sollte, und gewiss ist nicht zu leugnen, dass dieses Problem für solche Zwecke von ganz vorzüglichem Werthe ist. Nach meiner Meinung giebt es aber noch andere geometrische Aufgaben, welche in der nautischen Geodäsie in manchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden können, weshalb ich es nicht für unangemessen halte, diese Aufgaben *) im Interesse der Nautik in der vorliegenden Abhandlung zusammenzustellen und grösstentheils auf neue Art aufzulösen, wobei ich mich immer der ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legenden analytischen Methode bedienen werde, welche ja bei allen praktischen geodätischen Arbeiten immer mehr Eingang findet, und gewiss auch mit verhältnissmässiger Leichtigkeit der Anwendung besondere Genauigkeit in den Resultaten zu erlangen gestattet. Uebrigens erlaube ich mir noch die Bemerkung, dass diese Abhandlung neben dem vorher besprochenen praktischen Zwecke, so sehr ich demselben auch Beachtung wünsche, noch den theoretischen Zweck hat, für die im Folgenden vorkommenden geometrischen Probleme neue, möglichst elegante und völlig allgemeine Auflösungen zu geben.

---

§. 1.

Zuerst werde ich für die Messungen mit der Boussole und allen ähnlichen Instrumenten, welche sämmtlich die, die Messungen mit ihnen besonders bedingende Eigenthümlichkeit haben, dass sie die Uebertragung einer Geraden, nämlich der Axe der Magnetnadel, parallel mit sich selbst, von einem Orte auf einen anderen gestatten, und dass mit ihnen die Abweichungen dieser Geraden und anderer auf dem Terrain gegebener Geraden von einander beobachtet und gemessen werden können, gewisse ganz allgemein gültige Grundformeln entwickeln, auf denen die Auflösung aller Aufgaben, welche die Anwendung der Boussole in Anspruch nehmen, bei der von mir hier befolgten Darstellungsweise beruhet.

Zu dem Ende legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xy zu Grunde, und nehmen, bei willkührlicher Annahme des positiven Theils der Axe der x, den positiven Theil der Axe der y jederzeit so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach einer

---

*) Natürlich sind diese Aufgaben auch für die Geodäsie überhaupt wichtig und von Nutzen.



Richtung bewegen muss, welche der Richtung entgegengesetzt ist, nach welcher auf dem Limbus der Boussole die Grade von 0 bis 360° gezählt sind.

Unter dem Collimationsfehler oder dem Indexfehler der Boussole verstehe ich den concaven Winkel, welchen die Projection der Visirlinie des Fernrohrs, unter welcher letzteren immer die von dem Mittelpunkte des Fernrohrs nach dem Mittelpunkte des Objectivs gezogene Gerade zu verstehen ist, auf der Ebene des Limbus mit dem nach dem Nullpunkte der Theilung gezogenen Halbmesser des Limbus einschliesst, indem zugleich dieser Winkel als positiv oder negativ betrachtet wird, jenachdem man sich, um von dem Nullpunkte der Theilung an den diesen Winkel messenden Bogen zu durchlaufen, in demselben Sinne, in welchem auf dem Limbus die Grade von 0 bis 360° gezählt sind, oder im entgegengesetzten Sinne bewegen muss; mit Rücksicht hierauf werden wir im Folgenden den Collimationsfehler oder den Indexfehler durch i bezeichnen.

Wenn man nun an irgend einer Nadelspitze eine Ablesung gemacht hat, die wir durch α bezeichnen und wegen der Excentricität der Boussole gehörig corrigirt voraussetzen wollen, wozu in einem anderen Aufsatze ganz bestimmte und allgemein gültige Regeln von uns entwickelt worden sind; so ist der Winkel, welchen die Projection der Visirlinie des Fernrohrs auf der Ebene des Limbus mit dem nach der abgelesenen Nadelspitze gezogenen Halbmesser des Limbus einschliesst, indem dieser Winkel, oder vielmehr der denselben messende Bogen, von der abgelesenen Nadelspitze an in demselben Sinne, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, also der Richtung entgegengesetzt, nach welcher auf dem Limbus die Grade gezählt sind, von 0 bis 360° zählt, offenbar in völliger Allgemeinheit $\alpha - i$ oder $(\alpha - i) \pm 360^0$, wo der erste Ausdruck gilt, wenn $\alpha - i$ positiv und nicht grösser als 360° ist, dagegen der zweite Ausdruck mit dem oberen oder dem unteren Zeichen genommen werden muss, jenachdem $\alpha - i$ negativ, oder positiv und grösser als 360° ist. Bezeichnen wir also den in Rede stehenden Winkel durch α', so ist immer

$$\alpha' = \alpha - i \quad \text{oder} \quad \alpha' = (\alpha - i) \pm 360^0,$$

wo für diese Ausdrücke natürlich ganz die vorstehenden Regeln gelten.

Denken wir uns jetzt die Boussole in dem Anfangspunkte der Coordinaten aufgestellt und die Visirlinie des Fernrohrs genau in



die Richtung des positiven Theils der Axe der x gebracht, und nun an einer Nadelspitze eine Ablesung gemacht, welche wir durch ω bezeichnen, und wegen der Excentricität der Boussole gehörig corrigirt voraussetzen wollen; so ist der von dem positiven Theile der Axe der x mit dem nach der abgelesenen Nadelspitze gezogenen Halbmesser des Limbus eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel oder vielmehr den denselben messenden Bogen von der abgelesenen Nadelspitze an in demselben Sinne, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, also der Richtung entgegen gesetzt, nach welcher auf dem Limbus die Grade gezählt sind, von 0 bis 360° zählt, ganz eben so wie vorher in völliger Allgemeinheit $\omega-i$ oder $(\omega-i)\pm 360^0$, wo der erste Ausdruck gilt, wenn $\omega-i$ positiv und nicht grösser als 360° ist, dagegen der zweite Ausdruck mit dem oberen oder unteren Zeichen genommen werden muss, jenachdem $\omega-i$ negativ, oder positiv und grösser als 360° ist. Bezeichnen wir also den in Rede stehenden Winkel durch ω', so ist immer $\omega'=\omega-i$ oder $\omega'=(\omega-i)\pm 360^0$, wo für diese Ausdrücke natürlich ganz die vorstehenden Regeln gelten.

Wir setzen von jetzt an voraus, dass alle Ablesungen an derselben Nadelspitze gemacht seien, und nehmen an, dass man bei irgend einer Aufstellung der Boussole die wegen der Excentricität stets gehörig corrigirte Ablesung α gemacht habe. Bezeichnen wir nun in einem solchen Falle durch A den Winkel, welchen die Projection der Visirlinie des Fernrohrs auf der Ebene des Limbus mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach derselben Richtung hin, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, von 0 bis 360° zählen; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$A=\alpha'-\omega' \quad \text{oder} \quad A=(\alpha'-\omega')+360^0,$$

jenachdem $\alpha'-\omega'$ positiv oder negativ ist. In beiden Fällen ist:

$$\cos A=\cos(\alpha'-\omega'), \quad \sin A=\sin(\alpha'-\omega').$$

Nach dem Obigen ist aber bekanntlich:

$$\alpha'=\alpha-i \quad \text{oder} \quad \alpha'=(\alpha-i)\pm 360^0$$

und

$$\omega'=\omega-i \quad \text{oder} \quad \omega'=(\omega-i)\pm 360^0,$$

wo natürlich eine Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander nicht Statt findet; also, wie man auch diese Ausdrücke unter einander verbinden mag,

$$\alpha' - \omega' = (\alpha - i) - (\omega - i) + k.360^0,$$

wo k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, welche offenbar nur die Werthe 0, ± 1, ± 2 haben kann; folglich unter derselben Voraussetzung wegen des k:

$$\alpha' - \omega' = (\alpha - \omega) + k.360^0,$$

und daher:

$$\cos(\alpha' - \omega') = \cos(\alpha - \omega)\cos(k.360^0) - \sin(\alpha - \omega)\sin(k.360^0),$$

$$\sin(\alpha' - \omega') = \sin(\alpha - \omega)\cos(k.360^0) + \cos(\alpha - \omega)\sin(k.360^0);$$

folglich, weil allgemein $\cos k.360^0 = 1$, $\sin k.360^0 = 0$ ist:

$$\cos(\alpha' - \omega') = \cos(\alpha - \omega), \quad \sin(\alpha' - \omega') = \sin(\alpha - \omega);$$

also nach dem Obigen in völliger Allgemeinheit:

$$1) \ldots \cos A = \cos(\alpha - \omega), \quad \sin A = \sin(\alpha - \omega).$$

Es seien jetzt A_m und A_n zwei beliebige Punkte, deren Coordinaten wir respective durch x_m, y_m und x_n, y_n bezeichnen wollen. Die Entfernung $\overline{A_m A_n}$ oder $\overline{A_n A_m}$ dieser beiden Punkte von einander wollen wir durch r_{mn} oder r_{nm} bezeichnen, jenachdem diese Entfernung als von A_m nach A_n, oder als von A_n nach A_m hin gerichtet betrachtet wird, wo aber natürlich immer

$$r_{mn} = r_{nm}$$

ist. Hat man nun die Boussole in A_m aufgestellt, das Fernrohr nach A_n gerichtet und an der Nadelspitze die Ablesung gemacht, so soll diese Ablesung durch α_{mn} bezeichnet werden; wurde dagegen die Boussole in A_n aufgestellt, das Fernrohr nach A_m gerichtet und dieselbe Nadelspitze abgelesen, so soll diese Ablesung durch α_{nm} bezeichnet werden. Wird nun der von $\overline{A_m A_n}$ oder r_{mn}, nämlich von der von A_m nach A_n hin gehenden Geraden, mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene, immer in demselben Sinne, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, von 0 bis 360^0 gezählte Winkel durch A_{mn}, und auf ähnliche Art der von $\overline{A_n A_m}$ oder r_{nm}, nämlich von der von A_n nach A_m hin gehenden Geraden, mit dem positiven Theile der

Axe der x eingeschlossene, in gleichem Sinne wie vorher von 0 bis 360° gezählten Winkel durch A_{nm} bezeichnet; so ist bekanntlich nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit:

$$x_n = x_m + r_{mn}.\cos A_{mn},\quad y_n = y_m + r_{mn}.\sin A_{mn}$$

und

$$x_m = x_n + r_{nm}.\cos A_{nm},\quad y_m = y_n + r_{nm}.\sin A_{nm};$$

nach 1) ist aber in völliger Allgemeinheit:

$$\cos A_{mn} = \cos(\alpha_{mn} - \omega),\quad \sin A_{mn} = \sin(\alpha_{mn} - \omega)$$

und

$$\cos A_{nm} = \cos(\alpha_{nm} - \omega),\quad \sin A_{nm} = \sin(\alpha_{nm} - \omega);$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$2)\ \ldots\ldots \begin{cases} x_n = x_m + r_{mn}.\cos(\alpha_{mn} - \omega), \\ y_n = y_m + r_{mn}.\sin(\alpha_{mn} - \omega) \end{cases}$$

und

$$3)\ \ldots\ldots \begin{cases} x_m = x_n + r_{nm}.\cos(\alpha_{nm} - \omega), \\ y_m = y_n + r_{nm}.\sin(\alpha_{nm} - \omega). \end{cases}$$

Umgekehrt ist nach diesen Gleichungen:

$$4)\ \ldots\ldots \begin{cases} x_m = x_n - r_{mn}.\cos(\alpha_{mn} - \omega), \\ y_m = y_n - r_{mn}.\sin(\alpha_{mn} - \omega) \end{cases}$$

und

$$5)\ \ldots\ldots \begin{cases} x_n = x_m - r_{nm}.\cos(\alpha_{nm} - \omega), \\ y_n = y_m - r_{nm}.\sin(\alpha_{nm} - \omega). \end{cases}$$

Durch Addition ergiebt sich aus den vorstehenden Gleichungen:

$$r_{mn}.\cos(\alpha_{mn} - \omega) + r_{nm}.\cos(\alpha_{nm} - \omega) = 0,$$

$$r_{mn}.\sin(\alpha_{mn} - \omega) + r_{nm}.\sin(\alpha_{nm} - \omega) = 0;$$

also, weil $r_{mn} = r_{nm}$ ist:

$$6)\ \ldots \begin{cases} \cos(\alpha_{mn} - \omega) + \cos(\alpha_{nm} - \omega) = 0, \\ \sin(\alpha_{mn} - \omega) + \sin(\alpha_{nm} - \omega) = 0; \end{cases}$$

also:

$$7)\ \ldots \begin{cases} \cos(\alpha_{nm} - \omega) = -\cos(\alpha_{mn} - \omega), \\ \sin(\alpha_{nm} - \omega) = -\sin(\alpha_{mn} - \omega); \end{cases}$$

woraus auch



$$8) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \tang(\alpha_{mn}-\omega)=\tang(\alpha_{nm}-\omega), \\ \cot(\alpha_{mn}-\omega) \;=\; \cot(\alpha_{nm}-\omega) \end{array} \right.$$

folgt.

Die hier mit aller Strenge und Allgemeinheit entwickelten Formeln sind als Grundformeln für die Lösung aller Aufgaben, bei denen die Boussole in Anwendung kommt, zu betrachten.

§. 2.

Erste Aufgabe.

Es seien A_0 und A_1 zwei Punkte, deren Coordinaten a_0, b_0 und a_1, b_1 gegeben sind; ein dritter Punkt sei M, dessen Coordinaten wir durch x, y und dessen Entfernungen von den Punkten A_0 und A_1 wir respective durch r_0 und r_1 bezeichnen. Um die Lage dieses dritten Punktes M, also die Coordinaten x, y und die Entfernungen r_0 und r_1 zu bestimmen, stellen wir die Boussole in M auf, bringen die Visirlinie des Fernrohrs nach einander in die Richtungen der Geraden MA_0 und MA_1, und lesen in beiden Fällen den Stand α_0 und α_1 der vorher immer betrachteten Spitze der Magnetnadel ab. Dann haben wir nach §. 1. 2) die folgenden Gleichungen:

$$a_0 = x + r_0 \cos(\alpha_0 - \omega), \quad a_1 = x + r_1 \cos(\alpha_1 - \omega),$$
$$b_0 = y + r_1 \sin(\alpha_0 - \omega); \quad b_1 = y + r_1 \sin(\alpha_1 - \omega);$$

wo wir den Winkel ω als bekannt annehmen, wozu wir nach §. 1. offenbar berechtigt sind, indem sich derselbe immer auf die dort angegebene Weise bestimmen lässt. Die vorstehenden Gleichungen lassen sich auch auf folgende Art darstellen:

$$1) \left\{ \begin{array}{ll} x = a_0 - r_0 \cos(\alpha_0 - \omega), & x = a_1 - r_1 \cos(\alpha_1 - \omega), \\ y = b_0 - r_0 \sin(\alpha_0 - \omega); & y = b_1 - r_1 \sin(\alpha_1 - \omega); \end{array} \right.$$

und führen durch Subtraction auf der Stelle zu den beiden folgenden Gleichungen:

$$a_0 - a_1 = r_0 \cos(\alpha_0 - \omega) - r_1 \cos(\alpha_1 - \omega),$$
$$b_0 - b_1 = r_0 \sin(\alpha_0 - \omega) - r_1 \sin(\alpha_1 - \omega);$$

aus denen r_0 und r_1 leicht bestimmt werden können. Man erhält nämlich sogleich:

$$2)\quad \begin{cases} r_0 = \dfrac{(a_0-a_1)\sin(\alpha_1-\omega)-(b_0-b_1)\cos(\alpha_1-\omega)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}, \\[2ex] r_1 = \dfrac{(a_0-a_1)\sin(\alpha_0-\omega)-(b_0-b_1)\cos(\alpha_0-\omega)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}; \end{cases}$$

und nachdem man mittelst dieser Formeln r_0 und r_1 berechnet hat, können auch x, y mittelst der Formeln 1) leicht gefunden werden. Indess erhält man aus 1) auch sogleich die Gleichungen:

$$x\sin(\alpha_0-\omega)-y\cos(\alpha_0-\omega)=a_0\sin(\alpha_0-\omega)-b_0\cos(\alpha_0-\omega),$$
$$x\sin(\alpha_1-\omega)-y\cos(\alpha_1-\omega)=a_1\sin(\alpha_1-\omega)-b_1\cos(\alpha_1-\omega);$$

also:

$$x\sin(\alpha_0-\alpha_1)=\{a_0\sin(\alpha_0-\omega)-b_0\cos(\alpha_0-\omega)\}\cos(\alpha_1-\omega)$$
$$-\{a_1\sin(\alpha_1-\omega)-b_1\cos(\alpha_1-\omega)\}\cos(\alpha_0-\omega),$$
$$y\sin(\alpha_0-\alpha_1)=\{a_0\sin(\alpha_0-\omega)-b_0\cos(\alpha_0-\omega)\}\sin(\alpha_1-\omega)$$
$$-\{a_1\sin(\alpha_1-\omega)-b_1\cos(\alpha_1-\omega)\}\sin(\alpha_0-\omega);$$

folglich, wenn wir der Kürze wegen:

$$3)\ \ldots\ \begin{cases} G_0=a_0\sin(\alpha_0-\omega)-b_0\cos(\alpha_0-\omega), \\ G_1=a_1\sin(\alpha_1-\omega)-b_1\cos(\alpha_1-\omega) \end{cases}$$

setzen:

$$4)\ \ldots\ \begin{cases} x=\dfrac{G_0\cos(\alpha_1-\omega)-G_1\cos(\alpha_0-\omega)}{\sin(\alpha_0-\alpha_1)}, \\[2ex] y=\dfrac{G_0\sin(\alpha_1-\omega)-G_1\sin(\alpha_0-\omega)}{\sin(\alpha_0-\alpha_1)}. \end{cases}$$

Alle diese Formeln liefern das Gesuchte ohne alle Zweideutigkeit und gestatten im Ganzen auch eine leichte Rechnung.

Wir wollen diese Aufgabe durch ein Beispiel erläutern. Gegeben seien die folgenden Grössen:

$$a_0=-36^0.7'=-367' \qquad a_1=+18^0.3'=+183'$$
$$b_0=-42\ .3\ =-423 \qquad b_1=-25\ .2\ =-252$$
$$\alpha_0=\ 316^0.14' \qquad \alpha_1=\ 27^0.32'$$
$$\omega=36^0.12'.$$

Also ist:

$a_0=-367$	$b_0=-423$	$\alpha_1=\ \ 27^0.32'$
$a_1=+183$	$b_1=-252$	$\alpha_0=\ \ 316\ .14$
$a_0-a_1=-550$	$b_0-b_1=-171$	$\alpha_1-\alpha_0=-288\ .42$



$$\alpha_0 = 316^\circ.14' \qquad \alpha_1 = 27^\circ.32'$$
$$\omega = 36\ .12 \qquad \omega = 36\ .12$$
$$\alpha_0 - \omega = 280\ .\ 2 \qquad \alpha_1 - \omega = -8\ .40$$

$$\log(a_0 - a_1) = 2{,}740363_n$$
$$\log\sin(\alpha_1 - \omega) = 9{,}178072_n$$
$$1{,}918435 \qquad \text{num.} = +\ 82{,}88$$

$$\log(b_0 - b_1) = 2{,}232996_n$$
$$\log\cos(\alpha_1 - \omega) = 9{,}995013$$
$$2{,}228009_n \qquad \text{num.} = -\ 169{,}05$$

$$\log(a_0 - a_1) = 2{,}740363_n$$
$$\log\sin(\alpha_0 - \omega) = 9{,}993307_n$$
$$2{,}733670 \qquad \text{num.} = +\ 541{,}59$$

$$\log(b_0 - b_1) = 2{,}232996_n$$
$$\log\cos(\alpha_0 - \omega) = 9{,}240982$$
$$1{,}473978_n \qquad \text{num.} = -\ 29{,}78$$

$$+\ 82{,}88 \qquad +541{,}59$$
$$-\ 169{,}05 \qquad -\ 29{,}78$$
$$+\ 251{,}93 \qquad 571{,}37$$

$$\log 251{,}93 = 2{,}401280$$
$$\log\sin(\alpha_1 - \alpha_0) = 9{,}976446$$
$$\log r_0 = 2{,}424834 \qquad r_0 = 265{,}97$$

$$\log 571{,}37 = 2{,}756917$$
$$\log\sin(\alpha_1 - \alpha_0) = 9{,}976446$$
$$\log r_1 = 2{,}780471 \qquad r_1 = 603.21$$

$$\log r_0 = 2{,}424834$$
$$\log\cos(\alpha_0 - \omega) = 9{,}240982$$
$$1{,}665816 \qquad \text{num.} = +\ 46{,}33$$

$$\log r_0 = 2{,}424834$$
$$\log\sin(\alpha_0 - \omega) = 9{,}993307_n$$
$$2{,}418141_n \qquad \text{num.} = -261{,}90$$

$$\log r_1 = 2{,}780471$$
$$\log\cos(\alpha_1 - \omega) = 9{,}995013$$
$$2{,}775484 \qquad \text{num.} = +\ 596{,}33$$

$$\log r_1 = 2{,}780471$$
$$\log\sin(\alpha_1 - \omega) = 9{,}178072_n$$
$$1{,}958543_n \qquad \text{num.} = -\ 90{,}90$$

Also ist:

$$a_0 = -367,00 \qquad a_1 = +183,00$$
$$r_0 \cos(\alpha_0 - \omega) = +\ \ 46,33 \qquad r_1 \cos(\alpha_1 - \omega) = +596,33$$
$$x = -413,33 \qquad x = -413,33$$

$$b_0 = -423,00 \qquad b_1 = -252,00$$
$$r_0 \sin(\alpha_0 - \omega) = -261,90 \qquad r_1 \sin(\alpha_1 - \omega) = -\ \ 90,90$$
$$y = -161,10 \qquad y = -161,10$$

und man erhält also aus beiden Rechnungen ganz übereinstimmend:

$$x = -413',33 = -41^0.3',33$$
$$y = -161,10 = -16\ .1,10.$$

Von diesem Falle liefert Fig. 1., welche mit einem Maassstabe, bei dem 25 Ruthen auf den preussischen Decimalzoll gerechnet worden sind, entworfen worden ist, eine genaue Zeichnung. Man wird durch Nachmessung an derselben alle vorher durch Rechnung gewonnenen Resultate vollkommen bestätigt finden, so weit dies bei einer solchen Figur möglich ist und erwartet werden kann.

§. 3.

Zweite Aufgabe.

Man kann in gewisser Rücksicht die vorhergehende Aufgabe auch umkehren. Die bekannten Coordinaten der Punkte A_0 und A_1 seien wiederum a_0, b_0 und a_1, b_1, und M sei ein dritter Punkt, dessen unbekannte Coordinaten wir durch x, y, und dessen gleichfalls unbekannte Entfernungen von den Punkten A_0 und A_1 wir respective durch r_0 und r_1 bezeichnen. Um nun die Lage des Punktes M zu bestimmen, stelle man die Boussole in A_0 und A_1 auf, bringe die Visirlinie des Fernrohrs in die Richtungen der Geraden A_0M und A_1M, und lese die entsprechenden Stände α_0 und α_1 der Nadelspitze ab. Dann haben wir nach §. 1. 2) die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x = a_0 + r_0 \cos(\alpha_0 - \omega), & x = a_1 + r_1 \cos(\alpha_1 - \omega), \\ y = b_0 + r_0 \sin(\alpha_0 - \omega); & y = b_1 + r_1 \sin(\alpha_1 - \omega); \end{cases}$$

also durch Subtraction:

$$a_0 - a_1 = r_1 \cos(\alpha_1 - \omega) - r_0 \cos(\alpha_0 - \omega),$$
$$b_0 - b_1 = r_1 \sin(\alpha_1 - \omega) - r_0 \sin(\alpha_0 - \omega);$$

und hieraus:

$$2)\quad \begin{cases} r_0 = \dfrac{(a_0 - a_1)\sin(\alpha_1 - \omega) - (b_0 - b_1)\cos(\alpha_1 - \omega)}{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)}, \\[2ex] r_1 = \dfrac{(a_0 - a_1)\sin(\alpha_0 - \omega) - (b_0 - b_1)\cos(\alpha_0 - \omega)}{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) folgt auch:

$$x\sin(\alpha_0 - \omega) - y\cos(\alpha_0 - \omega) = a_0\sin(\alpha_0 - \omega) - b_0\cos(\alpha_0 - \omega),$$

$$x\sin(\alpha_1 - \omega) - y\cos(\alpha_1 - \omega) = a_1\sin(\alpha_1 - \omega) - b_1\cos(\alpha_1 - \omega);$$

also, wenn man

$$3)\ldots\ldots \begin{cases} G_0 = a_0\sin(\alpha_0 - \omega) - b_0\cos(\alpha_0 - \omega), \\ G_1 = a_1\sin(\alpha_1 - \omega) - b_1\cos(\alpha_1 - \omega) \end{cases}$$

setzt, ganz wie im vorhergehenden Paragraphen:

$$4)\ldots\ldots \begin{cases} x = \dfrac{G_0\cos(\alpha_1 - \omega) - G_1\cos(\alpha_0 - \omega)}{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)}, \\[2ex] y = \dfrac{G_0\sin(\alpha_1 - \omega) - G_1\sin(\alpha_0 - \omega)}{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)}. \end{cases}$$

§. 4.

Dritte Aufgabe.

In den beiden vorhergehenden Aufgaben haben wir den Winkel ω als bekannt angenommen; fügt man aber den zwei dort betrachteten Punkten A_0, A_1 noch einen dritten Punkt A_2 hinzu, so kann man die Kenntniss dieses Winkels entbehren. Wenn nämlich A_0, A_1, A_2 drei Punkte sind, deren Coordinaten a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2 als bekannt betrachtet werden können, und M ein Punkt ist, dessen unbekannte Coordinaten wir durch x, y, und dessen gleichfalls unbekannte Entfernungen von den Punkten A_0, A_1, A_2 wir respective durch r_0, r_1, r_2 bezeichnen; so stellen wir, um die Lage dieses Punktes zu bestimmen, die Boussole in M auf, visiren nach A_0, A_1, A_2, und machen die entsprechenden Ablesungen α_0, α_1, α_2; dann haben wir nach §. 1. 2) die folgenden Gleichungen:

$$a_0 = x + r_0\cos(\alpha_0 - \omega), \quad b_0 = y + r_0\sin(\alpha_0 - \omega);$$

$$a_1 = x + r_1\cos(\alpha_1 - \omega), \quad b_1 = y + r_1\sin(\alpha_1 - \omega);$$

$$a_2 = x + r_2\cos(\alpha_2 - \omega), \quad b_2 = y + r_2\sin(\alpha_2 - \omega)$$



oder:

$$1)\ .\ .\ \begin{cases} x=a_0-r_0\cos(\alpha_0-\omega), & y=b_0-r_0\sin(\alpha_0-\omega),\\ x=a_1-r_1\cos(\alpha_1-\omega), & y=b_1-r_1\sin(\alpha_1-\omega),\\ x=a_2-r_2\cos(\alpha_2-\omega), & y=b_2-r_2\sin(\alpha_2-\omega); \end{cases}$$

woraus durch Elimination von r_0, r_1, r_2 folgt:

$$a_0\sin(\alpha_0-\omega)-b_0\cos(\alpha_0-\omega)=x\sin(\alpha_0-\omega)-y\cos(\alpha_0-\omega),$$
$$a_1\sin(\alpha_1-\omega)-b_1\cos(\alpha_1-\omega)=x\sin(\alpha_1-\omega)-y\cos(\alpha_1-\omega),$$
$$a_2\sin(\alpha_2-\omega)-b_2\cos(\alpha_2-\omega)=x\sin(\alpha_2-\omega)-y\cos(\alpha_2-\omega).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit:

$$\sin(\alpha_1-\omega)\cos(\alpha_2-\omega)-\cos(\alpha_1-\omega)\sin(\alpha_2-\omega)=\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$\sin(\alpha_2-\omega)\cos(\alpha_0-\omega)-\cos(\alpha_2-\omega)\sin(\alpha_0-\omega)=\sin(\alpha_2-\alpha_0),$$
$$\sin(\alpha_0-\omega)\cos(\alpha_1-\omega)-\cos(\alpha_0-\omega)\sin(\alpha_1-\omega)=\sin(\alpha_0-\alpha_1),$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \{a_0\sin(\alpha_0-\omega)-b_0\cos(\alpha_0-\omega)\}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\ +\{a_1\sin(\alpha_1-\omega)-b_1\cos(\alpha_1-\omega)\}\sin(\alpha_2-\alpha_0)\\ +\{a_2\sin(\alpha_2-\omega)-b_2\cos(\alpha_2-\omega)\}\sin(\alpha_0-\alpha_1) \end{array}\right\}=0,$$

woraus, wenn wir der Kürze wegen

2)

$$\begin{aligned} A= &\ (a_0\sin\alpha_0-b_0\cos\alpha_0)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\ &+(a_1\sin\alpha_1-b_1\cos\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_0)\\ &+(a_2\sin\alpha_2-b_2\cos\alpha_2)\sin(\alpha_0-\alpha_1),\\ B= &\ (a_0\cos\alpha_0-b_0\sin\alpha_0)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\ &+(a_1\cos\alpha_1-b_1\sin\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_0)\\ &+(a_2\cos\alpha_2-b_2\sin\alpha_2)\sin(\alpha_0-\alpha_1) \end{aligned}$$

setzen, sogleich

$$A\cos\omega-B\sin\omega=0,$$

also

$$3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \tang\omega=\frac{A}{B}$$

erhalten wird.

Nach den Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind, hat man nun ferner die folgenden Gleichungen:

$$a_0-a_1=r_0\cos(\alpha_0-\omega)-r_1\cos(\alpha_1-\omega),\quad b_0-b_1=r_0\sin(\alpha_0-\omega)-r_1\sin(\alpha_1-\omega);$$

$$a_1-a_2=r_1\cos(\alpha_1-\omega)-r_2\cos(\alpha_2-\omega),\quad b_1-b_2=r_1\sin(\alpha_1-\omega)-r_2\sin(\alpha_2-\omega);$$

$$a_2-a_0=r_2\cos(\alpha_2-\omega)-r_0\cos(\alpha_0-\omega),\quad b_2-b_0=r_2\sin(\alpha_2-\omega)-r_0\sin(\alpha_0-\omega);$$

also:

$$(a_0-a_1)\sin(\alpha_1-\omega)-(b_0-b_1)\cos(\alpha_1-\omega)=r_0\sin(\alpha_1-\alpha_0),$$
$$(a_0-a_1)\sin(\alpha_0-\omega)-(b_0-b_1)\cos(\alpha_0-\omega)=r_1\sin(\alpha_1-\alpha_0);$$

$$(a_1-a_2)\sin(\alpha_2-\omega)-(b_1-b_2)\cos(\alpha_2-\omega)=r_1\sin(\alpha_2-\alpha_1),$$
$$(a_1-a_2)\sin(\alpha_1-\omega)-(b_1-b_2)\cos(\alpha_1-\omega)=r_2\sin(\alpha_2-\alpha_1);$$

$$(a_2-a_0)\sin(\alpha_0-\omega)-(b_2-b_0)\cos(\alpha_0-\omega)=r_2\sin(\alpha_0-\alpha_2),$$
$$(a_2-a_0)\sin(\alpha_2-\omega)-(b_2-b_0)\cos(\alpha_2-\omega)=r_0\sin(\alpha_0-\alpha_2);$$

woraus sich zur Berechnung von r_0, r_1, r_2 die folgenden Formeln ergeben:

4)

$$r_0=\frac{(a_0-a_1)\sin(\alpha_1-\omega)-(b_0-b_1)\cos(\alpha_1-\omega)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}$$
$$=\frac{(a_2-a_0)\sin(\alpha_2-\omega)-(b_2-b_0)\cos(\alpha_2-\omega)}{\sin(\alpha_0-\alpha_2)},$$

$$r_1=\frac{(a_1-a_2)\sin(\alpha_2-\omega)-(b_1-b_2)\cos(\alpha_2-\omega)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}$$
$$=\frac{(a_0-a_1)\sin(\alpha_0-\omega)-(b_0-b_1)\cos(\alpha_0-\omega)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)},$$

$$r_2=\frac{(a_2-a_0)\sin(\alpha_0-\omega)-(b_2-b_0)\cos(\alpha_0-\omega)}{\sin(\alpha_0-\alpha_2)}$$
$$=\frac{(a_1-a_2)\sin(\alpha_1-\omega)-(b_1-b_2)\cos(\alpha_1-\omega)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Die Formel 3) liefert für das zwischen 0 und 360° liegende ω zwei um 180° verschiedene Werthe; da aber diese Werthe, wie sogleich erhellet, für r_0, r_1, r_2 zwei Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern, die Entfernungen r_0, r_1, r_2 aber ihrer Natur nach nur positiv sein können, so kann nie ein Zweifel bleiben, wie man den Winkel ω zu nehmen hat.



Nachdem man auf diese Weise ω und r_0, r_1, r_2 ohne alle Zweideutigkeit bestimmt hat, findet man die Coordinaten x, y mittelst der Formeln 1).

Anmerkung. Das hier aufgelöste Problem ist das Pothenot'sche. Die Auflösung ist aber hier so gegeben, dass bei derselben mit der Boussole angestellte Messungen, nämlich blosse Ablesungen an der Nadel der in dem zu bestimmenden Punkte M aufgestellten Boussole bei successive nach den drei gegebenen Punkten A_0, A_1, A_2 gerichtetem Fernrohr zu Grunde gelegt worden sind, und daher die Auflösung auch ganz auf die in §. 1. für alle Messungen mit der Boussole entwickelten Fundamentalformeln gegründet worden ist. In anderer Weise werden wir auf das Pothenot'sche Problem, wie es gewöhnlich aufgefasst wird, in §. 7. zurückkommen.

§. 5.

Vierte Aufgabe.

Wenn man die Boussole nach und nach in den Punkten A_0, A_1, A_2 aufgestellt, bei jeder Aufstellung nach M visirt und die entsprechenden Ablesungen α_0, α_1, α_2 gemacht hat; so hat man unter Beibehaltung der übrigen in dem vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnungen nach §. 1. 2) die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x=a_0+r_0\cos(\alpha_0-\omega), & y=b_0+r_0\sin(\alpha_0-\omega); \\ x=a_1+r_1\cos(\alpha_1-\omega), & y=b_1+r_1\sin(\alpha_1-\omega); \\ x=a_2+r_2\cos(\alpha_2-\omega), & y=b_2+r_1\sin(\alpha_2-\omega); \end{cases}$$

also:

$$\begin{aligned} a_0\sin(\alpha_0-\omega)-b_0\cos(\alpha_0-\omega)&=x\sin(\alpha_0-\omega)-y\cos(\alpha_0-\omega),\\ a_1\sin(\alpha_1-\omega)-b_1\cos(\alpha_1-\omega)&=x\sin(\alpha_1-\omega)-y\cos(\alpha_1-\omega),\\ a_2\sin(\alpha_2-\omega)-b_2\cos(\alpha_2-\omega)&=x\sin(\alpha_2-\omega)-y\cos(\alpha_2-\omega); \end{aligned}$$

woraus man für

$$2)\quad \begin{aligned} A=\;&(a_0\sin\alpha_0-b_0\cos\alpha_0)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\ &+(a_1\sin\alpha_1-b_1\cos\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_0)\\ &+(a_2\sin\alpha_2-b_2\cos\alpha_2)\sin(\alpha_0-\alpha_1),\\ B=\;&(a_0\cos\alpha_0-b_0\sin\alpha_0)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\ &+(a_1\cos\alpha_1-b_1\sin\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_0)\\ &+(a_2\cos\alpha_2-b_2\sin\alpha_2)\sin(\alpha_0-\alpha_1) \end{aligned}$$

ganz eben so wie im vorhergehenden Paragraphen findet:

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tan g\, \omega = \frac{A}{B}.$$

Ferner erhält man:

$$a_1-a_0=r_0\cos(\alpha_0-\omega)-r_1\cos(\alpha_1-\omega),\quad b_1-b_0=r_0\sin(\alpha_0-\omega)-r_1\sin(\alpha_1-\omega);$$

$$a_2-a_1=r_1\cos(\alpha_1-\omega)-r_2\cos(\alpha_2-\omega),\quad b_2-b_1=r_1\sin(\alpha_1-\omega)-r_2\sin(\alpha_2-\omega);$$

$$a_0-a_2=r_2\cos(\alpha_2-\omega)-r_0\cos(\alpha_0-\omega),\quad b_0-b_2=r_2\sin(\alpha_2-\omega)-r_0\sin(\alpha_0-\omega);$$

also ganz eben so wie im vorhergehenden Paragraphen:

4)

$$r_0=\frac{(a_1-a_0)\sin(\alpha_1-\omega)-(b_1-b_0)\cos(\alpha_1-\omega)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}$$

$$=\frac{(a_0-a_2)\sin(\alpha_2-\omega)-(b_0-b_2)\cos(\alpha_2-\omega)}{\sin(\alpha_0-\alpha_2)},$$

$$r_1=\frac{(a_2-a_1)\sin(\alpha_2-\omega)-(b_2-b_1)\cos(\alpha_2-\omega)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}$$

$$=\frac{(a_1-a_0)\sin(\alpha_0-\omega)-(b_1-b_0)\cos(\alpha_0-\omega)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)},$$

$$r_2=\frac{(a_0-a_2)\sin(\alpha_0-\omega)-(b_0-b_2)\cos(\alpha_0-\omega)}{\sin(\alpha_0-\alpha_2)}$$

$$=\frac{(a_2-a_1)\sin(\alpha_1-\omega)-(b_2-b_1)\cos(\alpha_1-\omega)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Den zwischen 0 und 360° liegenden Winkel ω muss man wiederum so nehmen, dass r_0, r_1, r_2 positiv ausfallen; und hat man auf diese Weise ω und r_0, r_1, r_2 bestimmt, so findet man die Coordinaten x, y mittelst der Gleichungen 1).

§. 6.

Fünfte Aufgabe.

Man habe zwei Systeme dreier Punkte A_0, A_1, A_2 und A_0', A_1', A_2'. Wir wollen nun setzen, dass man die Boussole in A_0 aufgestellt, nach A_0', A_1', A_2' visirt und an der Nadel die respectiven Ablesungen α_{00}, α_{01}, α_{02} gemacht habe; ferner habe man die Boussole in A_1 aufgestellt, nach A_0', A_1', A_2' visirt und an der Nadel die respectiven Ablesungen α_{10}, α_{11}, α_{12} gemacht; endlich habe man die Boussole in A_2 aufgestellt, nach A_0', A_1', A_2'

visirt und an der Nadel die respectiven Ablesungen α_{20}, α_{21}, α_{22} gemacht. Wie sich nun aus diesen Messungen die relative Lage der sechs Punkte A_0, A_1, A_2 und A_0', A_1', A_2' bestimmen lässt, soll jetzt gezeigt werden.

Zu dem Ende wollen wir in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem die Coordinaten der Punkte

A_0, A_1, A_2 respective durch $x_0, y_0;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2;$

und die Coordinaten der Punkte

A_0', A_1', A_2' respective durch $x_0', y_0';\ x_1', y_1';\ x_2', y_2'$

bezeichnen; ferner sollen die Entfernungen

$$\overline{A_0A_0'},\ \overline{A_0A_1'},\ \overline{A_0A_2'};\ \overline{A_1A_0'},\ \overline{A_1A_1'},\ \overline{A_1A_2'};\ \overline{A_2A_0'},\ \overline{A_2A_1'},\ \overline{A_2A_2'}$$

beziehungsweise durch

$$r_{00},\ r_{01},\ r_{02};\ r_{10},\ r_{11},\ r_{12};\ r_{20},\ r_{21},\ r_{22}$$

bezeichnet werden.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir, wenn ω seine frühere Bedeutung auch hier behält, nach §. 1. 2) die folgenden Gleichungen:

1)

$$x_0'=x_0+r_{00}.\cos(\alpha_{00}-\omega),\quad y_0'=y_0+r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\omega);$$
$$x_1'=x_0+r_{01}.\cos(\alpha_{01}-\omega),\quad y_1'=y_0+r_{01}.\sin(\alpha_{01}-\omega);$$
$$x_2'=x_0+r_{02}.\cos(\alpha_{02}-\omega),\quad y_2'=y_0+r_{02}.\sin(\alpha_{02}-\omega);$$

$$x_0'=x_1+r_{10}.\cos(\alpha_{10}-\omega),\quad y_0'=y_1+r_{10}.\sin(\alpha_{10}-\omega);$$
$$x_1'=x_1+r_{11}.\cos(\alpha_{11}-\omega),\quad y_1'=y_1+r_{11}.\sin(\alpha_{11}-\omega);$$
$$x_2'=x_1+r_{12}.\cos(\alpha_{12}-\omega),\quad y_2'=y_1+r_{12}.\sin(\alpha_{12}-\omega);$$

$$x_0'=x_2+r_{20}.\cos(\alpha_{20}-\omega),\quad y_0'=y_2+r_{20}.\sin(\alpha_{20}-\omega);$$
$$x_1'=x_2+r_{21}.\cos(\alpha_{21}-\omega),\quad y_1'=y_2+r_{21}.\sin(\alpha_{21}-\omega);$$
$$x_2'=x_2+r_{22}.\cos(\alpha_{22}-\omega),\quad y_2'=y_2+r_{22}.\sin(\alpha_{22}-\omega).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} x_1-x_0 &= r_{00}.\cos(\alpha_{00}-\omega)-r_{10}.\cos(\alpha_{10}-\omega)\\ &= r_{01}.\cos(\alpha_{01}-\omega)-r_{11}.\cos(\alpha_{11}-\omega)\\ &= r_{02}.\cos(\alpha_{02}-\omega)-r_{12}.\cos(\alpha_{12}-\omega), \end{aligned}$$

$$y_1-y_0=r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\omega)-r_{10}.\sin(\alpha_{10}-\omega)$$
$$=r_{01}.\sin(\alpha_{01}-\omega)-r_{11}.\sin(\alpha_{11}-\omega)$$
$$=r_{02}.\sin(\alpha_{02}-\omega)-r_{12}.\sin(\alpha_{12}-\omega)$$

und

$$x_2-x_0=r_{00}.\cos(\alpha_{00}-\omega)-r_{20}.\cos(\alpha_{20}-\omega)$$
$$=r_{01}.\cos(\alpha_{01}-\omega)-r_{21}.\cos(\alpha_{21}-\omega)$$
$$=r_{02}.\cos(\alpha_{02}-\omega)-r_{22}.\cos(\alpha_{22}-\omega),$$

$$y_2-y_0=r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\omega)-r_{20}.\sin(\alpha_{20}-\omega)$$
$$=r_{01}.\sin(\alpha_{01}-\omega)-r_{21}.\sin(\alpha_{21}-\omega)$$
$$=r_{02}.\sin(\alpha_{02}-\omega)-r_{22}.\sin(\alpha_{22}-\omega).$$

Also hat man die Gleichungen:

$$r_{00}.\cos(\alpha_{00}-\omega)-r_{10}.\cos(\alpha_{10}-\omega)=r_{01}.\cos(\alpha_{01}-\omega)-r_{11}.\cos(\alpha_{11}-\omega),$$
$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\omega)-r_{10}.\sin(\alpha_{10}-\omega)=r_{01}.\sin(\alpha_{01}-\omega)-r_{11}.\sin(\alpha_{11}-\omega);$$

woraus sich auf der Stelle die Gleichung

$$2)\quad r_{00}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{00})-r_{10}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{10})=r_{01}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})$$

ergiebt.

Ferner hat man die Gleichungen:

$$r_{00}.\cos(\alpha_{00}-\omega)-r_{10}.\cos(\alpha_{10}-\omega)$$
$$=r_{02}.\cos(\alpha_{02}-\omega)-r_{12}.\cos(\alpha_{12}-\omega),$$
$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\omega)-r_{10}.\sin(\alpha_{10}-\omega)$$
$$=r_{02}.\sin(\alpha_{02}-\omega)-r_{12}.\sin(\alpha_{12}-\omega);$$

woraus sich die Gleichung

$$3)\quad r_{00}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{00})-r_{10}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{10})=r_{02}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})$$

ergiebt.

Auf ähnliche Art hat man die Gleichungen:

$$r_{00}.\cos(\alpha_{00}-\omega)-r_{20}.\cos(\alpha_{20}-\omega)=r_{01}.\cos(\alpha_{01}-\omega)-r_{21}.\cos(\alpha_{21}-\omega),$$
$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\omega)-r_{20}.\sin(\alpha_{20}-\omega)=r_{01}.\sin(\alpha_{01}-\omega)-r_{21}.\sin(\alpha_{21}-\omega);$$

woraus sich die Gleichung

4)

$$r_{00}.\sin(\alpha_{21}-\alpha_{00})-r_{20}.\sin(\alpha_{21}-\alpha_{20})=r_{01}.\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})$$

ergiebt.

Endlich hat man die Gleichungen:

$$r_{00}.\cos(\alpha_{00}-\omega)-r_{20}.\cos(\alpha_{20}-\omega)=r_{02}.\cos(\alpha_{02}-\omega)-r_{22}.\cos(\alpha_{22}-\omega),$$

$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\omega)-r_{20}.\sin(\alpha_{20}-\omega)=r_{02}.\sin(\alpha_{02}-\omega)-r_{22}.\sin(\alpha_{22}-\omega);$$

woraus sich die Gleichung

5)

$$r_{00}.\sin(\alpha_{22}-\alpha_{00})-r_{20}.\sin(\alpha_{22}-\alpha_{20})=r_{02}.\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})$$

ergiebt.

Aus den Gleichungen 2), 4) und 3), 5) ergiebt sich durch Division:

$$\frac{r_{00}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{00})-r_{10}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{10})}{r_{00}.\sin(\alpha_{21}-\alpha_{00})-r_{20}.\sin(\alpha_{21}-\alpha_{20})}=\frac{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})}{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})},$$

$$\frac{r_{00}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{00})-r_{10}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{10})}{r_{00}.\sin(\alpha_{22}-\alpha_{00})-r_{20}.\sin(\alpha_{22}-\alpha_{20})}=\frac{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})}{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})}$$

oder:

$$\frac{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{00})-\frac{r_{10}}{r_{00}}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{00})-\frac{r_{20}}{r_{00}}.\sin(\alpha_{21}-\alpha_{20})}=\frac{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})}{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})},$$

$$\frac{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{00})-\frac{r_{10}}{r_{00}}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{00})-\frac{r_{20}}{r_{00}}\cdot\sin(\alpha_{22}-\alpha_{20})}=\frac{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})}{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})};$$

woraus man die beiden Gleichungen:

$$\frac{r_{10}}{r_{00}}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{10})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})-\frac{r_{20}}{r_{00}}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{20})$$
$$=\sin(\alpha_{11}-\alpha_{00})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})-\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{00}),$$

$$\frac{r_{10}}{r_{00}}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{10})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})-\frac{r_{20}}{r_{00}}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{20})$$
$$=\sin(\alpha_{12}-\alpha_{00})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})-\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{00})$$

erhält.

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
2\{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{00})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01}) &- \sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{00})\} \\
= \quad & \cos(\alpha_{11}-\alpha_{00}-\alpha_{21}+\alpha_{01}) \\
& -\cos(\alpha_{11}-\alpha_{00}+\alpha_{21}-\alpha_{01}) \\
& -\cos(\alpha_{11}-\alpha_{01}-\alpha_{21}+\alpha_{00}) \\
& +\cos(\alpha_{11}-\alpha_{01}+\alpha_{21}-\alpha_{00}) \\
= \cos(\alpha_{11}-\alpha_{00}-\alpha_{21}+\alpha_{01}) &- \cos(\alpha_{11}-\alpha_{01}-\alpha_{21}+\alpha_{00}) \\
= 2\sin(\alpha_{00}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{11}-\alpha_{21}) &
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
2\{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{00})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02}) &- \sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{00})\} \\
= \quad & \cos(\alpha_{12}-\alpha_{00}-\alpha_{22}+\alpha_{02}) \\
& -\cos(\alpha_{12}-\alpha_{00}+\alpha_{22}-\alpha_{02}) \\
& -\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02}-\alpha_{22}+\alpha_{00}) \\
& +\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02}+\alpha_{22}-\alpha_{00}) \\
= \cos(\alpha_{12}-\alpha_{00}-\alpha_{22}+\alpha_{02}) &- \cos(\alpha_{12}-\alpha_{02}-\alpha_{22}+\alpha_{00}) \\
= 2\sin(\alpha_{00}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{12}-\alpha_{22}); &
\end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{r_{10}}{r_{00}}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{10})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01}) - \frac{r_{20}}{r_{00}}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{20})$$
$$= \sin(\alpha_{00}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{11}-\alpha_{21}),$$

$$\frac{r_{10}}{r_{00}}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{10})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02}) - \frac{r_{20}}{r_{00}}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{20})$$
$$= \sin(\alpha_{00}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{12}-\alpha_{22});$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$6) \ldots . \quad \left\{\begin{aligned}
A &= \sin(\alpha_{11}-\alpha_{10})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01}), \\
B &= \sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{20}), \\
C &= \sin(\alpha_{00}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{11}-\alpha_{21}); \\
A' &= \sin(\alpha_{12}-\alpha_{10})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02}), \\
B' &= \sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{20}), \\
C' &= \sin(\alpha_{00}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{12}-\alpha_{22})
\end{aligned}\right.$$

setzen:

$$A\frac{r_{10}}{r_{00}}-B\frac{r_{20}}{r_{00}}=C,$$

$$A'\frac{r_{10}}{r_{00}}-B'\frac{r_{20}}{r_{00}}=C';$$

woraus sich:

$$7)\ \ldots\ \frac{r_{10}}{r_{00}}=\frac{CB'-BC'}{AB'-BA'},\quad \frac{r_{20}}{r_{00}}=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}$$

ergiebt, und daher jetzt die Verhältnisse

$$\frac{r_{10}}{r_{00}} \text{ und } \frac{r_{20}}{r_{00}}$$

bestimmt sind.

Aus den oben zur Entwickelung der Gleichungen 2), 3), 4), 5) benutzten Gleichungen erhält man aber durch Elimination von r_{01} und r_{02} leicht:

$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\alpha_{01})-r_{10}.\sin(\alpha_{10}-\alpha_{01})=-r_{11}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01}),$$

$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\alpha_{02})-r_{10}.\sin(\alpha_{10}-\alpha_{02})=-r_{12}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})$$

und

$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\alpha_{01})-r_{20}.\sin(\alpha_{20}-\alpha_{01})=-r_{21}.\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01}),$$

$$r_{00}.\sin(\alpha_{00}-\alpha_{02})-r_{20}.\sin(\alpha_{20}-\alpha_{02})=-r_{22}.\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02});$$

also:

$$8)\ \ldots\ \begin{cases}\dfrac{r_{11}}{r_{00}}=\dfrac{\sin(\alpha_{01}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})}-\dfrac{r_{10}}{r_{00}}.\dfrac{\sin(\alpha_{01}-\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})},\\[2ex] \dfrac{r_{12}}{r_{00}}=\dfrac{\sin(\alpha_{02}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})}-\dfrac{r_{10}}{r_{00}}.\dfrac{\sin(\alpha_{02}-\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})}\end{cases}$$

und

$$9)\ \ldots\ \begin{cases}\dfrac{r_{21}}{r_{00}}=\dfrac{\sin(\alpha_{01}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})}-\dfrac{r_{20}}{r_{00}}.\dfrac{\sin(\alpha_{01}-\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})},\\[2ex] \dfrac{r_{22}}{r_{00}}=\dfrac{\sin(\alpha_{02}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})}-\dfrac{r_{20}}{r_{00}}.\dfrac{\sin(\alpha_{02}-\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})};\end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Verhältnisse

$$\frac{r_{11}}{r_{00}},\ \frac{r_{12}}{r_{00}} \text{ und } \frac{r_{21}}{r_{00}},\ \frac{r_{22}}{r_{00}}$$

gefunden werden.

Endlich folgt aus den Gleichungen 2) und 3):

$$10) \ldots \begin{cases} \dfrac{r_{01}}{r_{00}} = \dfrac{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})} - \dfrac{r_{10}}{r_{00}} \cdot \dfrac{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})}, \\[2ex] \dfrac{r_{02}}{r_{00}} = \dfrac{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})} - \dfrac{r_{10}}{r_{00}} \cdot \dfrac{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})}; \end{cases}$$

und aus den Gleichungen 4) und 5):

$$10^*) \ldots \begin{cases} \dfrac{r_{01}}{r_{00}} = \dfrac{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})} - \dfrac{r_{20}}{r_{00}} \cdot \dfrac{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})}, \\[2ex] \dfrac{r_{02}}{r_{00}} = \dfrac{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{00})}{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})} - \dfrac{r_{20}}{r_{00}} \cdot \dfrac{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})}; \end{cases}$$

wodurch die Verhältnisse

$$\frac{r_{01}}{r_{00}}, \quad \frac{r_{02}}{r_{00}}$$

gefunden werden.

Also sind jetzt die sämmtlichen Verhältnisse

$$\frac{r_{01}}{r_{00}}, \frac{r_{02}}{r_{00}}; \quad \frac{r_{10}}{r_{00}}, \frac{r_{11}}{r_{00}}, \frac{r_{12}}{r_{00}}; \quad \frac{r_{20}}{r_{00}}, \frac{r_{21}}{r_{00}}, \frac{r_{22}}{r_{00}}$$

bekannt; und da nach 10) und 10*) die Verhältnisse

$$\frac{r_{01}}{r_{00}}, \quad \frac{r_{02}}{r_{00}}$$

auf doppelte Weise berechnet werden können, so kann dies zugleich als Probe für die Richtigkeit der geführten Rechnung dienen.

Nimmt man nun einen der sechs Punkte, etwa den Punkt A_0, als Anfang der Coordinaten an, was offenbar verstattet ist, setzt also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, und nimmt ferner, was gleichfalls offenbar verstattet ist, den positiven Theil der Axe der x so an, dass $\theta = 0$ ist; so kann man die Coordinaten der sämmtlichen Punkte mittelst der folgenden, sich unmittelbar aus 1) ergebenden Formeln leicht durch r_{00} als Einheit ausdrücken:

11)

$$\begin{aligned} x_0' &= r_{00} . \cos\alpha_{00}, & y_0' &= r_{00} . \sin\alpha_{00}; \\ x_1' &= r_{01} . \cos\alpha_{01}, & y_1' &= r_{01} . \sin\alpha_{01}; \\ x_2' &= r_{02} . \cos\alpha_{02}, & y_2' &= r_{02} . \sin\alpha_{02}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0' - r_{10} . \cos\alpha_{10} & y_1 &= y_0' - r_{10} . \sin\alpha_{10} \\ &= x_1' - r_{11} . \cos\alpha_{11} & &= y_1' - r_{11} . \sin\alpha_{11} \\ &= x_2' - r_{12} . \cos\alpha_{12}, & &= y_2' - r_{12} . \sin\alpha_{12}; \end{aligned}$$



$$x_2 = x_0' - r_{20}.\cos\alpha_{20} \qquad y_2 = y_0' - r_{20}.\sin\alpha_{20}$$
$$= x_1' - r_{21}.\cos\alpha_{21} \qquad = y_1' - r_{21}.\sin\alpha_{21}$$
$$= x_2' - r_{22}.\cos\alpha_{22}, \qquad = y_2' - r_{22}.\sin\alpha_{22}.$$

Auf diese Weise ist unsere Aufgabe in dem Sinne, in welchem dieselbe gleich am Anfange dieses Paragraphen aufgefasst worden ist, vollständig gelöst.

§. 7.

Sechste Aufgabe.

Um für das eigentliche Pothenot'sche Problem eine neue Auflösung zu geben, wollen wir, ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legend, annehmen, dass

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2$$

drei bekannte Punkte, und dass die Coordinaten dieser Punkte respective

$$a_0, b_0; \quad a_1, b_1; \quad a_2, b_2$$

seien. Ein vierter Punkt sei A, dessen unbekannte Coordinaten wir durch x, y bezeichnen wollen. Die als gegeben zu betrachtenden Winkel, welche die als von den Punkten A_0, A_1, A_2 ausgehend gedachten Geraden

$$\overline{A_0A_1}, \quad \overline{A_1A_2}, \quad \overline{A_2A_0}$$

oder r_{01}, r_{12}, r_{20}, wie wir diese Geraden bezeichnen wollen, mit den positiven Theilen der ersten Axen durch die Punkte A_0, A_1, A_2 als Anfangspunkte gelegter, dem primitiven Systeme paralleler Coordinatensysteme einschliessen, indem wir diese Winkel von den positiven Theilen der in Rede stehenden ersten Axen an nach den positiven Theilen der entsprechenden zweiten Axen hin von 0 bis 360° zählen, sollen respective durch

$$\alpha_{01}, \quad \alpha_{12}, \quad \alpha_{20}$$

bezeichnet werden. Die unbekannten Entfernungen $\overline{AA_0}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$ des seiner Lage nach zu bestimmenden Punktes A von den drei gegebenen Punkten A_0, A_1, A_2 werden wir durch r_0, r_1, r_2 bezeichnen, und die von den als von A ausgehend gedachten Geraden $\overline{AA_0}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$ mit dem positiven Theile der ersten Axe eines dem primitiven Systeme parallelen, durch A als Anfang gelegten Coordinatensystems eingeschlossenen Winkel, indem wir



diese Winkel von dem positiven Theile der in Rede stehenden ersten Axe an nach dem positiven Theile der entsprechenden zweiten Axe hin von 0 bis 360° zählen, bezeichnen wir respective durch α_0, α_1, α_2, und bemerken im Betreff dieser Winkel, dass dieselben natürlich unbekannt sind, dass es aber offenbar immer möglich ist — was weiterer Erläuterung hier nicht bedürfen wird — deren Differenzen mittelst eines nach A gebrachten winkelmessenden Instruments durch geeignete, von A aus vorgenommene Messungen zu bestimmen, so dass also diese Differenzen im Folgenden immer als bekannt angenommen werden können.

Unter diesen Voraussetzungen hat man nun offenbar die folgenden Gleichungen:

$$1)\ldots\left\{\begin{array}{ll} a_1 = a_0 + r_{01}\cos\alpha_{01}, & b_1 = b_0 + r_{01}\sin\alpha_{01}; \\ a_2 = a_1 + r_{12}\cos\alpha_{12}, & b_2 = b_1 + r_{12}\sin\alpha_{12}; \\ a_0 = a_2 + r_{20}\cos\alpha_{20}, & b_0 = b_2 + r_{20}\sin\alpha_{20}; \end{array}\right.$$

oder:

$$2)\ldots\left\{\begin{array}{ll} a_1 - a_0 = r_{01}\cos\alpha_{01}, & b_1 - b_0 = r_{01}\sin\alpha_{01}; \\ a_2 - a_1 = r_{12}\cos\alpha_{12}, & b_2 - b_1 = r_{12}\sin\alpha_{12}; \\ a_0 - a_2 = r_{20}\cos\alpha_{20}, & b_0 - b_2 = r_{20}\sin\alpha_{20}; \end{array}\right.$$

und:

$$\begin{array}{ll} a_0 = x + r_0\cos\alpha_0, & b_0 = y + r_0\sin\alpha_0; \\ a_1 = x + r_1\cos\alpha_1, & b_1 = y + r_1\sin\alpha_1; \\ a_2 = x + r_2\cos\alpha_2, & b_2 = y + r_2\sin\alpha_2; \end{array}$$

also:

$$3)\ldots\left\{\begin{array}{ll} x = a_0 - r_0\cos\alpha_0, & y = b_0 - r_0\sin\alpha_0; \\ x = a_1 - r_1\cos\alpha_1, & y = b_1 - r_1\sin\alpha_1; \\ x = a_2 - r_2\cos\alpha_2, & y = b_2 - r_2\sin\alpha_2. \end{array}\right.$$

Aus den Gleichungen 2) erhält man durch Addition die Gleichungen:

$$4)\ldots\left\{\begin{array}{l} r_{01}\cos\alpha_{01} + r_{12}\cos\alpha_{12} + r_{20}\cos\alpha_{20} = 0, \\ r_{01}\cos\alpha_{01} + r_{12}\sin\alpha_{12} + r_{20}\sin\alpha_{20} = 0; \end{array}\right.$$

so dass also, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet,

$$\begin{array}{l} r_{01} = G(\sin\alpha_{12}\cos\alpha_{20} - \cos\alpha_{12}\sin\alpha_{20}), \\ r_{12} = G(\sin\alpha_{20}\cos\alpha_{01} - \cos\alpha_{20}\sin\alpha_{01}), \\ r_{20} = G(\sin\alpha_{01}\cos\alpha_{12} - \cos\alpha_{01}\sin\alpha_{12}); \end{array}$$



folglich:

$$5) \ldots\ldots \begin{cases} r_{01} = G\sin(\alpha_{12}-\alpha_{20}), \\ r_{12} = G\sin(\alpha_{20}-\alpha_{01}), \\ r_{20} = G\sin(\alpha_{01}-\alpha_{12}); \end{cases}$$

und daher:

$$6)\quad r_{01}:r_{12}:r_{20} = \sin(\alpha_{12}-\alpha_{20}):\sin(\alpha_{20}-\alpha_{01}):\sin(\alpha_{01}-\alpha_{12})$$

ist.

Ferner erhält man aus den Gleichungen 2) und 3) auf der Stelle die Gleichungen:

$$7) \ldots \begin{cases} r_0\cos\alpha_0 - r_1\cos\alpha_1 + r_{01}\cos\alpha_{01} = 0, \\ r_1\cos\alpha_1 - r_2\cos\alpha_2 + r_{12}\cos\alpha_{12} = 0, \\ r_2\cos\alpha_2 - r_0\cos\alpha_0 + r_{20}\cos\alpha_{20} = 0; \end{cases}$$

und:

$$8) \ldots \begin{cases} r_0\sin\alpha_0 - r_1\sin\alpha_1 + r_{01}\sin\alpha_{01} = 0, \\ r_1\sin\alpha_1 - r_2\sin\alpha_2 + r_{12}\sin\alpha_{12} = 0, \\ r_2\sin\alpha_2 - r_0\sin\alpha_0 + r_{20}\sin\alpha_{20} = 0. \end{cases}$$

Durch Verbindung der beiden Gleichungen

$$r_0\cos\alpha_0 - r_1\cos\alpha_1 + r_{01}\cos\alpha_{01} = 0,$$
$$r_0\sin\alpha_0 - r_1\sin\alpha_1 + r_{01}\sin\alpha_{01} = 0$$

erhalten wir, wenn G_{01} einen gewissen Factor bezeichnet, die Gleichungen:

$$r_0 = -G_{01}(\sin\alpha_1\cos\alpha_{01} - \cos\alpha_1\sin\alpha_{01}),$$
$$r_1 = G_{01}(\sin\alpha_{01}\cos\alpha_0 - \cos\alpha_{01}\sin\alpha_0),$$
$$r_{01} = -G_{01}(\sin\alpha_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\sin\alpha_1);$$

also:

$$9) \ldots\ldots \begin{cases} r_0 = -G_{01}\sin(\alpha_1-\alpha_{01}), \\ r_1 = G_{01}\sin(\alpha_{01}-\alpha_0), \\ r_{01} = -G_{01}\sin(\alpha_0-\alpha_1); \end{cases}$$

und ganz eben so erhält man mittelst des Obigen, wenn G_{12} und G_{20} gewisse Factoren bezeichnen:

$$10) \ldots\ldots \begin{cases} r_1 = -G_{12}\sin(\alpha_2-\alpha_{12}), \\ r_2 = G_{12}\sin(\alpha_{12}-\alpha_1), \\ r_{12} = -G_{12}\sin(\alpha_1-\alpha_2); \end{cases}$$



und

$$11) \ldots\ldots \begin{cases} r_2 \ = -G_{20}\sin(\alpha_0-\alpha_{20}), \\ r_0 \ = \quad G_{20}\sin(\alpha_{20}-\alpha_2), \\ r_{20} = -G_{20}\sin(\alpha_2-\alpha_0); \end{cases}$$

so dass also

$$12) \begin{cases} r_0:r_1:r_{01} = -\sin(\alpha_1-\alpha_{01}):\sin(\alpha_{01}-\alpha_0):-\sin(\alpha_0-\alpha_1), \\ r_1:r_2:r_{12} = -\sin(\alpha_2-\alpha_{12}):\sin(\alpha_{12}-\alpha_1):-\sin(\alpha_1-\alpha_2), \\ r_2:r_0:r_{20} = -\sin(\alpha_0-\alpha_{20}):\sin(\alpha_{20}-\alpha_2):-\sin(\alpha_2-\alpha_0) \end{cases}$$

ist. Auch hat man nach 9), 10), 11) die Gleichungen:

$$13) \ldots \begin{cases} G_{01}\sin(\alpha_1-\alpha_{01}) = G_{20}\sin(\alpha_2-\alpha_{20}), \\ G_{12}\sin(\alpha_2-\alpha_{12}) = G_{01}\sin(\alpha_0-\alpha_{01}), \\ G_{20}\sin(\alpha_0-\alpha_{20}) = G_{12}\sin(\alpha_1-\alpha_{12}); \end{cases}$$

also durch Multiplication die Relation:

$$14) \ldots \begin{cases} \sin(\alpha_0-\alpha_{01})\sin(\alpha_1-\alpha_{12})\sin(\alpha_2-\alpha_{20}) \\ = \sin(\alpha_0-\alpha_{20})\sin(\alpha_1-\alpha_{01})\sin(\alpha_2-\alpha_{12}). \end{cases}$$

Zur Berechnung der Factoren G_{01}, G_{12}, G_{20} hat man nach 9), 10), 11) die Formeln:

15)

$$G_{01} = \frac{r_{01}}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}, \quad G_{12} = \frac{r_{12}}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}, \quad G_{20} = \frac{r_{20}}{\sin(\alpha_0-\alpha_2)};$$

wobei nach dem Obigen die Entfernungen r_{01}, r_{12}, r_{20} und die Differenzen $\alpha_1-\alpha_0$, $\alpha_2-\alpha_1$, $\alpha_0-\alpha_2$ als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, also auch die in Rede stehenden Factoren bekannt sind.

Nun ist:

$$\alpha_2 = \alpha_0-(\alpha_0-\alpha_2), \quad \alpha_1 = \alpha_0+(\alpha_1-\alpha_0);$$

also nach den beiden letzten der Gleichungen 13):

$$G_{01}\sin(\alpha_0-\alpha_{01}) = G_{12}\sin\{\alpha_0-(\alpha_0-\alpha_2)-\alpha_{12}\},$$

$$G_{20}\sin(\alpha_0-\alpha_{20}) = G_{12}\sin\{\alpha_0+(\alpha_1-\alpha_0)-\alpha_{12}\};$$

folglich:

$$\{G_{01}\cos\alpha_{01} - G_{12}\cos((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12})\}\sin\alpha_0$$
$$= \{G_{01}\sin\alpha_{01} - G_{12}\sin((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12})\}\cos\alpha_0,$$

$$\{G_{20}\cos\alpha_{20} - G_{12}\cos(\alpha_{12}-(\alpha_1-\alpha_0))\}\sin\alpha_0$$
$$= \{G_{20}\sin\alpha_{20} - G_{12}\sin(\alpha_{12}-(\alpha_1-\alpha_0))\}\cos\alpha_0;$$

woraus sich zur Berechnung von α_0 die folgenden Formeln ergeben:



$$16)\ldots\begin{cases}\tang\alpha_0=\dfrac{G_{01}\sin\alpha_{01}-G_{12}\sin((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12})}{G_{01}\cos\alpha_{01}-G_{12}\cos((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12})},\\[2ex] \tang\alpha_0=\dfrac{G_{20}\sin\alpha_{20}-G_{12}\sin(\alpha_{12}-(\alpha_1-\alpha_0))}{G_{20}\cos\alpha_{20}-G_{12}\cos(\alpha_{12}-(\alpha_1-\alpha_0))}.\end{cases}$$

Hat man mittelst dieser Formeln α_0 gefunden, so ergeben sich α_1 und α_2 mittelst der Formeln:

$$17)\ldots\quad \alpha_1=\alpha_0+(\alpha_1-\alpha_0),\quad \alpha_2=\alpha_0-(\alpha_0-\alpha_2);$$

und r_0, r_1, r_2 erhält man mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln:

$$18)\ldots\begin{cases}r_0=G_{01}\sin(\alpha_{01}-\alpha_1)=G_{20}\sin(\alpha_{20}-\alpha_2),\\ r_1=G_{12}\sin(\alpha_{12}-\alpha_2)=G_{01}\sin(\alpha_{01}-\alpha_0),\\ r_2=G_{20}\sin(\alpha_{20}-\alpha_0)=G_{12}\sin(\alpha_{12}-\alpha_1);\end{cases}$$

endlich die Coordinaten x, y mittelst der Formeln 3), die wir hier nicht wiederholen wollen.

Die Formeln 16) liefern für den zwischen 0 und 360° liegenden Winkel α_0 allerdings zwei um 180° verschiedene Werthe; da aber diese Werthe für r_1 und r_2 mittelst der Formeln: $r_1=G_{01}\sin(\alpha_{01}-\alpha_0)$, $r_2=G_{20}\sin(\alpha_{20}-\alpha_0)$ offenbar Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern, aber r_1 und r_2 ihrer Natur nach nur positiv sein können, so kann nie ein Zweifel bleiben, wie man den Winkel α_0 zu nehmen hat, und auch bei der Anwendung aller übrigen Formeln bleibt dann nirgends eine Zweideutigkeit, so dass also die Aufgabe sich immer mit völliger Bestimmtheit auflösen lässt. Natürlich kann man auch die Werthe 15) von G_{01}, G_{12}, G_{20} in die vorstehenden Formeln einführen, wodurch man die folgenden Ausdrücke erhält:

$$19)$$

$$\tang\alpha_0=\frac{r_{01}\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_2-\alpha_1)-r_{12}\sin(\alpha_1-\alpha_0)\sin((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12})}{r_{01}\cos\alpha_{01}\sin(\alpha_2-\alpha_1)-r_{12}\sin(\alpha_1-\alpha_0)\cos((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12})},$$

$$\tang\alpha_0=\frac{r_{20}\sin\alpha_{20}\sin(\alpha_2-\alpha_1)-r_{12}\sin(\alpha_0-\alpha_2)\sin(\alpha_{12}-(\alpha_1-\alpha_0))}{r_{20}\cos\alpha_{20}\sin(\alpha_2-\alpha_1)-r_{12}\sin(\alpha_0-\alpha_2)\cos(\alpha_{12}-(\alpha_1-\alpha_0))}$$

und

$$20)\ldots\begin{cases}r_0=\dfrac{\sin(\alpha_{01}-\alpha_1)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}r_{01}=\dfrac{\sin(\alpha_{20}-\alpha_2)}{\sin(\alpha_0-\alpha_2)}r_{20},\\[2ex] r_1=\dfrac{\sin(\alpha_{12}-\alpha_2)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}r_{12}=\dfrac{\sin(\alpha_{01}-\alpha_0)}{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}r_{01},\\[2ex] r_2=\dfrac{\sin(\alpha_{20}-\alpha_0)}{\sin(\alpha_0-\alpha_2)}r_{20}=\dfrac{\sin(\alpha_{12}-\alpha_1)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}r_{12}.\end{cases}$$

Es möchte jedoch vielleicht selbst einige Vortheile haben, zuerst die Grössen G_{01}, G_{12}, G_{20} zu berechnen; wenigstens scheint mir dadurch die numerische Rechnung nicht weitläufiger zu werden.

Wir haben hier in die Formeln $\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{20}$ und r_{01}, r_{12}, r_{20} als bekannte Grössen eingeführt; natürlich kann man aber diese Grössen aus den bekannten Coordinaten a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2 berechnen; denn nach 2) ist:

$$21)\quad \tang \alpha_{01} = \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0},\quad \tang \alpha_{12} = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1},\quad \tang \alpha_{20} = \frac{b_0 - b_2}{a_0 - a_2}$$

und:

$$22)\quad r_{01} = \frac{a_1 - a_0}{\cos\alpha_{01}} = \frac{b_1 - b_0}{\sin\alpha_{01}},\quad r_{12} = \frac{a_2 - a_1}{\cos\alpha_{12}} = \frac{b_2 - b_1}{\sin\alpha_{12}},\quad r_{20} = \frac{a_0 - a_2}{\cos\alpha_{20}} = \frac{b_0 - b_2}{\sin\alpha_{20}}.$$

Die Winkel $\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{20}$ muss man zwischen 0 und 360° so nehmen, dass r_{01}, r_{12}, r_{20} sämmtlich positiv ausfallen.

Ich will diese Auflösung durch das folgende Beispiel erläutern. Die Rechnung ist mit den trefflichen Bremiker'schen sechsstelligen Tafeln, aber nicht ganz mit der Genauigkeit geführt, welche dieselben zu erreichen gestatten. Die Winkel sind nämlich nur bis auf fünf Secunden genau berechnet, eine Genauigkeit, welche fast eben so leicht und bequem zu erreichen war, als wenn man bloss bis auf Minuten gegangen wäre, weil die Tafeln von zehn zu zehn Secunden fortschreiten, welche Einrichtung eben deshalb, und natürlich noch aus vielen anderen Gründen, die grösste Empfehlung für alle Tafeln verdient, und endlich die nur bis auf Minuten gehenden Tafeln ganz verdrängen sollte, insofern man sich nicht mit noch weniger als sechs Decimalstellen begnügen will. Wenn im Folgenden der Controle wegen ein und dieselbe Grösse nach verschiedenen Formeln berechnet worden ist, so können in Folge der ganzen Anlage der Rechnung diese Werthe natürlich nicht ganz mit einander übereinstimmen, weshalb in solchen Fällen als definitiver Werth immer das arithmetische Mittel zwischen allen erhaltenen Werthen angesetzt worden ist. Nach diesen vorläufigen Bemerkungen, welche ich für nöthig hielt, wird die folgende Rechnung gewiss ganz verständlich sein.

Es sei:

$$a_0 = -12^0.6' = -126',\qquad b_0 = +14^0.3' = +143',$$
$$a_1 = +21^0.8' = +218',\qquad b_1 = +16^0.9' = +169',$$
$$a_2 = +\ 9^0.8' = +\ 98';\qquad b_2 = -11^0.9' = -119';$$

$$\alpha_1-\alpha_0=-18^0.24',$$
$$\alpha_2-\alpha_1=+32^0.17',$$
$$\alpha_0-\alpha_2=-13^0.53'.$$

Also ist:

$$a_1-a_0=+344 \qquad b_1-b_0=+\ 26$$
$$a_2-a_1=-120 \qquad b_2-b_1=-288$$
$$a_0-a_2=-224 \qquad b_0-b_2=+262$$

$$\operatorname{tang}\alpha_{01}=+\frac{26}{344}=+\frac{13}{172}$$
$$\operatorname{tang}\alpha_{12}=+\frac{288}{120}=+\frac{12}{5}$$
$$\operatorname{tang}\alpha_{20}=-\frac{262}{224}=-\frac{131}{112}$$

Besser ist es aber, bei der Berechnung der Winkel α_{01}, α_{12}, α_{20} die nicht vereinfachten Brüche zu benutzen, weil man bei der Berechnung von r_{01}, r_{12}, r_{20} doch der Zähler und Nenner derselben bedarf.

$$\log(b_1-b_0)=1,414973$$
$$\log(a_1-a_0)=2,536558$$
$$\log\operatorname{tang}\alpha_{01}=8,878415 \qquad \alpha_{01}=\begin{cases}4^0.19'.20''\\184\ .19\ .20\end{cases}$$

$$\log(b_2-b_1)=2,459392_n$$
$$\log(a_2-a_1)=2,079181_n$$
$$\log\operatorname{tang}\alpha_{12}=10,380211 \qquad \alpha_{12}=\begin{cases}67^0.22'.50''\\247\ .22\ .50\end{cases}$$

$$\log(b_0-b_2)=2,418301$$
$$\log(a_0-a_2)=2,350248_n$$
$$\log\operatorname{tang}\alpha_{20}=10,068053_n \qquad \alpha_{20}=\begin{cases}130^0.31'.50''\\310\ .31\ .50\end{cases}$$

Die Grössen

$$a_1-a_0,\quad a_2-a_1,\quad a_0-a_2$$

sind respective

positiv, negativ, negativ;

also liefern die Winkelwerthe

$$184^0.19'.20'' \qquad 67^0.22'.50'' \qquad 310^0.31'.50''$$

für die Entfernungen r_{01}, r_{12}, r_{20} negative Werthe, und dasselbe ist der Fall, weil die Grössen

$$b_1-b_0,\quad b_2-b_1,\quad b_0-b_2$$

respective

positiv, negativ, positiv

sind; folglich muss man setzen:

$$\alpha_{01} = 4^0.19'.20''$$
$$\alpha_{12} = 247\ .22\ .50$$
$$\alpha_{20} = 130\ .31\ .50$$

Ferner ist nun:

$$\log(a_1 - a_0) = 2{,}536558$$
$$\log\cos\alpha_{01} = 9{,}998763$$
$$\log r_{01} = 2{,}537795$$

$$\log(b_1 - b_0) = 1{,}414973$$
$$\log\sin\alpha_{01} = 8{,}877172$$
$$\log r_{01} = 2{,}537801$$

$$2{,}537795$$
$$2{,}537801$$
$$5{,}075596$$
$$\log r_{01} = 2{,}537798$$

$$\log(a_2 - a_1) = 2{,}079181_n$$
$$\log\cos\alpha_{12} = 9{,}585019_n$$
$$\log r_{12} = 2{,}494162$$

$$\log(b_2 - b_1) = 2{,}459392_n$$
$$\log\sin\alpha_{12} = 9{,}965239_n$$
$$\log r_{12} = 2{,}494153$$

$$2{,}494162$$
$$2{,}494153$$
$$4{,}988315$$
$$\log r_{12} = 2{,}494158$$

$$\log(a_0 - a_2) = 2{,}350248_n$$
$$\log\cos\alpha_{20} = 9{,}812815_n$$
$$\log r_{20} = 2{,}537433$$

$$\log(b_0 - b_2) = 2{,}418301$$
$$\log\sin\alpha_{20} = 9{,}880848$$
$$\log r_{20} = 2{,}537453$$

$$2{,}537433$$
$$2{,}537453$$
$$5{,}074886$$
$$\log r_{20} = 2{,}537443$$

Also sind die definitiven Werthe:

$$\log r_{01} = 2{,}537798 \qquad r_{01} = 344{,}98$$
$$\log r_{12} = 2{,}494158 \qquad r_{12} = 312{,}00$$
$$\log r_{20} = 2{,}537443 \qquad r_{20} = 344{,}70$$

Wir berechnen nun den Winkel α_0. Zu dem Ende ist:

$$\alpha_0 - \alpha_2 = -13^0.53'.\ 0''$$
$$\alpha_{12} = 247\ .22\ .50$$
$$(\alpha_0 - \alpha_2) + \alpha_{12} = 233\ .29\ .50$$

$$\alpha_{12} = 247^0.22'.50''$$
$$\alpha_1 - \alpha_0 = -18\ .24\ .\ 0$$
$$\alpha_{12} - (\alpha_1 - \alpha_0) = 265\ .46\ .50$$

$$\begin{aligned}\log r_{01} &= 2{,}537798\\ \log\sin\alpha_{01} &= 8{,}877172\\ \log\sin(\alpha_2-\alpha_1) &= 9{,}727628\\ &\overline{1{,}142598} \qquad \text{num.} = 13{,}887\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log r_{01} &= 2{,}537798\\ \log\cos\alpha_{01} &= 9{,}998763\\ \log\sin(\alpha_2-\alpha_1) &= 9{,}727628\\ &\overline{2{,}264189} \qquad \text{num.} = 183{,}734\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log r_{12} &= 2{,}494168\\ \log\sin(\alpha_1-\alpha_0) &= 9{,}499204_n\\ \log\sin((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12}) &= 9{,}905163_n\\ &\overline{1{,}898525} \qquad \text{num.} = 79{,}164\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log r_{12} &= 2{,}494168\\ \log\sin(\alpha_1-\alpha_0) &= 9{,}499204_n\\ \log\cos((\alpha_0-\alpha_2)+\alpha_{12}) &= 9{,}774416_n\\ &\overline{1{,}767778} \qquad \text{num.} = 58{,}584\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} 13{,}887 & 183{,}734\\ -\,79{,}164 & -58{,}584\\ \hline -\,65{,}277 & 125{,}150\end{array}$$

$$\tan\alpha_0 = -\frac{65{,}277}{125{,}150}$$

$$\begin{aligned}\log 65{,}277 &= 1{,}814760\\ \log 125{,}250 &= 2{,}097431\\ \hline \log\tan\alpha_0 &= 9{,}717329_n\end{aligned}$$

$$\alpha = \begin{cases} 152^0.\,27'.\,10''\\ 332\,.\,27\,.\,10\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\log r_{20} &= 2{,}537443\\ \log\sin\alpha_{20} &= 9{,}880848\\ \log\sin(\alpha_2-\alpha_1) &= 9{,}727628\\ &\overline{2{,}145919} \qquad \text{num.} = 139{,}933\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log r_{20} &= 2{,}537443\\ \log\cos\alpha_{20} &= 9{,}812815_n\\ \log\sin(\alpha_2-\alpha_1) &= 9{,}727628\\ &\overline{2{,}077886_n} \qquad \text{num.} = -119{,}643\end{aligned}$$

$$\log r_{12} = 2{,}494158$$
$$\log\sin(\alpha_0 - \alpha_2) = 9{,}380113_n$$
$$\log\sin(\alpha_{12} - (\alpha_1 - \alpha_0)) = 9{,}998821_n$$
$$\overline{1{,}873092} \qquad \text{num.} = 74{,}661$$

$$\log r_{12} = 2{,}494158$$
$$\log\sin(\alpha_0 - \alpha_2) = 9{,}380113_n$$
$$\log\cos(\alpha_{12} - (\alpha_1 - \alpha_0)) = 8{,}866740_n$$
$$\overline{0{,}741011} \qquad \text{num.} = 5{,}508$$

$$\begin{array}{r} 139{,}933 \\ -74{,}661 \\ \hline 65{,}272 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -119{,}643 \\ -5{,}508 \\ \hline -125{,}151 \end{array}$$

$$\operatorname{tang}\alpha_0 = -\frac{65{,}272}{125{,}151}$$

$$\log 65{,}272 = 1{,}814727$$
$$\log 125{,}151 = 2{,}097435$$
$$\log\operatorname{tang}\alpha_0 = 9{,}717292_n$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} 152^0.27'.20'' \\ 332\ .27\ .20 \end{cases}$$

Als Mittelwerthe setzen wir:

$$\alpha_0 = \begin{cases} 152^0.27'.15'' \\ 332\ .27\ .15 \end{cases}$$

Nun ist aber:

$$\begin{array}{rl} \alpha_{01} = & 4^0.19'.20'' \\ \alpha_0 = & 152\ .27\ .15 \\ \hline \alpha_{01} - \alpha_0 = & -148\ .\ 7\ .55 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \alpha_{01} = & 4^0.19'.20'' \\ \alpha_0 = & 332\ .27\ .15 \\ \hline \alpha_{01} - \alpha_0 = & -328\ .\ 7\ .55 \end{array}$$

$\sin(\alpha_{01} - \alpha_0)$ negativ	$\sin(\alpha_{01} - \alpha_0)$ positiv
$\sin(\alpha_1 - \alpha_0)$ negativ	$\sin(\alpha_1 - \alpha_0)$ negativ
r_1 positiv	r_1 negativ

und man muss also setzen:

$$\alpha_0 = 152^0.27'.15''$$

$$\begin{array}{rl} \alpha_0 = & 152^0.27'.15'' \\ \alpha_1 - \alpha_0 = & -18\ .24\ .\ 0 \\ \hline \alpha_1 = & 134\ .\ 3\ .15 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \alpha_0 = & 152^0.27'.15'' \\ \alpha_0 - \alpha_2 = & -13\ .53\ .\ 0 \\ \hline \alpha_2 = & 166\ .20\ .15 \end{array}$$

Daher haben wir folgende Werthe:

$$\alpha_0 = 152^0.27'.15''$$
$$\alpha_1 = 134\ .\ 3\ .15$$
$$\alpha_2 = 166\ .20\ .15$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}
\alpha_{01} &= 4^{0}.19'.20''\\
\alpha_{1} &= 134\,.\,3\,.15\\
\alpha_{01}-\alpha_{1} &= -129\,.43\,.55
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log r_{01} &= 2{,}537798\\
\log\sin(\alpha_{01}-\alpha_{1}) &= 9{,}885951_n\\
& 2{,}423749_n\\
\log\sin(\alpha_{1}-\alpha_{0}) &= 9{,}499204_n\\
\log r_{0} &= 2{,}924545
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{20} &= 130^{0}.31'.50''\\
\alpha_{2} &= 166\,.20\,.15\\
\alpha_{20}-\alpha_{2} &= -35\,.48\,.25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log r_{20} &= 2{,}537443\\
\log\sin(\alpha_{20}-\alpha_{2}) &= 9{,}767198_n\\
& 2{,}304641_n\\
\log\sin(\alpha_{0}-\alpha_{2}) &= 9{,}380113_n\\
\log r_{0} &= 2{,}924528
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2{,}924545\\
&2{,}924528\\
&5{,}849073\\
\log r_{0} &= 2{,}924537
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= 247^{0}.22'.50''\\
\alpha_{2} &= 166\,.20\,.15\\
\alpha_{12}-\alpha_{2} &= 81\,.\,2\,.35
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log r_{12} &= 2{,}494158\\
\log\sin(\alpha_{12}-\alpha_{2}) &= 9{,}994672\\
& 2{,}488830\\
\log\sin(\alpha_{2}-\alpha_{1}) &= 9{,}727628\\
\log r_{1} &= 2{,}761202
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{01} &= 4^{0}.19'.20''\\
\alpha_{0} &= 152\,.27\,.15\\
\alpha_{01}-\alpha_{0} &= -148\,.\,7\,.55
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log r_{01} &= 2{,}537798\\
\log\sin(\alpha_{01}-\alpha_{0}) &= 9{,}722605_n\\
& 2{,}260403_n\\
\log\sin(\alpha_{1}-\alpha_{0}) &= 9{,}499204_n\\
\log r_{1} &= 2{,}761199
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2{,}761202\\
&2{,}761199\\
&5{,}522401\\
\log r_{1} &= 2{,}761201
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{20} &= 130^{0}.31'.50''\\
\alpha_{0} &= 152\,.27\,.15\\
\alpha_{20}-\alpha_{0} &= -21\,.55\,.25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log r_{20} &= 2{,}537443\\
\log\sin(\alpha_{20}-\alpha_{0}) &= 9{,}572140_n\\
& 2{,}109583_n\\
\log\sin(\alpha_{0}-\alpha_{2}) &= 9{,}380113_n\\
\log r_{2} &= 2{,}729470
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= 247^{0}.22'.50''.\\
\alpha_{1} &= 134\,.\,3\,.15\\
\alpha_{12}-\alpha_{1} &= 113\,.19\,.35
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log r_{12} &= 2{,}494158\\
\log\sin(\alpha_{12}-\alpha_{1}) &= 9{,}962968\\
& 2{,}457126\\
\log\sin(\alpha_{2}-\alpha_{1}) &= 9{,}727628\\
\log r_{2} &= 2{,}729498
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2{,}729470\\
&2{,}729498\\
&5{,}458968\\
\log r_{2} &= 2{,}729484
\end{aligned}$$

Also ist:

$$\log r_0 = 2{,}924537 \qquad r_0 = 840{,}50$$

$$\log r_1 = 2{,}761201 \qquad r_1 = 577{,}03$$

$$\log r_2 = 2{,}729484 \qquad r_2 = 536{,}39$$

Endlich ist:

$$\begin{aligned} \log r_0 &= 2{,}924537 \\ \log \cos\alpha_0 &= \underline{9{,}947747_n} \\ \log . r_0 \cos\alpha_0 &= 2{,}872284_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_0 \cos\alpha_0 &= -745{,}22 \\ a_0 &= \underline{-126{,}00} \\ x &= +619{,}22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r_1 &= 2{,}761201 \\ \log \cos\alpha_1 &= \underline{9{,}842196_n} \\ \log . r_1 \cos\alpha_1 &= 2{,}603397_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 \cos\alpha_1 &= -401{,}23 \\ a_1 &= \underline{+218{,}00} \\ x &= +619{,}23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r_2 &= 2{,}729484 \\ \log \cos\alpha_2 &= \underline{9{,}987534_n} \\ \log . r_2 \cos\alpha_2 &= 2{,}717018_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 \cos\alpha_2 &= -521{,}22 \\ a_2 &= \underline{+\ 98{,}00} \\ x &= \ \ 619{,}22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+\ 619{,}22 \\ &+\ 619{,}23 \\ &\underline{+\ 619{,}22} \\ &+1857{,}67 \end{aligned}$$

$$x = +619{,}22$$

$$\begin{aligned} \log r_0 &= 2{,}924537 \\ \log \sin\alpha_0 &= \underline{9{,}665073} \\ \log . r_0 \sin\alpha_0 &= 2{,}589610 \end{aligned}$$

$$r_0 \sin\alpha_0 = +388{,}70$$
$$b_0 = +143{,}00$$
$$y = -245{,}70$$

$$\log r_1 = 2{,}761201$$
$$\log\sin\alpha_1 = 9{,}856537$$
$$\log . r_1 \sin\alpha_1 = 2{,}617738$$

$$r_1 \sin\alpha_1 = +414{,}70$$
$$b_1 = +169{,}00$$
$$y = -245{,}70$$

$$\log r_2 = 2{,}729484$$
$$\log\sin\alpha_2 = 9{,}373284$$
$$\log . r_2 \sin\alpha_2 = 2{,}102768$$

$$r_2 \sin\alpha_2 = +126{,}70$$
$$b_2 = -119{,}00$$
$$y = -245{,}70$$

Man erhält also für y immer genau denselben Werth; und die Coordinaten des zu bestimmenden Punktes sind folglich:

$$x = +619'{,}22 = +61^0.9'{,}22$$
$$y = -245'{,}70 = -24^0.5'{,}70.$$

Von diesem Falle liefert Fig. II., welche mit einem Maassstabe, bei dem 25 Ruthen auf den preussischen Decimalzoll gerechnet worden sind, entworfen worden ist, eine genaue Zeichnung. Man wird durch Nachmessung an derselben alle oben auf dem Wege der Rechnung gewonnenen Resultate bestätigt finden, so weit dies bei einer solchen Figur erwartet werden kann.

§. 8.

Siebente Aufgabe.

Wir denken uns jetzt zwei Systeme von vier Punkten:

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3 \quad \text{und} \quad A_0',\ A_1',\ A_2',\ A_3';$$

im Ganzen also acht Punkte, deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem wir durch



$$x_0, y_0;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3$$

und

$$x_0', y_0';\ x_1', y_1';\ x_2', y_2';\ x_3', y_3'$$

bezeichnen wollen.

Wenn wir uns durch A_0 als Anfang ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem gelegt denken, so sollen die von den Geraden

$$\overline{A_0A_0'},\ \overline{A_0A_1'},\ \overline{A_0A_2'},\ \overline{A_0A_3'}$$

mit dem positiven Theile der ersten Axe dieses Systems eingeschlossenen Winkel, indem wir diese Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe an nach dem positiven Theile der zweiten Axe hin von 0 bis 360° zählen, respective durch

$$\varphi_0,\ \varphi_0+\alpha_{01},\ \varphi_0+\alpha_{02},\ \varphi_0+\alpha_{03}$$

bezeichnet werden, wo die Winkel α_{01}, α_{02}, α_{03} offenbar jederzeit durch geignete Messungen mit einem nach A_0 gebrachten winkelmessenden Instrumente bestimmt werden können, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen wird.

Die von den Geraden

$$\overline{A_1A_0'},\ \overline{A_1A_1'},\ \overline{A_1A_2'},\ \overline{A_1A_3'}$$

mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch A_1 parallel mit dem primitiven Systeme gelegten Coordinatensystems eingeschlossenen, auf ganz ähnliche Art wie vorher genommenen Winkel bezeichnen wir durch

$$\varphi_1,\ \varphi_1+\alpha_{11},\ \varphi_1+\alpha_{12},\ \varphi_1+\alpha_{13},$$

wo die Winkel α_{11}, α_{12}, α_{13} jederzeit durch geeignete Messungen mit einem nach A_1 gebrachten winkelmessenden Instrumente bestimmt werden können.

Die von den Geraden

$$\overline{A_2A_0'},\ \overline{A_2A_1'},\ \overline{A_2A_2'},\ \overline{A_2A_3'}$$

mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch A_2 parallel mit dem primitiven Systeme gelegten Coordinatensystems eingeschlossenen, ganz eben so wie vorher genommenen Winkel bezeichnen wir durch

$$\varphi_2,\ \varphi_2+\alpha_{21},\ \varphi_2+\alpha_{22},\ \varphi_2+\alpha_{23},$$



wo die Winkel α_{21}, α_{22}, α_{23} mittelst eines nach A_2 gebrachten winkelmessenden Instruments jederzeit bestimmt werden können.

Die von den Geraden

$$\overline{A_3A_0'},\ \overline{A_3A_1'},\ \overline{A_3A_2'},\ \overline{A_3A_3'}$$

mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch A_3 parallel mit dem primitiven Systeme gelegten Coordinatensystems eingeschlossenen, ganz eben so, wie vorher immer, genommenen Winkel bezeichnen wir durch

$$\varphi_3,\ \varphi_3+\alpha_{31},\ \varphi_3+\alpha_{32},\ \varphi_3+\alpha_{33},$$

wo die Winkel α_{31}, α_{32}, α_{33} mittelst eines nach A_3 gebrachten winkelmessenden Instruments jederzeit bestimmt werden können.

Indem wir nun noch die Entfernungen

$$\overline{A_0A_0'},\ \overline{A_0A_1'},\ \overline{A_0A_2'},\ \overline{A_0A_3'};$$

$$\overline{A_1A_0'},\ \overline{A_1A_1'},\ \overline{A_1A_2'},\ \overline{A_1A_3'};$$

$$\overline{A_2A_0'},\ \overline{A_2A_1'},\ \overline{A_2A_2'},\ \overline{A_2A_3'};$$

$$\overline{A_3A_0'},\ \overline{A_3A_1'},\ \overline{A_3A_2'},\ \overline{A_3A_3'}.$$

beziehungsweise durch

$$r_{00},\ r_{01},\ r_{02},\ r_{03};$$

$$r_{10},\ r_{11},\ r_{12},\ r_{13};$$

$$r_{20},\ r_{21},\ r_{22},\ r_{23};$$

$$r_{30},\ r_{31},\ r_{32},\ r_{33}$$

bezeichnen, wollen wir jetzt sehen, was sich aus den nach dem Obigen vorgenommenen Winkelmessungen schliessen lässt.

Offenbar haben wir unter den gemachten Voraussetzungen die folgenden Gleichungen:

1)

$$x_0' = x_0 + r_{00}.\cos\varphi_0, \qquad y_0' = y_0 + r_{00}.\sin\varphi_0,$$

$$x_1' = x_0 + r_{01}.\cos(\alpha_{01}+\varphi_0), \qquad y_1' = y_0 + r_{01}.\sin(\alpha_{01}+\varphi_0),$$

$$x_2' = x_0 + r_{02}.\cos(\alpha_{02}+\varphi_0), \qquad y_2' = y_0 + r_{02}.\sin(\alpha_{02}+\varphi_0),$$

$$x_3' = x_0 + r_{03}.\cos(\alpha_{03}+\varphi_0); \qquad y_3' = y_0 + r_{03}.\sin(\alpha_{03}+\varphi_0);$$

$$x_0' = x_1 + r_{10} . \cos\varphi_1, \qquad y_0' = y_1 + r_{10} . \sin\varphi_1,$$
$$x_1' = x_1 + r_{11} . \cos(\alpha_{11} + \varphi_1), \qquad y_1' = y_1 + r_{11} . \sin(\alpha_{11} + \varphi_1),$$
$$x_2' = x_1 + r_{12} . \cos(\alpha_{12} + \varphi_1), \qquad y_2' = y_1 + r_{12} . \sin(\alpha_{12} + \varphi_1),$$
$$x_3' = x_1 + r_{13} . \cos(\alpha_{13} + \varphi_1); \qquad y_3' = y_1 + r_{13} . \sin(\alpha_{13} + \varphi_1);$$

$$x_0' = x_2 + r_{20} . \cos\varphi_2, \qquad y_0' = y_2 + r_{20} . \sin\varphi_2,$$
$$x_1' = x_2 + r_{21} . \cos(\alpha_{21} + \varphi_2), \qquad y_1' = y_2 + r_{21} . \sin(\alpha_{21} + \varphi_2),$$
$$x_2' = x_2 + r_{22} . \cos(\alpha_{22} + \varphi_2), \qquad y_2' = y_2 + r_{22} . \sin(\alpha_{22} + \varphi_2),$$
$$x_3' = x_2 + r_{23} . \cos(\alpha_{23} + \varphi_2); \qquad y_3' = y_2 + r_{23} . \sin(\alpha_{23} + \varphi_2);$$

$$x_0' = x_3 + r_{30} . \cos\varphi_3, \qquad y_0' = y_3 + r_{30} . \sin\varphi_3,$$
$$x_1' = x_3 + r_{31} . \cos(\alpha_{31} + \varphi_3), \qquad y_1' = y_3 + r_{31} . \sin(\alpha_{31} + \varphi_3),$$
$$x_2' = x_3 + r_{32} . \cos(\alpha_{32} + \varphi_3), \qquad y_2' = y_3 + r_{32} . \sin(\alpha_{32} + \varphi_3),$$
$$x_3' = x_3 + r_{33} . \cos(\alpha_{33} + \varphi_3); \qquad y_3' = y_3 + r_{33} . \sin(\alpha_{33} + \varphi_3).$$

Aus der ersten dieser vier Gruppen von Gleichungen erhält man:

$$x_0' - x_1' = r_{00} . \cos\varphi_0 - r_{01} . \cos(\alpha_{01} + \varphi_0),$$
$$x_0' - x_2' = r_{00} . \cos\varphi_0 - r_{02} . \cos(\alpha_{02} + \varphi_0),$$
$$x_0' - x_3' = r_{00} . \cos\varphi_0 - r_{03} . \cos(\alpha_{03} + \varphi_0);$$

$$y_0' - y_1' = r_{00} . \sin\varphi_0 - r_{01} . \sin(\alpha_{01} + \varphi_0),$$
$$y_0' - y_2' = r_{00} . \sin\varphi_0 - r_{02} . \sin(\alpha_{02} + \varphi_0),$$
$$y_0' - y_3' = r_{00} . \sin\varphi_0 - r_{03} . \sin(\alpha_{03} + \varphi_0);$$

also:

$$(x_0' - x_1')\sin(\alpha_{01} + \varphi_0) - (y_0' - y_1')\cos(\alpha_{01} + \varphi_0) = r_{00} . \sin\alpha_{01},$$
$$(x_0' - x_2')\sin(\alpha_{02} + \varphi_0) - (y_0' - y_2')\sin(\alpha_{02} + \varphi_0) = r_{00} . \sin\alpha_{02},$$
$$(x_0' - x_3')\sin(\alpha_{03} + \varphi_0) - (y_0' - y_3')\sin(\alpha_{03} + \varphi_0) = r_{00} . \sin\alpha_{03};$$

und folglich, wenn der Kürze wegen

$$2) \ldots \begin{cases} A_{01} = (x_0' - x_1')\sin\alpha_{01} - (y_0' - y_1')\cos\alpha_{01}, \\ A_{02} = (x_0' - x_2')\sin\alpha_{02} - (y_0' - y_2')\cos\alpha_{02}, \\ A_{03} = (x_0' - x_3')\sin\alpha_{03} - (y_0' - y_3')\cos\alpha_{03} \end{cases}$$

und

$$3) \ldots \left\{\begin{array}{l} B_{01}=(x_0'-x_1')\cos\alpha_{01}+(y_0'-y_1')\sin\alpha_{01}, \\ B_{02}=(x_0'-x_2')\cos\alpha_{02}+(y_0'-y_2')\sin\alpha_{02}, \\ B_{03}=(x_0'-x_3')\cos\alpha_{03}+(y_0'-y_3')\sin\alpha_{03} \end{array}\right.$$

gesetzt wird:

$$\frac{A_{01}+B_{01}\operatorname{tang}\varphi_0}{A_{02}+B_{02}\operatorname{tang}\varphi_0}=\frac{\sin\alpha_{01}}{\sin\alpha_{02}},$$

$$\frac{A_{02}+B_{02}\operatorname{tang}\varphi_0}{A_{03}+B_{03}\operatorname{tang}\varphi_0}=\frac{\sin\alpha_{02}}{\sin\alpha_{03}};$$

woraus sogleich:

$$4) \ldots \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang}\varphi_0=-\dfrac{A_{01}\sin\alpha_{02}-A_{02}\sin\alpha_{01}}{B_{01}\sin\alpha_{02}-B_{02}\sin\alpha_{01}}, \\ \operatorname{tang}\varphi_0=-\dfrac{A_{02}\sin\alpha_{03}-A_{03}\sin\alpha_{02}}{B_{02}\sin\alpha_{03}-B_{03}\sin\alpha_{02}} \end{array}\right.$$

folgt.

Also hat man die Gleichung:

$$(A_{01}\sin\alpha_{02}-A_{02}\sin\alpha_{01})(B_{02}\sin\alpha_{03}-B_{03}\sin\alpha_{02})$$
$$=(A_{02}\sin\alpha_{03}-A_{03}\sin\alpha_{02})(B_{01}\sin\alpha_{02}-B_{02}\sin\alpha_{01}),$$

woraus nach gehöriger Entwickelung, wenn man zugleich durch $\sin\alpha_0$ dividirt, folgt:

$$5) \ldots \left.\begin{array}{l} (A_{02}B_{03}-A_{03}B_{02})\sin\alpha_{01} \\ +(A_{03}B_{01}-A_{01}B_{03})\sin\alpha_{02} \\ +(A_{01}B_{02}-A_{02}B_{01})\sin\alpha_{03} \end{array}\right\}=0.$$

Nach leichter Entwickelung findet man aber, wenn der Kürze wegen:

$$6) \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}_{23}=(x_0'-x_2')(x_0'-x_3')+(y_0'-y_2')(y_0'-y_3'), \\ \mathfrak{A}_{31}=(x_0'-x_3')(x_0'-x_1')+(y_0'-y_3')(y_0'-y_1'), \\ \mathfrak{A}_{12}=(x_0'-x_1')(x_0'-x_2'+(y_0'-y_1')(y_0'-y_2') \end{array}\right.$$

und

$$7) \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}_{23}=(x_0'-x_2')(y_0'-y_3')-(x_0'-x_3')(y_0'-y_2'), \\ \mathfrak{B}_{31}=(x_0'-x_3')(y_0'-y_1')-(x_0'-x_1')(y_0'-y_3'), \\ \mathfrak{B}_{12}=(x_0'-x_1')(y_0'-y_2')-(x_0'-x_2')(y_0'-y_1') \end{array}\right.$$

gesetzt wird:

$$A_{02}B_{03}-A_{03}B_{02}=\mathfrak{A}_{23}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})+\mathfrak{B}_{23}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03}),$$
$$A_{03}B_{01}-A_{01}B_{03}=\mathfrak{A}_{31}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})+\mathfrak{B}_{31}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01}),$$
$$A_{01}B_{02}-A_{02}B_{01}=\mathfrak{A}_{12}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})+\mathfrak{B}_{12}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02});$$

folglich nach 5):

8)
$$\left.\begin{array}{r}\{\mathfrak{A}_{23}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})+\mathfrak{B}_{23}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\}\sin\alpha_{01}\\+\{\mathfrak{A}_{31}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})+\mathfrak{B}_{31}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\}\sin\alpha_{02}\\+\{\mathfrak{A}_{12}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})+\mathfrak{B}_{12}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\}\sin\alpha_{03}\end{array}\right\}=0.$$

Nun ist:

$$2\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})=\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02}+\alpha_{03})-\cos(\alpha_{01}+\alpha_{02}-\alpha_{03}),$$
$$2\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})=\cos(\alpha_{01}+\alpha_{02}-\alpha_{03})-\cos(-\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}),$$
$$2\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})=\cos(-\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03})-\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02}+\alpha_{03});$$

also:

$$\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})+\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})+\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})=0;$$

und, was wir hier übrigens bloss beiläufig bemerken:

$$2\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})=\sin(\alpha_{01}+\alpha_{02}-\alpha_{03})+\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}+\alpha_{03}),$$
$$2\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})=\sin(-\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03})+\sin(\alpha_{01}+\alpha_{02}-\alpha_{03}),$$
$$2\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})=\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}+\alpha_{03})+\sin(-\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03});$$

also:

$$\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})+\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})+\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})$$
$$=\sin(-\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03})+\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}+\alpha_{03})+\sin(\alpha_{01}+\alpha_{02}-\alpha_{03}).$$

Folglich ist nach der ersten dieser beiden Relationen offenbar:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{23}\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&+\mathfrak{A}_{31}\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&+\mathfrak{A}_{12}\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
=\;&(x_0'x_1'+y_0'y_1')\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&+(x_0'x_2'+y_0'y_2')\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&+(x_0'x_3'+y_0'y_3')\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
&+(x_2'x_3'+y_2'y_3')\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&+(x_3'x_1'+y_3'y_1')\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&+(x_1'x_2'+y_1'y_2')\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
=\;&(x_0'x_1'+y_0'y_1'+x_2'x_3'+y_2'y_3')\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&+(x_0'x_2'+y_0'y_2'+x_3'x_1'+y_3'y_1')\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&+(x_0'x_3'+y_0'y_3'+x_1'x_2'+y_1'y_2')\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}),
\end{aligned}$$

und ferner ist, wie man leicht übersieht:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_{23}\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&+\mathfrak{B}_{31}\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&+\mathfrak{B}_{12}\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
=&-(x_0'y_1'-y_0'x_1')\{\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})-\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\}\\
&-(x_0'y_2'-y_0'x_2')\{\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})-\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\}\\
&-(x_0'y_3'-y_0'x_3')\{\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})-\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\}\\
&+(x_2'y_3'-y_2'x_3')\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&+(x_3'y_1'-y_3'x_1')\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&+(x_1'y_2'-y_1'x_2')\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
=&-(x_0'y_1'-y_0'x_1')\cos\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&-(x_0'y_2'-y_0'x_2')\cos\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&-(x_0'y_3'-y_0'x_3')\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
&+(x_2'y_3'-y_2'x_3')\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&+(x_3'y_1'-y_3'x_1')\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&+(x_1'y_2'-y_1'x_2')\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02}).
\end{aligned}$$



Führt man nun diese Ausdrücke in die obige Gleichung 8) ein, so erhält man die folgende Gleichung zwischen den Coordinaten der Punkte A_0', A_1', A_2', A_3':

(9)

$$\left.\begin{aligned}
&(x_0'x_1'+y_0'y_1'+x_2'x_3'+y_2'y_3')\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
+&(x_0'x_2'+y_0'y_2'+x_3'x_1'+y_3'y_1')\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
+&(x_0'x_3'+y_0'y_3'+x_1'x_2'+y_1'y_2')\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
&\qquad-(x_0'y_1'-y_0'x_1')\cos\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&\qquad-(x_0'y_2'-y_0'x_2')\cos\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&\qquad-(x_0'y_3'-y_0'x_3')\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\
&\qquad+(x_2'y_3'-y_2'x_3')\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\
&\qquad+(x_3'y_1'-y_3'x_1')\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\
&\qquad+(x_1'y_2'-y_1'x_2')\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})
\end{aligned}\right\}=0.$$

So wie man diese Gleichung aus der ersten der vier Gruppen von Gleichungen in 1) abgeleitet hat, kann man aus jeder der drei übrigen dieser vier Gruppen eine ganz ähnliche Gleichung wie die vorstehende ableiten; und man erhält diese drei neuen Gleichungen aus der vorstehenden sehr leicht, wenn man in dieser letzteren für

$$\alpha_{01},\ \alpha_{02},\ \alpha_{02}$$

nach und nach respective

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13};$$
$$\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23};$$
$$\alpha_{31},\ \alpha_{32},\ \alpha_{33}$$

setzt, wie sich aus den Gleichungen 1) unmittelbar ergiebt. Natürlich lassen sich auf dieselbe Weise aus 2), 3), 4) leicht Ausdrücke für

$$\tang\varphi_1,\ \tang\varphi_2,\ \tang\varphi_3$$

ableiten, welche wir, eben so wie die in Rede stehenden Gleichungen, hier der Kürze wegen nicht besonders mittheilen wollen, weil die Ableitung aus den vorher gefundenen Gleichungen und Formeln in der That nicht der mindesten Schwierigkeit unterliegt.

Zwischen den Coordinaten der Punkte A_0', A_1', A_2', A_3' haben wir nun aber auf diese Weise vier Gleichungen gefunden, was man des Folgenden wegen wohl zu beachten hat.

Um die Gleichung 9), und natürlich eben so auch die drei anderen ihr ähnlichen, zu vereinfachen, wollen wir, was offenbar verstattet ist, den Punkt A_0' als Anfang der Coordinaten annehmen, also

$$x_0'=0,\ y_0'=0$$

setzen, wodurch die Gleichung 9) die folgende Gestalt erhält:

10)

$$\left.\begin{array}{r}(x_2'x_3'+y_2'y_3')\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +(x_3'x_1'+y_3'y_1')\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\ +(x_1'x_2'+y_1'y_2')\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +(x_2'y_3'-y_2'x_3')\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +(x_3'y_1'-y_3'x_1')\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\ +(x_1'y_2'-y_1'x_2')\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\end{array}\right\}=0.$$

Eine weitere Vereinfachung dieser Gleichung wird aber erzielt, wenn man, was offenbar ebenfalls verstattet ist, die Axe der x durch den Punkt A_1' legt, also

$$y_1'=0$$

setzt, wodurch die vorstehende Gleichung in die folgende übergeht:

11)

$$\left.\begin{array}{r}(x_2'x_3'+y_2'y_3')\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +x_3'x_1'\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\ +x_1'x_2'\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +(x_2'y_3'-y_2'x_3')\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ -y_3'x_1'\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})\\ +x_1'y_2'\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\end{array}\right\}=0.$$

Aber auch diese Gleichung ist noch einer bemerkenswerthen Umformung fähig. Setzt man nämlich:

12) . . . . $x_2'=x_1'+u_2',\ y_2'=v_2'$

und bemerkt, dass, wie leicht erhellet:

$$\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})+\sin\alpha_{02}\sin(\alpha_{03}-\alpha_{01})=-\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}),$$

$$\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})-\sin\alpha_{02}\cos(\alpha_{03}-\alpha_{01})=\quad\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})$$



ist; so erhält man mittelst einfacher Rechnung die folgende Gleichung:

13)

$$\left.\begin{array}{r} x_1'(x_1'+u_2'-x_3')\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}) \\ +\,x_1'v_2'\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02}) \\ +\,x_1'y_3'\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}) \\ +\,(u_2'x_3'+v_2'y_3')\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03}) \\ +\,(u_2'y_3'-v_2'x_3')\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03}) \end{array}\right\} = 0.$$

Dividirt man aber diese Gleichung durch $x_1'x_1'$ *), so erhält man die folgende Gleichung:

14)

$$\left.\begin{array}{r} (1+\frac{u_2'}{x_1'}-\frac{x_3'}{x_1'})\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}) \\ +\,\frac{v_2'}{x_1'}\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02}) \\ +\,\frac{y_3'}{x_1'}\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}) \\ +\left(\frac{u_2'}{x_1'}\cdot\frac{x_3'}{x_1'}+\frac{v_2'}{x_1'}\cdot\frac{y_3'}{x_1'}\right)\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03}) \\ +\left(\frac{u_2'}{x_1'}\cdot\frac{y_3'}{x_1'}-\frac{v_2'}{x_1'}\cdot\frac{x_3'}{x_1'}\right)\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03}) \end{array}\right\} = 0,$$

welche in dieser Form nur die vier unbekannten Grössen

$$\frac{u_2'}{x_1'},\quad \frac{v_2'}{x_1'};\quad \frac{x_3'}{x_1'},\quad \frac{y_3'}{x_1'}$$

enthält.

Setzt man aber in dieser Gleichung für

$$\alpha_{01},\ \alpha_{02},\ \alpha_{03}$$

beziehungsweise und nach und nach:

---

*) Wir nehmen an, dass x_1' nicht verschwindet, also die beiden Punkte A_0' und A_1' nicht zusammenfallen.

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13};$$
$$\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23};$$
$$\alpha_{31},\ \alpha_{32},\ \alpha_{33};$$

so erhält man drei neue Gleichungen, welche mit der vorstehenden Gleichung zusammen ein System von vier Gleichungen zwischen den unbekannten Grössen:

$$\frac{u_2'}{x_1'},\quad \frac{v_2'}{x_1'},\quad \frac{x_3'}{x_1'},\quad \frac{y_3'}{x_1'}$$

bilden, die sich also mittelst dieser vier Gleichungen bestimmen lassen.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$15)\ \ldots\ U=\frac{u_2'}{x_1'},\quad V=\frac{v_2'}{x_1'};\quad X=\frac{x_3'}{x_1'},\quad Y=\frac{y_3'}{x_1'};$$

so nimmt die Gleichung 14) die folgende Gestalt an:

16)

$$\left.\begin{aligned}(1+U-X)\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +V\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +Y\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +(UX+VY)\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +(UY-VX)\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\end{aligned}\right\}=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Division mit V die Gleichung:

17)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1+U-X}{V}\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +\frac{Y}{V}\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +\frac{UX+VY}{V}\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +\frac{UY-VX}{V}\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\end{aligned}\right\}=-\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02});$$

und bildet man nun auf die aus dem Obigen bekannte Weise



noch die drei anderen, dieser analogen Gleichungen, so hat man zwischen den vier unbekannten Grössen

$$\frac{1+U-X}{V},\quad \frac{Y}{V},\quad \frac{UX+VY}{V},\quad \frac{UY-VX}{V}$$

vier lineare Gleichungen, mittelst welcher sich diese vier unbekannten Grössen ohne Schwierigkeit bestimmen lassen. Setzen wir nun, dass man auf diese Art gefunden habe:

18)

$$\frac{1+U-X}{V}=a,\quad \frac{Y}{V}=b,\quad \frac{UX+VY}{V}=c,\quad \frac{UY-VX}{V}=d$$

oder:

19)

$$1+U-X=aV,\quad Y=bV,\quad UX+VY=cV,\quad UY-VX=dV;$$

so ergeben sich aus den drei letzten Gleichungen die beiden Gleichungen:

$$UX+bV^2=cV,\quad bU-X=d.$$

Verbindet man aber die beiden Gleichungen

$$U-X=aV-1,\quad bU-X=d$$

mit einander, so erhält man:

$$(1-b)U=aV-1-d,\quad (1-b)X=b(aV-1)-d;$$

also:

$$(1-b)^2UX=(1+d-aV)(b+d-abV),$$

und folglich, wenn man dies in die Gleichung

$$UX+bV^2=cV$$

einführt:

$$(1+d-aV)(b+d-abV)+b(1-b)^2V^2=c(1-b)^2V,$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung zur Bestimmung von V die folgende Gleichung des zweiten Grades erhält:

20)

$$b\{a^2+(1-b)^2\}V^2-\{c(1-b)^2+a(2b+(1+b)d)\}V+(1+d)(b+d)=0.$$

Hat man mittelst dieser Gleichung V bestimmt, so ergeben sich



U, X, Y mittelst der folgenden, aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

21)

$$(1-b)U=aV-1-d,\quad (1-b)X=b(aV-1)-d,\quad Y=bV.$$

Dividirt man die Gleichung 16) durch Y, so wird dieselbe:

22)

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1+U-X}{Y}\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +\frac{V}{Y}\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +\frac{UX+VY}{Y}\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +\frac{UY-VX}{Y}\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\end{array}\right\}=-\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02}),$$

und bildet man nun auf bekannte Weise die drei anderen analogen Gleichungen, so hat man wiederum vier lineare Gleichungen zwischen den unbekannten Grössen

$$\frac{1+U-X}{Y},\quad \frac{V}{Y},\quad \frac{UX+VY}{Y},\quad \frac{UY-VX}{Y};$$

aus denen sich diese unbekannten Grössen bestimmen lassen, wodurch man:

23)

$$\frac{1+U-X}{Y}=a,\quad \frac{V}{Y}=b,\quad \frac{UX+VY}{Y}=c,\quad \frac{UY-VX}{Y}=d$$

oder

24)

$$1+U-X=aY,\quad V=bY,\quad UX+VY=cY,\quad UY-VX=dY$$

erhalten mag. Aus den drei letzten Gleichungen ergeben sich die Gleichungen: $UX+bY^2=cY$, $U-bX=d$. Verbindet man aber die beiden Gleichungen $U-X=aY-1$, $U-bX=d$ mit einander, so erhält man:

$$-(1-b)X=aY-1-d,\quad (1-b)U=b(1-aY)+d,$$

also:

$$(1-b)^2UX=(1+d-aY)(b+d-abY),$$

und folglich, wenn man dies in die Gleichung $UX+bY^2=cY$ einführt:



$$(1+d-aY)(b+d-abY)+b(1-b)^2Y^2=c(1-b)^2Y,$$

woraus sich nach gehöriger Entwickelung zur Bestimmung von Y die folgende Gleichung des zweiten Grades ergiebt:

25)

$$\left.\begin{array}{r} b\{a^2+(1-b)^2\}Y^2-\{c(1-b)^2+a(2b+(1+b)d)\}Y \\ +(1+d)(b+d) \end{array}\right\}=0.$$

Hat man mittelst dieser Gleichung Y bestimmt, so ergeben sich X, U, V mittelst der folgenden, aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

26)

$$(1-b)X=1+d-aY,\quad (1-b)U=b(1-aY)+d,\quad V=bY.$$

Jede dieser beiden Auflösungen kann bei der Bestimmung der vier unbekannten Grössen aus den vier linearen Gleichungen auf das Symbol des Unendlichen führen, was bei der ersten Auflösung jederzeit der Fall sein muss, wenn $V=0$, $v_2'=0$, $y_2'=0$ ist, wenn also die drei Punkte A_0', A_1', A_2' in einer Geraden liegen; bei der zweiten Auflösung, wenn $Y=0$, $y_3'=0$ ist, wenn also die drei Punkte A_0', A_1', A_3' in einer Geraden liegen. Träte also einer der beiden in Rede stehenden Fälle ein, so würde man dann immer die andere Auflösung anzuwenden haben. Träten aber die beiden in Rede stehenden Fälle zugleich ein, was jederzeit geschehen müsste, wenn $y_2'=0$, $y_3'=0$ wäre, wenn also die vier Punkte A_0', A_1', A_2', A_3' in einer Geraden liegen, so würde keine der beiden vorhergehenden Auflösungen brauchbar sein.

In einem solchen Falle wäre aber $V=0$, $Y=0$, und die Gleichung 16) würde also folgende Gestalt annehmen:

27)

$$(1+U-X)\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})+UX\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})=0$$

oder

$$28)\quad (U-X)\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})+UX\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})$$
$$=-\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02});$$

und bildete man hierzu nur noch eine zweite analoge Gleichung, so würde man zwischen den unbekannten Grössen $U-X$ und UX zwei lineare Gleichungen haben, aus denen sich

$$29)\; \ldots\ldots\ldots\quad U-X=a,\quad UX=b$$

finden lassen, woraus sich dann auf allgemein bekannte Weise ferner U und X selbst durch Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades ergeben, was einer weiteren Erläuterung hier natürlich nicht bedarf.

Hat man nun U, V, X, Y gefunden, so erhält man u_2', v_2'; x_3', y_3' nach 15) mittelst der Formeln:

$$30) \quad . \; . \; u_2'=Ux_1', \; v_2'=Vx_1'; \quad x_3'=Xx_1', \; y_3'=Yx_1';$$

natürlich alle diese Grössen bloss durch x_1' gewissermassen als Einheit ausgedrückt, indem sich selbstverständlich unter den gemachten Voraussetzungen gar nicht mehr finden, gar nicht mehr leisten lässt, da wir ja angenommen haben, dass blosse Winkelmessungen gemacht worden seien; nur wenn x_1' noch selbst gemessen worden wäre, würden sich die wirklichen linearen Werthe der übrigen Coordinaten und Entfernungen bestimmen lassen. Ist dies aber nicht der Fall, so genügt es, in allen obigen Formeln $x_1'=1$ zu setzen, wo dann die von A_0' nach A_1' hin gehende Gerade als der positive Theil der Axe der x angenommen worden ist.

Hiernach wird nun der Winkel φ_0 mittelst einer der beiden Formeln 4) bestimmt, und r_{00} ergiebt sich mittelst einer der folgenden, aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

31)

$$(x_0'-x_1')\sin(\alpha_{01}+\varphi_0)-(y_0'-y_1')\cos(\alpha_{01}+\varphi_0)=r_{00}.\sin\alpha_{01},$$

$$(x_0'-x_2')\sin(\alpha_{02}+\varphi_0)-(y_0'-y_2')\cos(\alpha_{02}+\varphi_0)=r_{00}.\sin\alpha_{02},$$

$$(x_0'-x_3')\sin(\alpha_{03}+\varphi_0)-(y_0'-y_3')\cos(\alpha_{03}+\varphi_0)=r_{00}.\sin\alpha_{03}.$$

Für φ_0 liefern die Formeln 4) freilich immer zwei um 180° verschiedene Werthe, die aber, in die Gleichungen 31) eingeführt, für r_{00} offenbar Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern; und da nun r_{00} seiner Natur nach positiv ist, so kann nie ein Zweifel bleiben, wie man φ_0 zu nehmen hat.

Die Entfernungen r_{01}, r_{02}, r_{03} werden mittelst der aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

32)

$$x_0'-x_1'=r_{00}.\cos\varphi_0-r_{01}.\cos(\alpha_{01}+\varphi_0),$$

$$x_0'-x_2'=r_{00}.\cos\varphi_0-r_{02}.\cos(\alpha_{02}+\varphi_0),$$

$$x_0'-x_3'=r_{00}.\cos\varphi_0-r_{03}.\cos(\alpha_{03}+\varphi_0)$$

oder



$$33) \ldots \begin{cases} y_0' - y_1' = r_{00}.\sin\varphi_0 - r_{01}.\sin(\alpha_{01}+\varphi_0), \\ y_0' - y_2' = r_{00}.\sin\varphi_0 - r_{02}.\sin(\alpha_{02}+\varphi_0), \\ y_0' - y_3' = r_{00}.\sin\varphi_0 - r_{03}.\sin(\alpha_{03}+\varphi_0) \end{cases}$$

gefunden; und die Coordinaten x_0, y_0 erhält man mittelst der folgenden, unmittelbar aus 1) sich ergebenden Formeln:

34)

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0' - r_{00}.\cos\varphi_0, & y_0 &= y_0' - r_{00}.\sin\varphi_0, \\ x_0 &= x_1' - r_{01}.\cos(\alpha_{01}+\varphi_0), & y_0 &= y_1' - r_{01}.\sin(\alpha_{01}+\varphi_0), \\ x_0 &= x_2' - r_{02}.\cos(\alpha_{02}+\varphi_0), & y_0 &= y_2' - r_{02}.\sin(\alpha_{02}+\varphi_0), \\ x_0 &= x_3' - r_{03}.\cos(\alpha_{03}+\varphi_0); & y_0 &= y_3' - r_{03}.\sin(\alpha_{03}+\varphi_0). \end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Art findet man, so wie man jetzt φ_0; r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{03}; x_0, y_0 gefunden hat, mittelst nach dem Vorhergehenden leicht aufzustellender Formeln und Gleichungen die Grössen

$$\begin{aligned} &\varphi_1; \quad r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}; \quad x_1, y_1; \\ &\varphi_2; \quad r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}; \quad x_2, y_2; \\ &\varphi_3; \quad r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}; \quad x_3, y_3. \end{aligned}$$

Natürlich lässt die jetzt als vollständig gelöst zu betrachtende Aufgabe im Allgemeinen zwei Auflösungen zu, weil sie auf eine Gleichung des zweiten Grades führt.

Es giebt noch eine Klasse bemerkenswerther Relationen zwischen den Entfernungen r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{03}, die wir jetzt noch entwickeln wollen, wobei es sich von selbst versteht, dass ganz ähnliche Relationen sich zwischen den Entfernungen

$$r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}; \quad r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}; \quad r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}$$

würden aufstellen lassen.

Aus den Gleichungen 1) erhält man leicht die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= r_{00}.\cos\varphi_0 - r_{10}.\cos\varphi_1 \\ &= r_{01}.\cos(\alpha_{01}+\varphi_0) - r_{11}.\cos(\alpha_{11}-\varphi_1) \\ &= r_{02}.\cos(\alpha_{02}+\varphi_0) - r_{12}.\cos(\alpha_{12}+\varphi_1) \\ &= r_{03}.\cos(\alpha_{03}+\varphi_0) - r_{13}.\cos(\alpha_{13}+\varphi_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= r_{00}.\sin\varphi_0 - r_{10}.\sin\varphi_1 \\ &= r_{01}.\sin(\alpha_{01}+\varphi_0) - r_{11}.\sin(\alpha_{11}+\varphi_1) \\ &= r_{02}.\sin(\alpha_{02}+\varphi_0) - r_{12}.\sin(\alpha_{12}+\varphi_1) \\ &= r_{03}.\sin(\alpha_{03}+\varphi_0) - r_{13}.\sin(\alpha_{13}+\varphi_1); \end{aligned}$$

$$x_2-x_0=r_{00}.\cos\varphi_0-r_{20}.\cos\varphi_2$$
$$=r_{01}.\cos(\alpha_{01}+\varphi_0)-r_{21}.\cos(\alpha_{21}+\varphi_2)$$
$$=r_{02}.\cos(\alpha_{02}+\varphi_0)-r_{22}.\cos(\alpha_{22}+\varphi_2)$$
$$=r_{03}.\cos(\alpha_{03}+\varphi_0)-r_{23}.\cos(\alpha_{23}+\varphi_2),$$

$$y_2-y_0=r_{00}.\sin\varphi_0-r_{20}.\sin\varphi_2$$
$$=r_{01}.\sin(\alpha_{01}+\varphi_0)-r_{21}.\sin(\alpha_{21}+\varphi_2)$$
$$=r_{02}.\sin(\alpha_{02}+\varphi_0)-r_{22}.\sin(\alpha_{22}+\varphi_2)$$
$$=r_{03}.\sin(\alpha_{03}+\varphi_0)-r_{23}.\sin(\alpha_{23}+\varphi_2);$$

$$x_3-x_0=r_{00}.\cos\varphi_0-r_{30}.\cos\varphi_3$$
$$=r_{01}.\cos(\alpha_{01}+\varphi_0)-r_{31}.\cos(\alpha_{31}+\varphi_3)$$
$$=r_{02}.\cos(\alpha_{02}+\varphi_0)-r_{32}.\cos(\alpha_{32}+\varphi_3)$$
$$=r_{03}.\cos(\alpha_{03}+\varphi_0)-r_{33}.\cos(\alpha_{33}+\varphi_3),$$

$$y_3-y_0=r_{00}.\sin\varphi_0-r_{30}.\sin\varphi_3$$
$$=r_{01}.\sin(\alpha_{01}+\varphi_0)-r_{31}.\sin(\alpha_{31}+\varphi_3)$$
$$=r_{02}.\sin(\alpha_{02}+\varphi_0)-r_{32}.\sin(\alpha_{32}+\varphi_3)$$
$$=r_{03}.\sin(\alpha_{03}+\varphi_0)-r_{33}.\sin(\alpha_{33}+\varphi_3);$$

und hieraus ergiebt sich weiter:

$$(x_1-x_0)\sin\varphi_1-(y_1-y_0)\cos\varphi_1=r_{00}.\sin(\varphi_1-\varphi_0),$$
$$(x_1-x_0)\sin(\alpha_{11}+\varphi_1)-(y_1-y_0)\cos(\alpha_{11}+\varphi_1)=r_{01}.\sin\{(\alpha_{11}-\alpha_{01})+(\varphi_1-\varphi_0)\},$$
$$(x_1-x_0)\sin(\alpha_{12}+\varphi_1)-(y_1-y_0)\cos(\alpha_{12}+\varphi_1)=r_{02}.\sin\{(\alpha_{12}-\alpha_{02})+(\varphi_1-\varphi_0)\},$$
$$(x_1-x_0)\sin(\alpha_{13}+\varphi_1)-(y_1-y_0)\cos(\alpha_{13}+\varphi_1)=r_{03}.\sin\{(\alpha_{13}-\alpha_{03})+(\varphi_1-\varphi_0)\};$$

$$(x_2-x_0)\sin\varphi_2-(y_2-y_0)\cos\varphi_2=r_{00}.\sin(\varphi_2-\varphi_0),$$
$$(x_2-x_0)\sin(\alpha_{21}+\varphi_2)-(y_2-y_0)\cos(\alpha_{21}+\varphi_2)=r_{01}.\sin\{(\alpha_{21}-\alpha_{01})+(\varphi_2-\varphi_0)\},$$
$$(x_2-x_0)\sin(\alpha_{22}+\varphi_2)-(y_2-y_0)\cos(\alpha_{22}+\varphi_2)=r_{02}.\sin\{(\alpha_{22}-\alpha_{02})+(\varphi_2-\varphi_0)\},$$
$$(x_2-x_0)\sin(\alpha_{23}+\varphi_2)-(y_2-y_0)\cos(\alpha_{23}+\varphi_2)=r_{03}.\sin\{(\alpha_{23}-\alpha_{03})+(\varphi_2-\varphi_0)\};$$

$$(x_3-x_0)\sin\varphi_3-(y_3-y_0)\cos\varphi_3=r_{00}.\sin(\varphi_3-\varphi_0),$$
$$(x_3-x_0)\sin(\alpha_{31}+\varphi_3)-(y_3-y_0)\cos(\alpha_{31}+\varphi_3)=r_{01}.\sin\{(\alpha_{31}-\alpha_{01})+(\varphi_3-\varphi_0)\},$$
$$(x_3-x_0)\sin(\alpha_{32}+\varphi_3)-(y_3-y_0)\cos(\alpha_{32}+\varphi_3)=r_{02}.\sin\{(\alpha_{32}-\alpha_{02})+(\varphi_3-\varphi_0)\},$$
$$(x_3-x_0)\sin(\alpha_{33}+\varphi_3)-(y_3-y_0)\cos(\alpha_{33}+\varphi_3)=r_{03}.\sin\{(\alpha_{33}-\alpha_{03})+(\varphi_3-\varphi_0)\}.$$

Fassen wir nun die erste dieser drei Gruppen in's Auge, und eliminiren auf bekannte Weise aus der 1sten, 2ten, 3ten und 1sten, 3ten, 4ten Gleichung in dieser Gruppe die beiden Grössen x_1-x_0 und y_1-y_0, so erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} r_{00}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})\sin(\varphi_1-\varphi_0)+r_{01}.\sin\alpha_{12}\sin\{(\alpha_{11}-\alpha_{01})+(\varphi_1-\varphi_0)\} \\ -r_{02}.\sin\alpha_{11}\sin\{(\alpha_{12}-\alpha_{02})+(\varphi_1-\varphi_0)\} \end{array}\right\}=0,$$



$$\left.\begin{array}{r} r_{00}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13})\sin(\varphi_1-\varphi_0)+r_{02}.\sin\alpha_{13}\sin\{(\alpha_{12}-\alpha_{02})+(\varphi_1-\varphi_0)\} \\ -r_{03}.\sin\alpha_{12}\sin\{(\alpha_{13}-\alpha_{03})+(\varphi_1-\varphi_0)\} \end{array}\right\}=0;$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r} \{r_{00}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})+r_{01}.\sin\alpha_{12}\cos(\alpha_{11}-\alpha_{01}) \\ -r_{02}.\sin\alpha_{11}\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02})\}\sin(\varphi_1-\varphi_0) \\ +\{r_{01}.\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})-r_{02}.\sin\alpha_{11}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\}\cos(\varphi_1-\varphi_0) \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} \{r_{00}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13})+r_{02}.\sin\alpha_{13}\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02}) \\ -r_{03}.\sin\alpha_{12}\cos(\alpha_{13}-\alpha_{03})\}\sin(\varphi_1-\varphi_0) \\ +\{r_{02}.\sin\alpha_{13}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})-r_{03}.\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{13}-\alpha_{03})\}\cos(\varphi_1-\varphi_0) \end{array}\right\}=0;$$

woraus sich durch Division die folgende Gleichung ergiebt:

$$\frac{r_{00}.\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})+r_{01}.\sin\alpha_{12}\cos(\alpha_{11}-\alpha_{01})-r_{02}.\sin\alpha_{11}\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02})}{r_{00}.\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13})+r_{02}.\sin\alpha_{13}\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02})-r_{03}.\sin\alpha_{12}\cos(\alpha_{13}-\alpha_{03})}$$

$$=\frac{r_{01}.\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})-r_{02}.\sin\alpha_{11}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})}{r_{02}.\sin\alpha_{13}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})-r_{03}.\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{13}-\alpha_{03})}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man aber durch Multiplication, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung:

$$\begin{aligned}
0= \;& r_{00}r_{01}\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13}) \\
&-r_{00}r_{02}\sin\alpha_{11}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13}) \\
&-r_{00}r_{02}\sin\alpha_{13}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12}) \\
&+r_{00}r_{03}\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{13}-\alpha_{03})\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12}) \\
&+r_{01}r_{02}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{13}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02}) \\
&-r_{01}r_{02}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{13}\cos(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02}) \\
&+r_{01}r_{03}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{13}-\alpha_{03})\cos(\alpha_{11}-\alpha_{01}) \\
&-r_{01}r_{03}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{12}\cos(\alpha_{13}-\alpha_{03})\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01}) \\
&+r_{02}r_{03}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{11}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\cos(\alpha_{13}-\alpha_{03}) \\
&-r_{02}r_{03}\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{11}\cos(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{13}-\alpha_{03}),
\end{aligned}$$

also, weil, wie man leicht findet:

$$\sin\alpha_{11}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13})+\sin\alpha_{13}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})=-\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{13}-\alpha_{11})$$

ist, wenn man nach Einführung dieser Grösse die Gleichung durch $\sin\alpha_{12}$ dividirt:



35)

$$\left.\begin{aligned}
&r_{00}r_{01}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13})\\
+\,&r_{00}r_{02}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{13}-\alpha_{11})\\
+\,&r_{00}r_{03}\sin(\alpha_{13}-\alpha_{03})\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12})\\
+\,&r_{01}r_{02}\sin\alpha_{13}\sin(\alpha_{11}-\alpha_{12}+\alpha_{02}-\alpha_{01})\\
+\,&r_{01}r_{03}\sin\alpha_{12}\sin(\alpha_{13}-\alpha_{11}+\alpha_{01}-\alpha_{03})\\
+\,&r_{02}r_{03}\sin\alpha_{11}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{13}+\alpha_{03}-\alpha_{02})
\end{aligned}\right\}=0;$$

und setzt man in dieser Gleichung für α_{01}, α_{02}, α_{03}, α_{11}, α_{12}, α_{13} respective α_{01}, α_{02}, α_{03}, α_{21}, α_{22}, α_{23} und α_{01}, α_{02}, α_{03}, α_{31}, α_{32}, α_{33}; so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

36)

$$\left.\begin{aligned}
&r_{00}r_{01}\sin(\alpha_{21}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{22}-\alpha_{23})\\
+\,&r_{00}r_{02}\sin(\alpha_{22}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{23}-\alpha_{21})\\
+\,&r_{00}r_{03}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{03})\sin(\alpha_{21}-\alpha_{22})\\
+\,&r_{01}r_{02}\sin\alpha_{23}\sin(\alpha_{21}-\alpha_{22}+\alpha_{02}-\alpha_{01})\\
+\,&r_{01}r_{03}\sin\alpha_{22}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{21}+\alpha_{01}-\alpha_{03})\\
+\,&r_{02}r_{03}\sin\alpha_{21}\sin(\alpha_{22}-\alpha_{23}+\alpha_{03}-\alpha_{02})
\end{aligned}\right\}=0$$

und:

37)

$$\left.\begin{aligned}
&r_{00}r_{01}\sin(\alpha_{31}-\alpha_{01})\sin(\alpha_{32}-\alpha_{33})\\
+\,&r_{00}r_{02}\sin(\alpha_{32}-\alpha_{02})\sin(\alpha_{33}-\alpha_{31})\\
+\,&r_{00}r_{03}\sin(\alpha_{33}-\alpha_{03})\sin(\alpha_{31}-\alpha_{32})\\
+\,&r_{01}r_{02}\sin\alpha_{33}\sin(\alpha_{31}-\alpha_{32}+\alpha_{02}-\alpha_{01})\\
+\,&r_{01}r_{03}\sin\alpha_{32}\sin(\alpha_{33}-\alpha_{31}+\alpha_{01}-\alpha_{03})\\
+\,&r_{02}r_{03}\sin\alpha_{31}\sin(\alpha_{32}-\alpha_{33}+\alpha_{03}-\alpha_{02})
\end{aligned}\right\}=0.$$

Dividirt man diese drei Gleichungen durch $r_{00}r_{00}$, so erhält man zwischen den drei Grössen $\frac{r_{01}}{r_{00}}$, $\frac{r_{02}}{r_{00}}$, $\frac{r_{03}}{r_{00}}$ drei Gleichungen von der Form:

38)

$$a\frac{r_{01}}{r_{00}}+b\,\frac{r_{02}}{r_{00}}+c\,\frac{r_{03}}{r_{00}}+d\,\frac{r_{01}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{02}}{r_{00}}+e\,\frac{r_{01}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{03}}{r_{00}}+f\,\frac{r_{02}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{03}}{r_{00}}=0,$$

$$a_1\frac{r_{01}}{r_{00}}+b_1\frac{r_{02}}{r_{00}}+c_1\frac{r_{03}}{r_{00}}+d_1\frac{r_{01}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{02}}{r_{00}}+e_1\frac{r_{01}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{03}}{r_{00}}+f_1\frac{r_{02}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{03}}{r_{00}}=0,$$

$$a_2\frac{r_{01}}{r_{00}}+b_2\frac{r_{02}}{r_{00}}+c_2\frac{r_{03}}{r_{00}}+d_2\frac{r_{01}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{02}}{r_{00}}+e_2\frac{r_{01}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{03}}{r_{00}}+f_2\frac{r_{02}}{r_{00}}\cdot\frac{r_{03}}{r_{00}}=0;$$

mittelst welcher sich die drei in Rede stehenden Grössen müssen bestimmen lassen.



V.

Note über die Integration der linearen Differentialgleichung

$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0. \qquad (1)$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Alle Differentialgleichungen dieser Form können, wie immer auch die constanten Zahlen a_2, b_2; a_1, b_1; a_0, b_0 beschaffen sind, auf folgende Form gebracht werden:

(2)

$$(m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0.$$

Diese Differentialgleichung wollen wir nun hier in dem Falle integriren, wo A eine ganze positive Zahl ist.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$y=e^{\alpha x}z.$$

Dadurch erhalten wir:

$$(m+x)z''+[A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z'+A(\alpha-\beta)z=0;$$

sodann integriren wir diese Gleichung A-mal, wir kommen durch diess zu der Gleichung:

$$(m+x)z^{(-A+2)}+[B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(-A+1)}$$

$$=C_1+C_2(m+x)+C_3(m+x)^2+\dots+C_A(m+x)^{A-1},$$



aus welcher folgt:

$$z^{(-A+1)} = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x}\psi(x)dx\,,$$

wenn $\psi(x)$ der Kürze halber statt

$$C_1 + C_2(m+x) + C_3(m+x)^2 + \ldots + C_A(m+x)^{A-1}$$

gesetzt wird. $C_1, C_2, C_3, \ldots C_A$ bedeuten willkührliche Constanten. Nun ist aber

$$\int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x}\psi(x)dx = L_1\int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x}dx$$

$$+ (m+x)^B e^{(\alpha-\beta)x}[L_2 + L_3(m+x) + \ldots + L_A(m+x)^{A-2}];$$

folglich erhält man für $z^{(-A+1)}$ folgenden Werth:

$$z^{(-A+1)} = L_1\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x}dx$$

$$+ L_2 + L_3(m+x) + \ldots + L_A(m+x)^{A-2};$$

und wird diese Gleichung $(A-1)$mal differenzirt, so erhält man:

$$z = L_1\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x}dx\right];$$

folglich ist

$$y = L_1 e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^B}\int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x}dx\right]$$

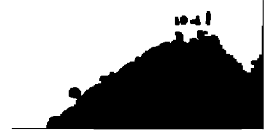
das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung; hiebei bedeutet L_1 eine willkührliche Constante; die andere willkührliche Constante ist verborgen unter dem Integralzeichen, welches in y erscheint.

Construction derjenigen linearen Differentialgleichung, der genügt wird durch

$$y = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\int_0^1 e^{mux^2} u^{A-1}(1-u)^{B-1}du\,,$$

vorausgesetzt, dass λ eine ganze positive Zahl, m eine beliebige Zahl ist, und A und B solche positive Zahlen bedeuten, deren Summe gleich $\frac{3}{2}$ ist.

Es ist bekannt, dass diejenige lineare Differentialgleichung, der genügt wird durch



$$z=\int_0^1 e^{u\xi}u^{A-1}(1-u)^{B-1}du, \tag{3}$$

folgende Gestalt hat:

$$\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}+(A+B-\xi)\frac{dz}{d\xi}-Az=0,$$

und setzt man

$$A+B=\tfrac{2}{3},$$

so erhält man:

$$\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}+(\tfrac{2}{3}-\xi)\frac{dz}{d\xi}-Az=0. \tag{4}$$

Nun setzen wir in (3) und (4)

$$\xi=mx^3,$$

so ist

$$z=\int_0^1 e^{mux^3}u^{A-1}(1-u)^{B-1}du \tag{5}$$

das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=3mx^2\frac{dz}{dx}+9Amxz. \tag{6}$$

Differenzirt man nun die Gleichung (6) $(\lambda+1)$mal, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{d^{\lambda+3}z}{dx^{\lambda+3}} \tag{7}$$

$$=3mx^2\frac{d^{\lambda+2}z}{dx^{\lambda+2}}+3m(2\lambda+3A+2)x\frac{d^{\lambda+1}z}{dx^{\lambda+1}}+3m(\lambda+1)(\lambda+3A)\frac{d^{\lambda}z}{dx^{\lambda}},$$

und ihr genügt:

$$\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}=\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\int_0^1 e^{mux^3}u^{A-1}(1-u)^{B-1}du; \tag{8}$$

folglich erhält man,

$$\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}=y$$

setzend, die Differentialgleichung:

$$y''' = 3mx^2y'' + 3m(2\lambda + 3A + 2)xy' + 3m(\lambda + 1)(\lambda + 3A)y \quad (9)$$

und das Integral derselben ist:

$$y = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\int_0^1 e^{mux^3} u^{A-1}(1-u)^{B-1}du. \quad (10)$$

Der Gleichung (4) genügt auch

$$z = \sqrt[3]{\xi}\int_0^1 e^{u\xi} u^{-B}(1-u)^{-A}du,$$

folglich erhält man für die Gleichung (9) auch folgendes partielle Integral:

$$y = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}[x\int_0^1 e^{mux^3} u^{-B}(1 - u^{-A}du]$$

und somit ist:

$$y = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\int_0^1 e^{mux^3}[C_1 u^{A-1}(1-u)^{B-1} + C_2 x u^{-B}(1-u)^{-A}]du$$

ein, mit zwei willkührlichen Constanten C_1 und C_2 versehener, der Gleichung (9) genügender Ausdruck.

VI.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$A_1x^2y^{(n+2)} + B_1xy^{(n+1)} + C_1y^{(n)} = x^m(Ax^2y'' + Bxy' + Cy), \quad (1)$$

woselbst A_1, B_1, C_1, m, A, B, C constante Zahlen bezeichnen, mittelst bestimmter Integrale.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Der Gleichung (1) genügt man durch Integrale folgender Form:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\,V du, \qquad (2)$$

woselbst $\psi(x)$ eine solche Function von x bedeutet, welche aus der Gleichung

$$\psi^{(n)}(x) = x^m\psi(x) \qquad (3)$$

hervorgeht, woselbst ferner V eine zu bestimmende Function von u ist, und wo endlich u_1, u_2 constante Zahlen sind.

Um diess darzuthun, substituire man den Ausdruck (2) in die Gleichung (1); man erhält sodann:

(4)

$$\int_{u_1}^{u_2} [A_1x^2u^{n+2}\psi^{(n+2)}(ux) + B_1xu^{n+1}\psi^{(n+1)}(ux) + C_1u^n\psi^{(n)}(ux)]\,V du$$

$$= x^m \int_{u_1}^{u_2} [Ax^2u^2\psi''(ux) + Axu\psi'(ux) + C\psi(ux)]\,V du.$$

Nun ist aber:

$$\psi^{(n)}(x) = x^m \psi(x),$$

folglich hat man:

$$\psi^{(n+1)}(x) = x^m \psi'(x) + m x^{m-1} \psi(x),$$
$$\psi^{(n+2)}(x) = x^m \psi''(x) + 2m x^{m-1} \psi'(x) + m(m-1) x^{m-2} \psi(x);$$

und setzt man in die drei so eben aufgestellten Gleichungen ux statt x, so erhält man:

$$\psi^{(n)}(ux) = u^m x^m \psi(ux),$$
$$\psi^{(n+1)}(ux) = u^m x^m \psi'(ux) + m u^{m-1} x^{m-1} \psi(ux),$$
$$\psi^{(n+2)}(ux) = u^m x^m \psi''(ux) + 2m u^{m-1} x^{m-1} \psi'(ux) + m(m-1) u^{m-2} x^{m-2} \psi(ux).$$

Führt man diese Werthe von $\psi^{(n)}(ux)$, $\psi^{(n+1)}(ux)$ und $\psi^{(n+2)}(ux)$ in die Gleichung (4) ein, so erhält man, beiderseits gleich durch x^m dividirend, die Gleichung:

$$\int_{u_1}^{u_2} \{ A_1 u^{m+n+2} x^2 \psi''(ux) + (2mA_1 + B_1) u^{m+n+1} x \psi'(ux) + [m(m-1)A_1 + mB_1 + C_1] u^{m+n} \psi(ux) \} V du$$
$$= \int_{u_1}^{u_2} [A u^2 x^2 \psi''(ux) + B u x \psi'(ux) + C \psi(ux)] V du,$$

welche folgendermaassen geordnet werden kann:

(5)

$$x^2 \int_{u_1}^{u_2} u^2 (A - A_1 u^{m+n}) \psi''(ux) V du$$
$$+ x \int_{u_1}^{u_2} u [B - (2mA_1 + B_1) u^{m+n}] \psi'(ux) V du$$
$$+ \int_{u_1}^{u_2} [C - (m^2 A_1 + mB_1 - mA_1 + C_1) u^{m+n}] \psi(ux) V du = 0.$$

Man erhält aber bekanntlich mittelst der Methode des theilweisen Integrirens:



$$x^2\int_{u_1}^{u_2} W\psi''(ux)du = \{Wx\psi'(ux)-W'\psi(ux)\}_{u_1}^{u_2}+\int_{u_1}^{u_2} W''\psi(ux)du,$$

$$x\int_{u_1}^{u_2} W\psi'(ux)du = \{W\psi(ux)\}_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2} W'\psi(ux)du\,;$$

und wendet man diess auf die Gleichung (5) an, so erhält man:

$$\{u^2(A-A_1u^{m+n})Vx\psi'(ux)-u^2(A-A_1u^{m+n})V'\psi(ux)$$
$$+u[B-2A+(A_1n-A_1m+2A_1-B_1)u^{m+n}]V\psi(ux)\}_{u_1}^{u_2}$$
$$+\int_{u_1}^{u_2}\psi(ux)\{u^2(A-A_1u^{m+n})V''+u[4A-B+(B_1-2nA_1-4A_1)u^{m+n}]V'$$
$$+[2A-B+C+(nB_1+B_1-n^2A_1-3nA_1-2A_1-C_1)u^{m+n}]V\}du=0.$$

Man genügt nun dieser so eben aufgeschriebenen Gleichung, wenn man V so wählt, auf dass

(6)

$$u^2(A-A_1u^{m+n})V''+u[4A-B+(B_1-2nA_1-4A_1)u^{m+n}]V'$$
$$+[2A-B+C+(nB_1+B_1-n^2A_1-3nA_1-2A_1-C_1)u^{m+n}]V=0$$

wird, und die Integrationsgrenzen u_1, u_2 so besimmt, auf dass die Gleichung

(7)

$$\{u^2(A-A_1u^{m+n})Vx\psi'(ux)-u^2(A-A_1u^{m+n})V'\psi'(ux)$$
$$+u[B-2A+(A_1n-A_1m+2A_1-B_1)u^{m+n}]V\psi(ux)\}_{u_1}^{u_2}=0$$

stattfindet.

Die Gleichung (6) gestattet folgende Schreibweise:

$$u^2(a_2+b^2u^r)V''+u(a_1+b_1u^r)V'+(a_0+b_0u^r)V=0,$$

und ist daher jederzeit integrabel. Wird das aus (6) gefundene V in die Gleichung (7) eingeführt, und ergeben sich sodann aus selber für u zwei solche constante Zahlen, die, als Integrationsgrenzen gesetzt, das Integral:

$$y=\int_{u_1}^{u_2}\psi(ux)V du \qquad (2)$$

weder unbestimmt noch unendlich machen, so hat man ein tadelloses Integral der Gleichung (1) gefunden.



Der specielle Fall, wo

$$A_1 x^2 y^{(n+2)} + B_1 x y^{(n+1)} + C_1 y^{(n)} = A_1 \frac{d^{n+2}(x^2 y)}{dx^{n+2}}$$

ist, verdient Beachtung. Man kann nämlich alsdann die Gleichung (1) einfacher darstellen. Setzt man nämlich

$$x^2 y = z,$$

so erhält man:

$$A_1 z^{(n+2)} = x^{m-2}[A x^2 z'' + (B - 4A) x z' + (C - 2B + 6A) z],$$

welche Gleichung, wie man sieht, wirklich einfacher als die Gleichung (1) gebaut ist.

Auch der specielle Fall, wo

$$A_1 x^2 y^{(n+2)} + B_1 x y^{(n+1)} + C_1 y^{(n)} = \frac{A_1}{A} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[A x^2 y'' + B x y' + C y]$$

st, gestattet eine einfachere Behandlungsweise. Setzt man nämlich

$$A x^2 y'' + B x y' + C y = z,$$

so kommt man auf die Gleichung

$$A_1 z^{(n)} = A x^m z,$$

deren Integration uns in zahllosen Fällen gelungen ist.

VII.

Ueber die Dreiecke, welche den ein- und umbeschriebenen Kreis gemein haben*).

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Bezeichnen wir die Halbmesser des um- und des einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks ABC mit R und r, die Winkel desselben mit A, B und C, und dessen Seiten mit a, b, c, so haben wir folgende Formeln:

1)

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$

$$= 2R(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - 2)$$

$$= 2R(1 - \sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}),$$

2)

$$2Rr = \frac{abc}{a+b+c},$$

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C,$$

$$R + r = m_1 + m_2 + m_3;$$

*) M. s. Thl. XXXVII. S. 486: „Zur Beachtung."

wenn wir mit m_1, m_2, m_3 die Entfernungen des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises von den Seiten bezeichnen. Ferner ist, wenn der Inhalt des Dreiecks $= \Delta$ gesetzt wird,

$$3) \qquad r = \frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Sind r_1, r_2, r_3 die Halbmesser der drei äusseren Berührungskreise, so ist:

$$4) \qquad \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r, \\ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Sind h_1, h_2, h_3 die drei Höhen des Dreiecks, so ist:

$$5) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}.$$

Bezeichnen wir den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises mit O, denjenigen des inneren Berührungskreises mit o, und die Mittelpunkte der drei äusseren Berührungskreise mit G, H, K, so haben wir ferner:

$$OG^2 = R^2 + 2Rr_1,$$

$$OH^2 = R^2 + 2Rr_2,$$

$$OK^2 = R^2 + 2Rr_3,$$

$$Oo^2 = R^2 - 2Rr;$$

$$6) \qquad Oo^2 + OG^2 + OH^2 + OK^2 = 12R^2;$$

$$7) \qquad Ao.Bo.Co = 4Rr^2;$$

$$8) \qquad \begin{cases} oG = 4R\sin\frac{A}{2}, \\ oH = 4R\sin\frac{B}{2}, \\ oK = 4R\sin\frac{C}{2}; \\ oG.oH.oK = 16R^2r, \\ oG^2 + oH^2 + oK^2 = 16R^2 - 4r^2; \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} GH = 4R\cos\frac{C}{2}, \\ GK = 4R\cos\frac{B}{2}, \\ HK = 4R\cos\frac{A}{2}; \\ GH^2 + GK^2 + HK^2 = 32R^2 + 4r^2. \end{cases}$$

Wir haben nun folgenden Satz:

I. Beschreibt man in ein Dreieck und um dasselbe einen Kreis, so giebt es noch unendlich viele Dreiecke, welche dem ersten Kreis einbeschrieben und dem andern umbeschrieben sind. Bei allen diesen Dreiecken sind konstant:

a) das Produkt der Sinus der halben Winkel;
b) die Quadratsumme der Sinus der halben Winkel;
c) die Quadratsumme der Cosinus der halben Winkel;
d) die Summe der Cosinus der ganzen Winkel, nach 1);
e) das Verhältniss des Produkts der Seiten zum Umfang, 2);
f) das Verhältniss des Inhalts zum Umfang, 3);
g) die Summe der Mittellothe, 2);
h) die Summe der obern Abschnitte der Höhen (welche zwischen dem Höhendurchschnitt und den Ecken enthalten sind), weil diese Abschnitte doppelt so gross als die Mittellothe sind;
i) die Summe der Halbmesser der äusseren Berührungskreise, 4);
k) die Summe der reciproken Werthe dieser Halbmesser, 4);
l) die Summe der reciproken Werthe der Höhen, 5);
m) die Quadratsumme der drei vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises nach den Mittelpunkten der äussern Berührungskreise gezogenen Linien, 6);
n) das Produkt der drei vom Mittelpunkt des innern Berührungskreises nach den Ecken gezogenen Linien, 7);
o) das Produkt der drei vom Mittelpunkt des innern Berührungskreises nach den Mittelpunkten der äussern Berührungskreise gezogenen Linien, 8);
p) die Quadratsumme der im vorigen Satz genannten Linien, 8);

q) die Quadratsumme der die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise verbindenden Linien, 9).

r) Der Höhendurchschnitt der Dreiecke bewegt sich auf einem Kreis, dessen Halbmesser $= R-2r$ (Nouv. Annales de Math. Terquem et Gérono).

s) Der Schwerpunkt der Dreiecke bewegt sich auf einem Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{1}{3}(R-2r)$.

Diess folgt aus r), weil der Höhendurchschnitt eines Dreiecks, sein Schwerpunkt und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf Einer Geraden liegen, welche vom Schwerpunkt in zwei Theile getheilt wird wie 1:2.

t) Bei den Dreiecken, welche die Fusspunkte der Höhen von den im Anfang genannten Dreiecken bilden, ist konstant:

aa) die Summe der Sinus der halben Winkel,

bb) die Summe der von dem Mittelpunkt des innern Berührungskreises nach den Mittelpunkten der äusseren Berührungskreise gezogenen Linien,

cc) der Halbmesser des umschriebenen Kreises.

dd) Der Mittelpunkt dieses Kreises bewegt sich auf einem Kreise, dessen Halbmesser $= \frac{1}{2}R - r$.

ee) Der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises bewegt sich auf einem Kreise, dessen Halbmesser $= R-2r$.

ff) Die Mittelpunke der äusseren Berührungskreise bewegen sich auf Einem festen Kreise.

Um diese sechs Sätze zu beweisen, nehmen wir an, im Dreiecke ABC seien AD, BE, CF die drei Höhen, welche sich in P schneiden, so ist Winkel $A = 90^0 - \frac{D}{2}$, $B = 90^0 - \frac{E}{2}$, $C = 90^0 - \frac{F}{2}$, $\cos A = \sin\frac{D}{2}$ u. s. f., somit folgt aa) aus d). Die in bb) genannten Linien sind zugleich die oberen Abschnitte der Höhen im Dreiecke ABC (h). Der Halbmesser des um DEF beschriebenen Kreises ist gleich $\frac{R}{2}$, und sein Mittelpunkt liegt in der Mitte der Geraden OP. Hiemit wäre also cc) und dd) erledigt. Der Mittelpunkt des in ee) genannten Kreises ist P (siehe r)). Die Mittelpunkte der in ff) genannten Kreise sind A, B, C.

a) Bei den Dreiecken, welche die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise von dem im Anfang dieses Satzes genannten Dreiecken bilden, ist konstant:

aa) das Produkt der Cosinus der Winkel, a);

bb) die Quadratsumme der Cosinus der Winkel, b);

cc) die Quadratsumme der Sinus der Winkel, c);

dd) die Summe der Cosinus der doppelten Winkel, d).

Wenn nämlich GHK ein solches Dreieck ist, so haben wir $G=90^\circ-\frac{A}{2}$, $H=90^\circ-\frac{B}{2}$, $K=90^\circ-\frac{C}{2}$, also $\sin\frac{A}{2}=\cos G$ u. s. f.

ee) der Halbmesser und die Lage des umbeschriebenen Kreises.

Man denke sich das Dreieck DEF so beweglich, dass sein umbeschriebener Kreis, dessen Halbmesser $=\frac{R}{2}$ und dessen Mittelpunkt in der Mitte von OP ist, wie auch sein einbeschriebener Kreis, dessen Centrum P ist, fest bleiben, so muss auch der Punkt O oder der Mittelpunkt des um ABC beschriebenen Kreises fest bleiben, und sein Halbmesser R konstant. A, B, C sind aber die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise des Dreiecks DEF.

ff) Das Produkt der obern Abschnitte der Höhen, aa);

gg) die Quadratsumme dieser Abschnitte, bb);

hh) das Produkt der unteren Abschnitte der Höhen, aa);

ii) das Produkt der Mittellothe, ff);

kk) die Quadratsumme der Mittellothe, gg).

Man hat, mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen:

$$AP=2R\cos A,\ BP=2R\cos B,\ CP=2R\cos C;$$

$$DP=2R\cos B\cos C,\ EP=2R\cos A\cos C,\ FP=2R\cos A\cos B.$$

Hieraus wird man sich die vorhergehenden fünf Sätze erklären können, wenn man wieder, wie bei ee), annimmt, dass bei dem Dreieck DEF der ein- und umbeschriebene Kreis konstant bleibt.

ll) Der Höhendurchschnitt dieser Dreiecke ist unbeweglich.

mm) Der Schwerpunkt ist ebenfalls unbeweglich.

nn) Die Mitten der Seiten, die Fusspunkte der Höhen und die Mitten von den oberen Abschnitten der Höhen bewegen sich auf Einem festen Kreis.

Wir denken uns wieder, dass sich Dreieck *DEF* so bewege, dass sein ein- und umbeschriebener Kreis fest bleibe, so sind die Punkte *P* und *O* unbeweglich nach ee), *P* ist aber der Höhendurchschnitt von *ABC*. Der Schwerpunkt s von *ABC* liegt auf der Linie *PO*, und zwar so, dass $Ps = 2Os$ ist, mithin ist auch s fest. Der bei nn) genannte Kreis hat sein Centrum in der Mitte von *OP* und ist der umschriebene Kreis von *DEF*. Endlich sind, wie schon bemerkt, *A*, *B*, *C* die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise des Dreiecks *DEF*.

Hiernach modificiren sich die „Uebungsaufgaben für Schüler Bd. XXXVI. Nr. XIV. Seite 186", welche ich hiermit zurücknehme, da sie auf der Voraussetzung beruhten, dass bei den fraglichen Dreiecken der Umfang konstant sei, welche Voraussetzung sich als unrichtig erwiesen hat.

VIII.

Zur Theorie des Polarplanimeters.

Von

Herrn *Johann Lieblein*,

Assistenten der mathemat. Lehrkanzeln am Polytechnikum zu Prag.

Bei dem allgemeinen Interesse, welches in neuester Zeit die Einführung der Planimeter, sowohl des auf das System von Parallel-Coordinaten gegründeten vom Ingenieur Wetli, als auch desjenigen von Amsler, welchem das System der Polar-Coor-

dinaten zu Grunde liegt, allenthalben gefunden, ist es für den praktischen Unterricht von Wichtigkeit, eine Theorie aufzustellen, welche zum Vortrage an höheren Schulen sich eignen dürfte. Namentlich gilt diess von dem Amsler'schen Planimeter, welches nach den bisher aufgestellten allerdings richtigen Theorien doch eine Menge von Hilfslinien und minutiösen Constructionen an der Tafel erfordert, wodurch bei dem Schüler der Grundgedanke des Ganzen häufig verloren geht. Ich erlaube mir nun, im Folgenden zwei neue Ableitungen der Endformel vorzulegen, von denen besonders die letztere wegen ihrer Einfachheit dort, wo die Schüler, wie an unseren polytechnischen Schulen, in die neuere Geometrie eingeführt sind, zum Vortrag sich eignen dürfte.

Verbindet man zwei Gerade Aa und PO (Taf. VII. Fig. 1.) derart mit einander, dass Aa um PO im Punkte O, das ganze System aber um den fixen Punkt P drehbar gedacht wird; so ist die algebraische Summe der von A in jedem Momente normal gegen Aa zurückgelegten Wege unter der Voraussetzung, dass der zweite Eckpunkt a eine geschlossene Figur vollständig umfährt, blos abhängig von den Dimensionen $aO=m$, $OP=n$, $OA=p$ und der Fläche der umfahrenen Figur. — Um dies darzuthun, sei P der Pol eines beliebigen Polarcoordinatensystems, bezeichne man mit u und v die Coordinaten, welche sich auf die zu umfahrende Curve beziehen, mit ϱ und φ die Coordinaten, welche der von A beschriebenen Curve angehören, mit δ den Winkel, welchen die in A an die Curve AS gezogene Tangente TT_1 mit der gegen Aa normalen Geraden MN einschliesst, endlich mit α den von der Tangente TT_1 mit dem Leitstrale AP gebildeten Winkel. Der Kürze wegen werde überdies $\angle PAa$ durch λ und $\angle PaA$ durch γ bezeichnet. Man hat zunächst:

$$\delta=\alpha+90^0-\lambda$$

und

$$1)\qquad \cos\delta=\cos\alpha\sin\lambda-\cos\lambda\sin\alpha.$$

Für den Winkel α gilt die Gleichung

$$2)\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi},$$

aus welcher man

$$\frac{\cos\alpha}{d\varrho}=\frac{\sin\alpha}{\varrho d\varphi}=\frac{1}{ds},$$

und hieraus

3) $$\sin\alpha = \frac{\varrho d\varphi}{d\sigma} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

ableitet, wobei $d\sigma$ das von A beschriebene Bogenelement bedeutet. Die Gleichung 1) liefert nun mit Berücksichtigung der eben gefundenen Werthe:

4) $$d\sigma\cos\delta = d\varrho\sin\lambda - \varrho d\varphi\cos\lambda.$$

Im Dreiecke APa ist

5) $$\varrho\sin\lambda = u\sin\gamma$$

und

6) $$\lambda + \gamma + \varphi - v = 180^0.$$

Differentiirt man die Gleichung 5) und berücksichtigt, dass vermöge der Gleichung 6)

$$d\lambda = dv - d\gamma - d\varphi,$$

so findet man

7) $$d\varrho\sin\lambda - \varrho\cos\lambda d\varphi = d\gamma(\varrho\cos\lambda + u\cos\gamma) - \varrho dv\cos\lambda + du\sin\gamma.$$

Es ist aber

$$\varrho\cos\lambda + u\cos\gamma = m + p, \quad \varrho\cos\lambda = m + p - u\cos\gamma$$

und mit Zuhilfenahme der Gleichung 4):

8) $$d\sigma\cos\delta = (m+p)d\gamma - (m+p)dv + u dv\cos\gamma + du\sin\gamma.$$

Setzt man noch für $\cos\gamma$ den aus dem Dreiecke POa resultirenden Werth $\frac{u^2+m^2-n^2}{2um}$, so findet man als gesuchten Ausdruck:

9) $$d\sigma\cos\delta = (m+p)d\gamma - \frac{dv}{2m}(m^2 + 2mp + n^2) + du\sin\gamma + \frac{1}{m}\frac{u^2 dv}{2}.$$

Bezeichnet man mit F die gesuchte Fläche der umfahrenen Figur, so liefert die Integration der Gleichung 9) entweder

$$\frac{F}{m} \quad \text{oder} \quad -\pi\left(\frac{m^2 + 2mp + n^2}{m}\right) + \frac{F}{m},$$

jenachdem der Pol innerhalb oder ausserhalb der Figur angenommen wird. — Auch durch eine einfache geometrische Betrachtung kann man die Gleichung 9) erhalten.

Man betrachte (Taf. VII. Fig. 2.) zwei unmittelbar auf einander folgende Lagen des Systems, ziehe die Leitstrahlen $Pa = u$ und $Pa_1 = u + du$, MN senkrecht auf Aa und PQ parallel MN, und projicire die gebrochene Linie $BaPa_1A'$ auf MN. Man erhält:

1)

$$A'B = Ba.\cos 90^0 + ap.\cos(90^0+\gamma) + Pa'.\cos QPa_1 + a_1A_1.\cos BA'a_1.$$

Uebereinstimmend mit der früheren Bezeichnung ist:

$$A'B = d\sigma\cos\delta,\ A'a_1 = Aa = m + p.$$

Heisst, wie früher, γ der Winkel OaP, so wird man den Winkel $O'a'P$ mit $\gamma + d\gamma$ bezeichnen müssen. Ferner ist

$$\angle aPx_1 = v,$$

daher

$$\angle aPa' = dv,\ \angle QPa' = 90^0 - \gamma - dv,$$

$$\angle BA'a' = 180^0 - (\gamma + d\gamma) - QPa' = 90^0 - (d\gamma - dv).$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe übergeht nun 1) in:

2)

$$d\sigma\cos\delta = -u\sin\gamma + (u + du)\sin(\gamma + dv) + (m + p)\sin(d\gamma - dv).$$

Wenn man die angezeigten Operationen verrichtet und die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt, so erhält man:

$$d\sigma\cos\delta = udv\cos\gamma + du\sin\gamma + (m + p)(d\gamma - dv),$$

welche Gleichung mit der Gleichung 8) der ersten Ableitung identisch ist. Setzt man also auch hier wieder statt $\cos\gamma$ den Werth $\frac{m^2+u^2-n^2}{2um}$, so erhält man die gesuchte Gleichung 9):

$$d\sigma\cos\delta = (m+p)d\gamma - \frac{dv}{2m}(m^2 + 2mp + n^2) + \frac{1}{m}\,\frac{u^2dv}{2}.$$

Das so eben theoretisch begründete Princip liegt dem neuestens von Starcke in Wien konstruirten Planimeter zu Grunde; welches übrigens ganz dasselbe ist, auf welches schon vor Starcke der Schweizer Herr Amsler ein von ihm erfundenes Planimeter basirte, und in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856. I. Jahrg. 1. Heft ausführlich beschrieb.

Anmerkung. Aus der Gleichung

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13};$$
$$\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23};$$
$$\alpha_{31},\ \alpha_{32},\ \alpha_{33};$$

so erhält man drei neue Gleichungen, welche mit der vorstel den Gleichung zusammen ein System von vier Gleichungen schen den unbekannten Grössen:

$$\frac{u_2'}{x_1'},\quad \frac{v_2'}{x_1'},\quad \frac{x_3'}{x_1'},\quad \frac{y_3'}{x_1'}$$

bilden, die sich also mittelst dieser vier Gleichungen bestim lassen.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$15)\ \ldots\ U=\frac{u_2'}{x_1'},\quad V=\frac{v_2'}{x_1'};\quad X=\frac{x_3'}{x_1'},\quad Y=\frac{y_3'}{x_1'};$$

so nimmt die Gleichung 14) die folgende Gestalt an:

16)

$$\left.\begin{aligned}(1+U-X)\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +V\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +Y\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +(UX+VY)\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +(UY-VX)\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\end{aligned}\right\}=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Division mit V die chung:

17)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1+U-X}{V}\sin\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +\frac{Y}{V}\cos\alpha_{03}\sin(\alpha_{01}-\alpha_{02})\\ +\frac{UX+VY}{V}\sin\alpha_{01}\sin(\alpha_{02}-\alpha_{03})\\ +\frac{UY-VX}{V}\sin\alpha_{01}\cos(\alpha_{02}-\alpha_{03})\end{aligned}\right\}=-\sin\alpha_{03}\cos(\alpha_{01}-\alpha_{02}$$

und bildet man nun auf die aus dem Obigen bekannte W

noch die drei anderen, dieser analogen Gleichungen, so hat man zwischen den vier unbekannten Grössen

$$\frac{1+U-X}{V},\quad \frac{Y}{V},\quad \frac{UX+VY}{V},\quad \frac{UY-VX}{V}$$

vier lineare Gleichungen, mittelst welcher sich diese vier unbekannten Grössen ohne Schwierigkeit bestimmen lassen. Setzen wir nun, dass man auf diese Art gefunden habe:

18)

$$\frac{1+U-X}{V}=a,\quad \frac{Y}{V}=b,\quad \frac{UX+VY}{V}=c,\quad \frac{UY-VX}{V}=d$$

oder:

19)

$$1+U-X=aV,\quad Y=bV,\quad UX+VY=cV,\quad UY-VX=dV;$$

so ergeben sich aus den drei letzten Gleichungen die beiden Gleichungen:

$$UX+bV^2=cV,\quad bU-X=d.$$

Verbindet man aber die beiden Gleichungen

$$U-X=aV-1,\quad bU-X=d$$

mit einander, so erhält man:

$$(1-b)U=aV-1-d,\quad (1-b)X=b(aV-1)-d;$$

also:

$$(1-b)^2UX=(1+d-aV)(b+d-abV),$$

und folglich, wenn man dies in die Gleichung

$$UX+bV^2=cV$$

einführt:

$$(1+d-aV)(b+d-abV)+b(1-b)^2V^2=c(1-b)^2V,$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung zur Bestimmung von V die folgende Gleichung des zweiten Grades erhält:

20)

$$b\{a^2+(1-b)^2\}V^2-\{c(1-b)^2+a(2b+(1+b)d)\}V+(1+d)(b+d)=0.$$

Hat man mittelst dieser Gleichung V bestimmt, so ergeben sich

3) $$\sin\alpha = \frac{\varrho d\varphi}{d\sigma} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

ableitet, wobei $d\sigma$ das von A beschriebene Bogenelement bedeutet. Die Gleichung 1) liefert nun mit Berücksichtigung der eben gefundenen Werthe:

4) $$d\sigma\cos\delta = d\varrho\sin\lambda - \varrho d\varphi\cos\lambda.$$

Im Dreiecke APa ist

5) $$\varrho\sin\lambda = u\sin\gamma$$

und

6) $$\lambda + \gamma + \varphi - v = 180^0.$$

Differentiirt man die Gleichung 5) und berücksichtigt, dass vermöge der Gleichung 6)

$$d\lambda = dv - d\gamma - d\varphi,$$

so findet man

7) $$d\varrho\sin\lambda - \varrho\cos\lambda d\varphi = d\gamma(\varrho\cos\lambda + u\cos\gamma) - \varrho dv\cos\lambda + du\sin\gamma.$$

Es ist aber

$$\varrho\cos\lambda + u\cos\gamma = m + p, \quad \varrho\cos\lambda = m + p - u\cos\gamma$$

und mit Zuhilfenahme der Gleichung 4):

8) $$d\sigma\cos\delta = (m+p)d\gamma - (m+p)dv + udv\cos\gamma + du\sin\gamma.$$

Setzt man noch für $\cos\gamma$ den aus dem Dreiecke POa resultirenden Werth $\frac{u^2 + m^2 - n^2}{2um}$, so findet man als gesuchten Ausdruck:

9) $$d\sigma\cos\delta = (m+p)d\gamma - \frac{dv}{2m}(m^2 + 2mp + n^2) + du\sin\gamma + \frac{1}{m}\frac{u^2dv}{2}.$$

Bezeichnet man mit F die gesuchte Fläche der umfahrenen Figur, so liefert die Integration der Gleichung 9) entweder

$$\frac{F}{m} \quad \text{oder} \quad -\pi\left(\frac{m^2 + 2mp + n^2}{m}\right) + \frac{F}{m},$$

jenachdem der Pol innerhalb oder ausserhalb der Figur angenommen wird. — Auch durch eine einfache geometrische Betrachtung kann man die Gleichung 9) erhalten.

Man betrachte (Taf. VII. Fig. 2.) zwei unmittelbar auf einander folgende Lagen des Systems, ziehe die Leitstrahlen $Pa = u$ und $Pa_1 = u + du$, MN senkrecht auf Aa und PQ parallel MN, und projicire die gebrochene Linie $BaPa_1A'$ auf MN. Man erhält:

1)

$$A'B = Ba.\cos 90^0 + ap.\cos(90^0 + \gamma) + Pa'.\cos QPa_1 + a_1A_1.\cos BA'a_1.$$

Uebereinstimmend mit der früheren Bezeichnung ist:

$$A'B = d\sigma \cos\delta,\quad A'a_1 = Aa = m + p.$$

Heisst, wie früher, γ der Winkel OaP, so wird man den Winkel $O'a'P$ mit $\gamma + d\gamma$ bezeichnen müssen. Ferner ist

$$\angle aPx_1 = v,$$

daher

$$\angle aPa' = dv,\quad \angle QPa' = 90^0 - \gamma - dv,$$

$$\angle BA'a' = 180^0 - (\gamma + d\gamma) - QPa' = 90^0 - (d\gamma - dv).$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe übergeht nun 1) in:

2)

$$d\sigma\cos\delta = -u\sin\gamma + (u + du)\sin(\gamma + dv) + (m + p)\sin(d\gamma - dv).$$

Wenn man die angezeigten Operationen verrichtet und die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt, so erhält man:

$$d\sigma\cos\delta = udv\cos\gamma + du\sin\gamma + (m + p)(d\gamma - dv),$$

welche Gleichung mit der Gleichung 8) der ersten Ableitung identisch ist. Setzt man also auch hier wieder statt $\cos\gamma$ den Werth $\frac{m^2 + u^2 - n^2}{2um}$, so erhält man die gesuchte Gleichung 9):

$$d\sigma\cos\delta = (m + p)d\gamma - \frac{dv}{2m}(m^2 + 2mp + n^2) + \frac{1}{m}\,\frac{u^2dv}{2}.$$

Das so eben theoretisch begründete Princip liegt dem neuestens von **Starcke** in Wien konstruirten Planimeter zu Grunde; welches übrigens ganz dasselbe ist, auf welches schon vor **Starcke** der Schweizer Herr **Amsler** ein von ihm erfundenes Planimeter basirte, und in der **Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856. I. Jahrg. 1. Heft** ausführlich beschrieb.

Anmerkung. Aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}$$

folgt eigentlich:

$$\frac{\cos\alpha}{d\varrho} = \frac{\sin\alpha}{\varrho d\varphi} = \frac{1}{\pm d\sigma},$$

und hieraus:

$$\cos\alpha = \pm\frac{d\varrho}{d\sigma}, \quad \sin\alpha = \pm\varrho\frac{d\varphi}{d\sigma}.$$

Für die in Taf. VII. Fig. 1. angenommene Lage ist aber von dem doppelten Zeichen das obere zu wählen. Es ist übrigens klar, dass auch für jede andere Zeichencombination die Gleichung 9) resultirt, sobald man nur den Winkel δ immer in demselben Sinne zählt.

IX.

Das Integral $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ im Zusammenhang mit anderen ähnlichen.

Von

Herrn *Fischer*,

Gymnasial-Oberlehrer in Kempen.

Anknüpfend an die Bemerkung des Herrn Herausgebers über eine einfache Lösung des Integrals $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ pag. 363. des vorigen*) Heftes (37. Theil. 3. Heft) des Archivs, möchte auch folgende Lösung dieses Integrals, welches mir mit anderen ähnlichen bei einer Arbeit über die Conchoide häufig vorkam, nicht

*) Ich lasse das Wort „vorigen" stehen, um erkennen zu lassen, dass der Herr Verf. seinen Aufsatz unmittelbar nach meiner Mittheilung geschrieben hat.

ohne Interesse sein, indem zugleich mit der Lösung dieses Integrals eine einfache Lösung einer Gruppe anderer sich ergibt. Es ist:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Nun ist, wenn man $x=av$ setzt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\,dv}{\sqrt{a^2-a^2v^2}}=\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\text{arc}\sin v=\text{arc}\sin\frac{x}{a},$$

also:

$$\text{(1)}\qquad \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2.\text{arc}\sin\frac{x}{a}.$$

Um noch das zweite Integral zu bestimmen, setze man, die Form vermuthend:

$$\text{(2)}\quad \int-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=Ax\sqrt{a^2-x^2}+B\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

und erhält differenzirend:

$$-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{Ax^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+A.\sqrt{a^2-x^2}\,dx+B.\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

oder

$$-x^2=-2Ax^2+Aa^2+B.$$

Setzt man $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{a^2}{2}$, so wird die linke Seite der Gleichung der rechten identisch; es wird daher, wenn man diese Werthe in Gleichung (2) einsetzt:

$$\int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

oder, für letzteres Integral den gefundenen Werth gesetzt:

$$\text{(3)}\qquad \int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}.\text{arc}\sin\frac{x}{a}.$$

Aus (1) und (3) folgt nun:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Es ist hier erwähntes Integral auf die beiden $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ zurückgeführt, so wie an oben genannter Stelle diese beiden auf $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ gebracht sind. Aehnlich wie oben $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, lässt sich nun auch $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und überhaupt $\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ einfach auflösen.

Es sei

$$(4)\quad \int\frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = (Ax^3+Bx)\sqrt{a^2-x^2} + C\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

so ist durch Differenziation:

$$\frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{-Ax^4-Bx^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \frac{3Aa^2x^2-3Ax^4+Ba^2-Bx^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + C\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

oder

$$x^4 = -4Ax^4 + (3Aa^2-2B)x^2 + Ba^2 + C.$$

Setzt man hierin

$$A = -\tfrac{1}{4},\quad B = -\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{2}a^2,\quad C = \tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{2}a^4;$$

so wird die linke Seite der Gleichung der rechten identisch; es ist daher, wenn man diese Werthe in Gleichung (4) einsetzt:

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{2}a^2x)\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{2}a^4.\arcsin\frac{x}{a}.$$

Ebenso findet sich, wenn man

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = (Ax^5+Bx^3+Cx)\sqrt{a^2-x^2} + D\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

setzt:

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{6.4}a^2x^3+\frac{1.5.3}{6.4.2}a^4x\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1.5.3}{6.4.2}a^6\arcsin\frac{x}{a},$$

und allgemein die bekannte Formel:

$$\int\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}\,S\left[-\frac{(2n-1)^{\alpha|-2}}{2n^{\alpha+1|-2}}a^{2\alpha}x^{2n-2\alpha-1}\right]+\frac{(2n-1)^{n-1|-2}}{2n^{n|-2}}a^{2n}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\alpha+\beta=n-1.$$

So wie auf vorstehende Integralformen, lässt sich auch obige Methode recht passend auf Integrale von der Form $\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, so wie auf die Form $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}$ anwenden, und es möge die Auflösung des ersteren Integrals hier noch einen Platz finden. Das einfachste Integral dieser Art $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ergibt, wenn man $\sqrt{a^2-x^2}=z$ setzt, wo $dx=-\frac{zdz}{x}$ wird:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int dz=-z=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

Ferner setze man:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=(Ax^2+B)\sqrt{a^2-x^2}$$

und erhält durch Differenziren:

$$\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-Ax^3-Bx}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\frac{2Aa^2x-2Ax^3}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

oder

$$x^3=-3Ax^3+(2Aa^2-B)x.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn

$$A=-\tfrac{1}{3},\ B=-\tfrac{1}{3}.2a^2$$

ist; man erhält also:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-(\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{3}.\tfrac{2}{1}a^2)\sqrt{a^2-x^2}.$$

Setzt man noch

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=(Ax^4+Bx^2+C)\sqrt{a^2-x^2},$$

wo dann durch Differenziren

$$\frac{x^5dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-Ax^5-Bx^3-Cx+4Aa^2x^3+2Ba^2x-4Ax^5-2Bx^3}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

oder

$$x^5=-5Ax^5+(4Aa^2-3B)x^3+(2Ba^2-C)x$$

wird, so muss

$$A=-\tfrac{1}{5},\ B=-\tfrac{1}{5}.\tfrac{4}{3}a^2,\ C=-\tfrac{1}{5}.\tfrac{4}{3}.\tfrac{2}{1}a^4$$

sein, und es ergibt sich dann:

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-(\tfrac{1}{5}x^4+\tfrac{1}{5}.\tfrac{4}{3}a^2x^2+\tfrac{1}{5}.\tfrac{4}{3}.\tfrac{2}{1}a^4)\sqrt{a^2-x^2}.$$

So findet sich einfach die allgemeine, auch sonst bekannte Formel:

$$\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}.S[-\frac{2n^{\alpha|-2}}{(2n+1)^{\alpha+1|-2}}.a^{2\alpha}.x^{2n-2\alpha-1}]$$

$$\alpha+\beta=n.$$

X.

Schreiben des Herrn Professor und Director Doctor Strehlke in Danzig an den Herausgeber.

Herr Professor und Director Strehlke hat mich in einem sehr freundlichen Schreiben vom 16. Februar 1862 daran erinnert, dass er schon im Jahre 1827 in Crelle's Journal Thl. II. sich mit dem durch drei Punkte eines Kegelschnitts gelegten Kreise beschäftigt habe, und hat mir darüber folgende lehrreiche Mittheilung gemacht, die ich mich freue den Lesern des Archivs vorlegen zu können. Bei meinem Aufsatze über denselben Gegenstand in Thl. XXXVII. Nr. X. S. 256. war mir vorzüglich die Beziehung dieser kleinen Untersuchung zu der Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Ellipse interessant. Ich empfehle den Lesern die folgenden Bemerkungen des Herrn Director Strehlke recht sehr zur Beachtung. G.

Nennt man die Coordinaten des Mittelpunktes jenes Kreises p und q, wo p Abscisse, q Ordinate, so ist:

1) Für die Ellipse, wenn $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$:

$$q = -\frac{(a^2-b^2)}{b}\sin\frac{(\theta+\theta')}{2}\sin\frac{(\theta'+\theta'')}{2}\sin\frac{(\theta''+\theta)}{2},$$

$$p = \frac{(a^2-b^2)}{a}\cos\frac{(\theta+\theta')}{2}\cos\frac{(\theta'+\theta'')}{2}\cos\frac{(\theta''+\theta)}{2}.$$

In dem Programme des Cöllnischen Gymnasiums in Berlin vom Jahre 1832 habe ich für den Radius des genannten Kreises folgenden Ausdruck gegeben:

$$r = \frac{1}{ab}\sqrt{\begin{array}{l}(a^2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\theta')^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta')^2)\\ \times(a^2\sin\tfrac{1}{2}(\theta'+\theta'')^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(\theta'+\theta'')^2)\\ \times(a^2\sin\tfrac{1}{2}(\theta''+\theta)^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(\theta''+\theta)^2).\end{array}}$$

Man gelangt zu diesem Ausdrucke für r auch leicht durch geometrische Betrachtungen.

Ist in einem Halbkreise (Taf. VII. Fig. 3.), dessen Radius $=a$, NC ein conjugirter Durchmesser zu CM, der Halbkreis auf eine Ebene orthographisch projicirt, die mit der Ebene des Halbkreises einen Neigungswinkel bildet, dessen Cosinus $=\frac{b}{a}$, so ist die Projection des Halbkreises auf die letzte Ebene eine Ellipse mit den Halbaxen a und b. Die auf $2a$ senkrechten MP und NP' sind $a\sin\theta$, $a\cos\theta$, $CP=a\cos\theta$, $CP'=a\sin\theta$, wenn $\angle MCP=\theta$. In der Projection bleiben CP und CP' ungeändert, aber MP wird $=b\sin\theta$ und $NP'=b\cos\theta$. Nun seien $AD=2z$ eine Kreissehne (deren Mitte B) senkrecht auf CM, a' und b' die Projectionen von CM und CN, $2z'$ von $2z$, so hat man wegen des Parallelismus von $2z'$ und b':

$$2z:2z'=a:b',\ 2z'=\frac{2z.b'}{a}.$$

Werden zwei andere Sehnen im Kreise, die mit $2z$ ein Dreieck bilden, durch $2t$ und $2u$, die Projectionen durch $2t'$, $2u'$, die entsprechenden conjugirten Halbmesser durch b'' und b''' bezeichnet, so hat man in gleicher Weise:

$$2t'=\frac{2t.b''}{a},$$

$$2u'=\frac{2u.b'''}{a}.$$

Da der Radius r des durch die drei Punkte jedes Sehnendreiecks gelegten Kreises bekanntlich dem Producte der drei Sehnen, dividirt durch die vierfache Fläche F' des Dreiecks gleichkommt, so ist:

$$r=\frac{2z.2t.2u.b'.b''.b'''}{a^3.4F'}.$$

Da $F'=\frac{b}{a}F$, wenn F die Fläche des Sehnendreiecks im Kreise, überdiess im Kreise

$$a=\frac{2z.2t.2u}{4F},\quad \text{so wird}\quad r=\frac{b'.b''.b'''}{ab}.$$

Wenn die Coordinaten der drei Punkte im Umfange der Ellipse durch $a\cos\theta$, $b\sin\theta$; $a\cos\theta'$, $b\sin\theta'$; $a\cos\theta''$, $b\sin\theta''$ bezeichnet werden, so sind die Coordinaten der Endpunkte der die Sehnen halbirenden Halbmesser im Kreise $a\cos\frac{1}{2}(\theta+\theta')$, $a\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')$

u. s. w., die entsprechenden Coordinaten in der Ellipse $a\cos\frac{1}{2}(\theta+\theta')$, $b\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta')$ u. s. w. und deshalb:

$$b'^2 = a^2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\theta')^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta')^2,$$

$$b''^2 = a^2\sin\tfrac{1}{2}(\theta'+\theta'')^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(\theta'+\theta'')^2,$$

$$b'''^2 = a^2\sin\tfrac{1}{2}(\theta''+\theta)^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(\theta''+\theta)^2;$$

woraus die Richtigkeit des oben gegebenen Ausdrucks für r erhellet.

2) Werden im Umfange der **Hyperbel** die Coordinaten der drei Punkte durch $\frac{a}{\cos\theta}$, $b\tang\theta$; $\frac{a}{\cos\theta'}$, $b\tang\theta'$; $\frac{a}{\cos\theta''}$, $b\tang\theta''$ bezeichnet, so erhält man:

$$q = -\frac{(a^2+b^2)\sin\frac{(\theta+\theta')}{2}\sin\frac{(\theta'+\theta'')}{2}\sin\frac{(\theta''+\theta)}{2}}{b\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''},$$

$$p = \frac{(a^2+b^2)\cos\frac{(\theta'-\theta)}{2}\cos\frac{(\theta''-\theta')}{2}\cos\frac{(\theta''-\theta)}{2}}{a\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''},$$

$$r = \frac{\sqrt{\begin{array}{l}(a^2\sin\frac{1}{2}(\theta'+\theta)^2+b^2\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)^2)\\ \times(a^2\sin\frac{1}{2}(\theta''+\theta')^2+b^2\cos\frac{1}{2}(\theta''-\theta')^2)\\ \times(a^2\sin\frac{1}{2}(\theta''+\theta)^2+b^2\cos\frac{1}{2}(\theta''-\theta)^2)\end{array}}}{ab\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''}.$$

3) In dem Umfange der **Parabel** seien die Coordinaten der drei Punkte α, $\sqrt{m\alpha}$; α', $\sqrt{m\alpha'}$; α'', $\sqrt{m\alpha''}$; dann findet man:

$$q = -\frac{1}{2\sqrt{m}}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}).(\sqrt{\alpha'}+\sqrt{\alpha''}).(\sqrt{\alpha''}+\sqrt{\alpha}),$$

$$2p = \alpha+\alpha'+\alpha''+m+\sqrt{\alpha.\alpha'}+\sqrt{\alpha'.\alpha''}+\sqrt{\alpha''.\alpha},$$

$$r = \frac{1}{2\sqrt{m}}.\sqrt{(m+(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'})^2)(m+(\sqrt{\alpha'}+\sqrt{\alpha''})^2)(m+(\sqrt{\alpha''}+\sqrt{\alpha})^2)}.$$

XI.

Ueber die Krümmungslinien des Ellipsoids.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

In einer Abhandlung „Ueber sphärische Kegelschnitte" in der Zeitschrift von Schlömilch, Cantor und Kahl hat Herr Dr. Heilermann mehrere schöne Sätze angegeben, welche sich, wie überhaupt viele Sätze über sphärische Linien, nach der Methode von Gauss auf beliebige Flächen übertragen lassen, von denen hier aber bloss eine Anwendung auf die Krümmungslinien des Ellipsoids gemacht werden möge. Herr Dr. Heilermann bedient sich zur Begründung seiner Sätze der sogenannten Axen-Coordinaten von Gudermann nach dessen analytischer Sphärik. Um zu zeigen, in welcher nahen Verwandtschaft letztere zu den gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten der Ebene stehen, nehmen wir in einer Kugel, deren Mittelpunkt O ist, drei zu einander rechtwinklige Halbmesser OA, OB, OC an. Durch C legen wir eine Tangential-Ebene an die Kugel, welche von den Ebenen OAC und OBC in den Geraden CX und CY geschnitten wird. Es sei M ein beliebiger Punkt in der Tangential-Ebene und seine rechtwinkligen Coordinaten hinsichtlich der Axen CX und CY seien x und y; zieht man nämlich MD senkrecht auf CX und ME senkrecht auf CY, so ist:

$$CD = x \quad \text{und} \quad CE = y.$$

Die Linie OM schneidet die Kugel in m; die Hauptkreise Bm

und Am treffen verlängert die Hauptkreise CA und CB in den Punkten d und e; die trigonometrischen Tangenten der Bögen Cd und Ce nennt Gudermann die Axen-Coordinaten des Punktes m; es ist leicht zu sehen, dass die Punkte Mm, Dd, OB in einer Ebene liegen, wie auch die Punkte Mm, Ee, OA, dass ferner D und E in der Verlängerung der Halbmesser Od und Oe, und somit

$$x = \operatorname{tg} Cd \quad \text{und} \quad y = \operatorname{tg} Ce$$

die Axen-Coordinaten von m sind.

Wir wollen nun annehmen, der Punkt M bewege sich in der Tangential-Ebene XCY in einer Curve, deren geradlinige Coordinaten, hinsichtlich der Axen CX und CY, x und y sind und der Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

genügen; so bewegt sich der entsprechende Punkt m auf der Kugel auf einer spärischen Curve, deren Gleichung in Axen-Coordinaten ebenfalls

$$\varphi(x, y) = 0$$

ist. Spezielle Fälle sind folgende:

Wenn m sich in einem Hauptkreise bewegt, so durchläuft M eine Gerade, also ist die Gleichung ersten Grades

$$1) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

die Gleichung irgend eines Hauptkreises in Gudermann's Axen-Coordinaten. Setzen wir in 1) der Reihe nach y und $x = 0$, so ergeben sich die Werthe $x = a$ und $y = b$ für die Durchschnitte der Linie 1. mit den Axen CA und CB.

Wir wollen zweitens annehmen, m durchlaufe einen sphärischen Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt C ist, so wird M in der Tangential-Ebene eine Ellipse (Hyperbel) beschreiben, deren Gleichung

$$2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

somit auch diejenige des sphärischen Kegelschnitts ist, dessen Mittelpunkt C, und zwar in Axen-Coordinaten. Um die Gleichung eines den sphärischen Kegelschnitt 2) berührenden Hauptkreises in Axen-Coordinaten zu ermitteln, bedienen wir uns folgenden Lehrsatzes:

Es sei

$$\varphi(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Curve in einer Ebene, und

$$au + bv + c = 0$$

diejenige einer Geraden. Soll letztere die Curve schneiden im Punkte (x, y), so muss sein:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{oder} \quad a(x-u) + b(y-v) = 0.$$

Soll die Gerade die Curve berühren, oder auch noch den Punkt $(x + dx, y + dy)$ mit ihr gemein haben, so ist:

$$a(x + dx - u) + b(y + dy - v) = 0$$

oder

$$adx + bdy = 0.$$

Daher ist die Gleichung der durch den Punkt (x, y) gehenden Berührungslinie der Curve $\varphi(x, y) = 0$:

$$y - v = \frac{dy}{dx}(x - u),$$

wo der Differentialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichug der Curve bestimmt wird.

Dieses Verfahren ist allgemein gültig, es mögen die Curven

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad au + bv + c = 0$$

auf einer beliebigen Fläche liegen und die Coordinaten x, y; u, v sich auf ein Coordinatensystem irgend welcher Art beziehen. Der Beweis davon liegt ganz einfach in der Betrachtung, dass die Curven die Punkte (x, y) und $(x+dx, y+dy)$ gemein haben sollen, um sich zu berühren, und weiter spricht auch das obige Verfahren nichts aus. Es ist somit unabhängig von der Natur des betreffenden Coordinatensystems. Wenden wir diesen Satz auf die Axen-Coordinaten Gudermanns an, so finden wir sogleich, dass

$$\frac{x.u}{a^2} + \frac{y.v}{b^2} = 1 \tag{3}$$

die Gleichung des Hauptkreises ist, welcher den sphärischen Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

im Punkt (x, y) berührt.

Wir wollen nun, indem wir die gleichen Buchstaben mit Strichen versehen gebrauchen, annehmen, $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ seien die grosse, mittlere und kleine Halbaxe eines Ellipsoids, dessen Mittelpunkt O' ist. $O'A'$ sei parallel OA, $O'B'$ parallel OB, $O'C'$ parallel OC. Der Punkt m' des Ellipsoids entspricht dem Punkt m der Kugel, weil die durch m' gehende Flächennormale des Ellipsoids parallel dem Kugelhalbmesser Om ist. Die Ebene $O'B'm'$, welche demnach parallel der Ebene des Hauptkreises OBm ist, schneidet den Hauptschnitt $C'A'$ des Ellipsoids in d'; so sind die Punkte d' und d gleichfalls entsprechende, weil die durch d gehende Flächennormale des Ellipsoids parallel dem Kugelhalbmesser Od ist; die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen dieser Flächennormale und der Axe $O'C'$ ist also $= x$. Ebenso schneidet die Ebene $O'A'm'$, welche parallel der Ebene des Hauptkreises OAm ist, den Hauptschnitt $C'B'$ des Ellipsoids in e'; die Punkte e' und e sind auch entsprechende, weil die durch e gehende Flächennormale des Ellipsoids parallel dem Kugelhalbmesser Oe ist; die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen dieser Flächennormale und der Axe $O'C'$ ist somit $= y$. Die Grössen x und y nennen wir nun Coordinaten des Punktes m' auf dem Ellipsoid; die Hauptschnitte $C'A'$ und $C'B'$ sind die Coordinatenaxen. Bewegt sich der Punkt m' auf einem Centralschnitt des Ellipsoids, so sind, einem bekannten Satze zufolge, alle durch m' gehenden Flächennormalen des Ellipsoids Einer Ebene parallel, der entsprechende Punkt m auf der Kugel durchläuft also einen Hauptkreis, mithin ist die Gleichung von m' in unsern Coordinaten:

$$\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}=1. \tag{4}$$

Setzen wir hier der Reihe nach y' und $x'=0$, so ergeben sich die Werthe $x'=a$ und $y'=b$ für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Linie 4) mit den Axen $C'A'$ und $C'B'$.

Wir wollen ferner annehmen, m durchlaufe auf der Kugel einen sphärischen Kegelschnitt, dessen Gleichung in Axen-Coordinaten

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ist, so bewegt sich der entsprechende Punkt m' des Ellipsoids,

wobei also stets angenommen wird, dass die durch m' gehende Flächennormale des Ellipsoids parallel dem Kugelhalbmesser Om ist, auf einer Krümmungslinie, deren Gleichung somit nach den von uns gewählten ellipsoidischen Coordinaten

$$5)\qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

ist. Die Krümmungslinie, deren Mittelpunkt C', schneidet die Hauptschnitte $C'A'$ und $C'B'$ des Ellipsiods in zwei solchen Punkten, dass die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die durch sie gehenden Flächennormalen des Ellipsoids mit der Axe $O'C'$ bilden, gleich a und b sind; diese Winkel nennen wir die Halbaxen der Krümmungslinie 5). Durch jeden Punkt eines Ellipsoids gehen zwei Krümmungslinien, die Eine mit zwei realen Halbaxen, die Andere mit einer realen und einer imaginären Halbaxe. Die Gleichung des Centralschnitts, welcher die Krümmungslinie 5) im Punkt (x', y') berührt, ist in unseren Coordinaten u und v:

$$6)\qquad \frac{x'}{a^2}u+\frac{y'}{b^2}v=1.$$

Zwei Curven auf dem Ellipsoid und der Kugel entsprechen einander, wenn die durch die erste Curve gehenden Flächennormalen des Ellipsoids einzeln parallel den nach der zweiten Curve gezogenen Kugelhalbmessern sind. Wenn $\varphi(x, y) = 0$ die Gleichung der sphärischen Curve in Axen-Coordinaten ist, so ist diejenige der entsprechenden ellipsoidischen Curve in unseren Coordinaten ebenfalls

$$\varphi(x', y') = 0.$$

Schneiden sich zwei Curven auf der Kugel unter dem Winkel α, so schneiden sich ihre entsprechenden Curven auf dem Ellipsoid so, dass ihre conjugirten Tangenten im Durchschnittspunkt den Winkel α bilden. Wird daher im Punkt m ein sphärischer Kegelschnitt von einem Hauptkreis der Kugel normal geschnitten, so wird die entsprechende Krümmungslinie des Ellipsoids im Punkt m' von dem entsprechenden Centralschnitt gleichfalls normal geschnitten. Einem Systeme von confokalen sphärischen Kegelschnitten entsprechen die beiden Systeme der Krümmungslinien des Ellipsoids. Den gemeinschaftlichen Brennpunkten der ersteren correspondiren die Nabelpunkte des Ellipsoids.

Sind a und b die Tangenten der Halbaxen einer Krümmungslinie des ersten Systems und a' und b' die Tangenten der Halb-

axen einer Krümmungslinie des zweiten Systems auf einem Ellipsoid, und schneiden sich beide Krümmungslinien im Punkte (x, y) nach unseren Coordinaten, so ist (S. die oben angeführte Abhandlung Heilermann's, Formel 6.):

$$7)\quad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{a^2-b^2}{1+b^2}\,\dfrac{x^2}{a^2}, \\[2ex] b_1^2 = \dfrac{b^2-a^2}{1+a^2}\,\dfrac{y^2}{b^2}; \end{cases}$$

und die Gleichung desjenigen Centralschnitts, welcher die Krümmungslinie des ersten Systems im Punkt (x, y) normal schneidet:

$$8)\quad \frac{x}{a_1^2}u + \frac{y}{b_1^2}v = 1$$

(Formel 7) bei Heilermann).

Diess sind die Grundformeln für die Centralschnitte und Krümmungslinien des Ellipsoids nach unseren Coordinaten. Sie sind denjenigen für Hauptkreise und sphärische Kegelschnitte nach Gudermann's Coordinaten durchaus analog. Die weitere Uebertragung der Formeln in der genannten Abhandlung hat nun durchaus keine Schwierigkeit mehr. Es mögen schliesslich noch diejenigen Sätze von Heilermann auf das Ellipsoid angewendet werden, welche sich ohne Einführung anderer Namen und Ausdrücke als der folgenden leicht in Worten wiedergeben lassen. Wenn auf dem Ellipsoid eine begrenzte Linie gegeben ist, durch deren Endpunkte die Normalen der Fläche gezogen werden, so nenne ich den Winkel beider Normalen: „Den der genannten Linie entsprechenden Normalen-Winkel“. Die Punkte (x, y) und (x', y') der Krümmungslinien, deren Halbaxen a, b; a' und b' sind, heissen entsprechend, wenn sich verhält:

$$x : x' = a : a',$$
$$y : y' = b : b'.$$

Anschliessend an die Methode von Gauss, lassen sich die Linien auf den Flächen in zwei Systeme (a) und (b) eintheilen*). Die Linien des Systems (a) sind dadurch charakterisirt, dass, wenn man durch ihre Punkte die Normalen der Fläche zieht, und parallel damit die Halbmesser einer Kugel, letztere in einer Ebene liegen. Bei den Linien (b) bilden die parallelen Kugelhalbmesser nicht eine Ebene, sondern einen Kegel zweiten Grades. In dem

*) Das Weitere hierüber wird hoffentlich ein späterer Aufsatz des Herrn Verfassers bringen. G.

speziellen Fall nun, wo dieser Kegel ein Drehungskegel ist, nenne ich die Linie auf der Fläche: „Linie des Systems (c) oder bloss Linie (c)“.

Diess vorausgesetzt, erhalten wir folgende Sätze für die Krümmungslinien des Ellipsoids:

Der Bogen eines Centralschnitts, welcher zwei entsprechende Punkte zweier Krümmungslinien verbindet, ist in allen Lagen Normale derselben dritten Krümmungslinie, die ihn in zwei Abschnitte theilt, deren Normalen-Winkel einander gleich sind.

Wird eine Krümmungslinie von einer Linie (c) in zwei gegen die grosse Axe symmetrisch gelegenen Punkten m und m_1 berührt, und von einem beliebigen Punkt n der Krümmungslinie an diese Linie (c) ein berührender Centralschnitt gezogen, so ist der demselben entsprechende Normalen-Winkel gleich der Summe oder Differenz der realen Halbaxen der durch die Punkte m und n gehenden Krümmungslinien, jenachdem diese Punkte auf verschiedenen oder denselben Seiten der kleinen Axe liegen.

Der Normalen-Winkel, welcher dem von einem beliebigen Punkt einer Krümmungslinie an die über der kleinen Axe beschriebene Linie (c) berührend gezogenen Centralschnitt entspricht, ist gleich der realen Halbaxe der durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinie.

Zieht man an eine Linie (c), welche eine Krümmungslinie in zwei gegen die grosse Axe symmetrisch gelegenen Punkten berührt, von einem Scheitel der kleinen Axe einen berührenden Centralschnitt, so ist der demselben entsprechende Normalen-Winkel gleich der realen Halbaxe der Krümmungslinie, welche durch jene symmetrischen Punkte geht.

Wird eine Krümmungslinie von zwei Linien (c) in zwei gegen die grosse Axe symmetrisch gelegenen Punkten m, m_1 und p, p_1 berührt, und werden von einem beliebigen Punkt n der Krümmungsline an diese Linie (c) berührende Centralschnitte gezogen, so ist die Summe oder Differenz der demselben entsprechenden Normalen-Winkel konstant, jenachdem der Punkt zwischen den Bögen mm_1 liegt oder nicht.

XII.

Entwickelung einer Formel zur Berechnung des Flächeninhalts einer geradlinigen Figur bei Messungen mit der Boussole unmittelbar aus den gemessenen Seiten der Figur und den an der Nadel gemachten Ablesungen, ohne erst die Winkel der Figur berechnen oder andere vorläufige Rechnungen machen zu müssen.

Von
dem Herausgeber.

Die eleganten Formeln zur Bestimmung des Flächeninhalts geradliniger Figuren aus ihren Seiten und Winkeln oder aus den Coordinaten ihrer Ecken sind allgemein bekannt, und werden, insbesondere die Formeln für den Inhalt durch die Ecken, bei praktischen Arbeiten jetzt immer mehr in Anwendung gebracht, jedenfalls mit vollem Rechte, weil sie in der That bei solchen Arbeiten die vortrefflichsten Dienste leisten, namentlich rücksichtlich der Genauigkeit der zu gewinnenden Resultate allen übrigen, sonst gewöhnlich angewandten Verfahrungsarten weit vorzuziehen sein dürften. Die meiste Anwendung finden diese Formeln bei Messungen mit der Boussole, weil dieses Instrument, so sehr es auch anderen Instrumenten an Genauigkeit nachsteht, seiner Bequemlichkeit und anderer Vortheile wegen, immer noch sehr vielfache und häufige Anwendung findet. Mit der Boussole werden aber eigentlich die Winkel der Figuren nicht selbst gemessen, sondern es werden bei den verschiedenen Aufstellungen des Instruments nur die Stände der völlig zur Ruhe gekommenen Nadel auf dem eingetheilten Kreise abgelesen, was nicht der geringste der durch dieses Instrument gewährten Vortheile ist; dass ausserdem noch die Seiten der Figur gemessen werden müssen, versteht sich von

selbst. Es hat mir daher immer sehr wünschenswerth geschienen, eine ganz allgemeine Formel zu besitzen, nach welcher der Flächeninhalt der Figur unmittelbar aus den gemessenen Seiten und aus den bei den verschiedenen Aufstellungen des Instruments an der Nadel auf dem eingetheilten Limbus gemachten Ablesungen berechnet werden kann, ohne erst entweder die Coordinaten der Ecken oder auch die Winkel der Figur berechnen zu müssen, wenn auch namentlich Letzteres an sich keine Schwierigkeit haben, aber doch verschiedene Berücksichtigungen erfordern würde, die man bei praktischen Arbeiten gewiss gern vermeidet, wenn man das gesuchte Resultat erhalten kann, indem man die gemachten Ablesungen ganz so, wie sie auf dem Terrain an dem Instrumente gemacht worden sind *), in die betreffenden Formeln einführt. Eine solche allgemeine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts jeder geradlinigen Figur bei Messungen mit der Boussole, deren nach meiner Meinung sehr wichtiger Vortheil, wie gesagt, darin beruhet, dass die Resultate der auf dem Felde gemachten Messungen, — die gemessenen Seiten und die an der Nadel gemachten Ablesungen, — unmittelbar in dieselbe eingeführt werden können, zu entwickeln, beabsichtigt der vorliegende Aufsatz; um denselben aber ganz für sich verständlich zu machen, will ich auch die bei der in Rede stehenden Entwickelung zur Anwendung kommenden Coordinatenformeln für den Flächeninhalt entwickeln, und zwar um so mehr, weil diese Formeln nach meiner Meinung gewöhnlich nicht mit der nöthigen Allgemeinheit und Schärfe bewiesen werden, und ich überdies diesen Formeln eine von der meistens gebräuchlichen hin und wieder abweichende Gestalt geben werde.

Wir legen für's Erste ein ganz beliebiges Coordinatensystem der xy zu Grunde, dessen Coordinatenwinkel, nämlich den von den positiven Theilen der Axen der x und y eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel wir durch α bezeichnen. Die geradlinige Figur, deren Flächeninhalt J bestimmt werden soll, sei

$$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_n$$

und die Coordinaten der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n$$

wollen wir respective durch

---

*) Die an der Nadel gemachten Ablesungen jedoch, was sich von selbst versteht, wegen der Excentricität des Instruments, insofern dasselbe eine solche besitzen sollte, gehörig corrigirt, wozu in der Abhandlung Thl. XXXVII. No. XXV. eine genaue Anleitung gegeben worden ist.

$$x_1, y_1;\quad x_2, y_2;\quad x_3, y_3;\quad x_4, y_4;\ \ldots;\ x_n, y_n$$

bezeichnen. Allen unseren folgenden Betrachtungen legen wir, wie hier ein für alle Mal bemerkt wird, die Voraussetzung zu Grunde, dass die Seiten der Figur $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_n$ sich nirgends durchkreuzen.

Ferner nehmen wir ein zweites, dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der XY so an, dass die geradlinige Figur

$$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_n$$

ganz innerhalb des Coordinatenwinkels dieses letzteren Systems liegt, was offenbar jederzeit möglich ist, und bezeichnen die Coordinaten des Anfangspunktes des Systems der XY in dem primitiven Systeme der xy durch a, b; bezeichnen wir dann die Coordinaten der Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_n$$

in dem Systeme der XY respective durch

$$X_1, Y_1;\quad X_2, Y_2;\quad X_3, Y_3;\quad X_4, Y_4;\ \ldots;\ X_n, Y_n;$$

so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich die folgenden, ganz allgemein gültigen Formeln:

$$1)\ \ldots\ \begin{cases} x_1 = a + X_1, & y_1 = b + Y_1; \\ x_2 = a + X_2, & y_2 = b + Y_2; \\ x_3 = a + X_3, & y_3 = b + Y_3; \\ x_4 = a + X_4, & y_4 = b + Y_4; \\ \text{u. s. w.} & \\ x_n = a + X_n, & y_n = b + Y_n; \end{cases}$$

also:

$$2)\ \ldots\ \begin{cases} X_1 = x_1 - a, & Y_1 = y_1 - b; \\ X_2 = x_2 - a, & Y_2 = y_2 - b; \\ X_3 = x_3 - a, & Y_3 = y_3 - b; \\ X_4 = x_4 - a, & Y_4 = y_4 - b; \\ \text{u. s. w.} & \\ X_n = x_n - a, & Y_n = y_n - b. \end{cases}$$

Zuerst wollen wir annehmen, dass die gegebene Figur das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ sei; die verschiedenen Fälle, welche rücksichtlich der gegenseitigen Lage der drei Punkte A_1, A_2, A_3 eintreten können, sind in Fig. 1. dargestellt, welche wir nun nach der Reihe betrachten wollen.

In Fig. 1. I. ist offenbar:

$$2J=\{\mp(X_2-X_1)(Y_1+Y_2)\pm(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\pm(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

also:

$$2J=\pm\{(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)+(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)+(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss.

In Fig. 1. I*. ist offenbar:

$$2J=\{\mp(X_2-X_1)(Y_1+Y_2)\mp(X_3-X_2)(Y_2+Y_3)\pm(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

also:

$$2J=\pm\{(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)+(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)+(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

wenn man wiederum das obere oder untere Vorzeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss.

In Fig. 1. II. ist offenbar:

$$2J=\{\pm(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\mp(X_3-X_2)(Y_2+Y_3)\pm(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

also:

$$2J=\pm\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2)+(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)+(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

ganz mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

In Fig. 1. II*. ist offenbar:

$$2J=\{\mp(X_2-X_1)(Y_1+Y_2)\pm(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\mp(X_1-X_3)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

also:

$$2J=\pm\{(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)+(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)+(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

ganz mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

In Fig. 1. III. ist offenbar:

$$2J=\{\pm(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\pm(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\mp(X_1-X_3)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

also:

$$2J = \pm\{(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)+(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)+(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

ganz mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie oben.

In Fig. 1. III*. ist offenbar:

$$2J = \{\pm(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\mp(X_3-X_2)(Y_2+Y_3)\mp(X_1-X_3)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

also:

$$2J = \pm\{(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)+(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)+(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

ganz mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie oben.

Hiernach ist also in völliger Allgemeinheit:

$$2J = \pm\{(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)+(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)+(X_3-X_1)(Y_3+Y_1)\}\sin\alpha,$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss.

Nach dieser Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks lässt sich vermuthen, dass der Inhalt J eines jeden $n$ecks durch die Formel:

$$\begin{aligned}\frac{2J}{\sin\alpha} = &\pm(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\\ &\pm(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\\ &\pm(X_3-X_4)(Y_3+Y_4)\\ &\text{u. s. w.}\\ &\pm(X_{n-1}-X_n)(Y_{n-1}+Y_n)\\ &\pm(X_n-X_1)(Y_n+Y_1)\end{aligned}$$

ausgedrückt wird, wenn man in dieser Formel die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um den Umfang des $n$ecks nach der Ordnung der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots . A_n$$

zu durchlaufen, in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss. Die Richtigkeit dieser Vermuthung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, dass das bemerkte Ge-



setz, wenn es bis zu einem $n$eck gilt, dann auch jederzeit für ein $(n+1)$eck gelten muss. Diesen Beweis wollen wir jetzt zu führen versuchen.

Zu dem Ende betrachten wir jetzt ein $(n+1)$eck

$$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots\ldots A_n A_{n+1}$$

und bezeichnen dessen Flächeninhalt durch J'. Wenn wir den Umfang dieses $(n+1)$ecks nach der Ordnung der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots\ldots A_n,\ A_{n+1}$$

durchlaufen, so werden wir uns dabei entweder in gleichem oder in ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen, und daher hierin Veranlassung finden, bei unserer Betrachtung die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden.

Wenn man, indem man den Umfang des $(n+1)$ecks nach der Ordnung der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots\ldots A_n,\ A_{n+1}$$

durchläuft, sich in gleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegt; so wird es immer drei auf einander folgende Ecken

$$A_{k-1},\quad A_k,\quad A_{k+1}$$

geben, die eine solche Lage haben, dass, wenn die Diagonale $A_{k-1}A_{k+1}$ gezogen und der Flächeninhalt des $n$ecks

$$A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{k-1} A_{k+1} \ldots\ldots A_n A_{n+1}$$

durch J bezeichnet wird, die Gleichung

$$J' = J \pm \overline{A_{k-1} A_k A_{k+1}}$$

Statt findet *), indem man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man, um von dem Punkte A_{k-1} durch den Punkt A_k zu dem Punkte A_{k+1} zu gelangen, sich in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss. Halten wir nun aber stets diese Bestimmung wegen der

---

*) Zur Erläuterung kann Fig. 2. dienen.

…eren und unteren Zeichen fest; so ist nach der gemachten Vor-
…ssetzung offenbar:

$$\begin{aligned}
\frac{J}{\sin\alpha} = \; & (X_1 - X_2)(Y_1 + Y_2) \\
& + (X_2 - X_3)(Y_2 + Y_3) \\
& + (X_3 - X_4)(Y_3 + Y_4) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + (X_{k-1} - X_{k+1})(Y_{k-1} + Y_{k+1}) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + (X_n - X_{n+1})(Y_n + Y_{n+1}) \\
& + (X_{n+1} - X_1)(Y_{n+1} + Y_1)
\end{aligned}$$

…d

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{A_{k-1} A_k A_{k+1}}}{\sin\alpha} = \; & \pm (X_{k-1} - X_k)(Y_{k-1} + Y_k) \\
& \pm (X_k - X_{k+1})(Y_k + Y_{k+1}) \\
& \pm (X_{k+1} - X_{k-1})(Y_{k+1} + Y_{k-1}),
\end{aligned}$$

…o, weil

$$(X_{k-1} - X_{k+1})(Y_{k-1} + Y_{k+1}) + (X_{k+1} - X_{k-1})(Y_{k+1} + Y_{k+1}) = 0$$

… nach der obigen Gleichung offenbar:

$$\begin{aligned}
\frac{J'}{\sin\alpha} = \; & (X_1 - X_2)(Y_1 + Y_2) \\
& + (X_2 - X_3)(Y_2 + Y_3) \\
& + (X_3 - X_4)(Y_3 + Y_4) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + (X_{k-1} - X_k)(Y_{k-1} + Y_k) \\
& + (X_k - X_{k+1})(Y_k + Y_{k+1}) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + (X_n - X_{n+1})(Y_n + Y_{n+1}) \\
& + (X_{n+1} - X_1)(Y_{n+1} + Y_1)
\end{aligned}$$

…er:

$$\begin{aligned}
\frac{J'}{\sin\alpha} = \; & (X_1 - X_2)(Y_1 + Y_2) \\
& + (X_2 - X_3)(Y_2 + Y_3) \\
& + (X_3 - X_4)(Y_3 + Y_4) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + (X_n - X_{n+1})(Y_n + Y_{n+1}) \\
& + (X_{n+1} - X_1)(Y_{n+1} + Y_1).
\end{aligned}$$

Wenn man, indem man den Umfang des $(n+1)$ecks nach der Ordnung der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots.\ A_n,\ A_{n+1}$$

durchläuft, sich in ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss; so wird es wieder drei auf einander folgende Ecken

$$A_{k-1},\quad A_k,\quad A_{k+1}$$

geben, die eine solche Lage haben, dass, wenn die Diagonale $A_{k-1}A_{k+1}$ gezogen und der Flächeninhalt des $n$ecks

$$A_1 A_2 A_3 \ldots. A_{k-1} A_{k+1} \ldots. A_n A_{n+1}$$

durch J bezeichnet wird, die Gleichung

$$J' = J \mp \overline{A_{k-1} A_k A_{k+1}}$$

Statt findet, indem man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man, um von dem Punkte A_{k-1} durch den Punkt A_k zu dem Punkte A_{k+1} zu gelangen, sich in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss. Halten wir diese Bedingung wegen des oberen und unteren Zeichens immer fest, so ist nach der gemachten Voraussetzung im vorliegenden Falle offenbar:

$$\begin{aligned}\frac{J}{\sin\alpha} = & -(X_1 - X_2)(Y_1 + Y_2)\\ & -(X_2 - X_3)(Y_2 + Y_3)\\ & -(X_3 - X_4)(Y_3 + Y_4)\\ & \qquad \text{u. s. w.}\\ & -(X_{k-1} - X_{k+1})(Y_{k-1} + Y_{k+1})\\ & \qquad \text{u. s. w.}\\ & -(X_n - X_{n+1})(Y_n + Y_{n+1})\\ & -(X_{n+1} - X_1)(Y_{n+1} + Y_1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\overline{A_{k-1} A_k A_{k+1}}}{\sin\alpha} = & \pm(X_{k-1} - X_k)(Y_{k-1} + Y_k)\\ & \pm(X_k - X_{k+1})(Y_k + Y_{k+1})\\ & \pm(X_{k+1} - X_{k-1})(Y_{k+1} + Y_{k-1}),\end{aligned}$$

also, weil

$$(X_{k-1}-X_{k+1})(Y_{k-1}+Y_{k+1})+(X_{k+1}-X_{k-1})(Y_{k+1}+Y_{k-1})=0$$

ist, nach der obigen Gleichung offenbar:

$$\begin{aligned}\frac{J'}{\sin\alpha}=&-(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\\&-(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\\&-(X_3-X_4)(Y_3+Y_4)\\&\quad\text{u. s. w.}\\&-(X_{k-1}-X_k)(Y_{k-1}-Y_k)\\&-(X_k-X_{k+1})(Y_k+Y_{k+1})\\&\quad\text{u. s. w.}\\&-(X_n-X_{n+1})(Y_n+Y_{n+1})\\&-(X_{n+1}-X_1)(Y_{n+1}+Y_1)\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\frac{J'}{\sin\alpha}=&-(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\\&-(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\\&-(X_3-X_4)(Y_3+Y_4)\\&\quad\text{u. s. w.}\\&-(X_n-X_{n+1})(Y_n+Y_{n+1})\\&-(X_{n+1}-X_1)(Y_{n+1}+Y_1).\end{aligned}$$

Hiernach ist also:

$$\begin{aligned}\frac{J'}{\sin\alpha}=&\pm(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\\&\pm(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\\&\pm(X_3-X_4)(Y_3+Y_4)\\&\quad\text{u. s. w.}\\&\pm(X_n-X_{n+1})(Y_n+Y_{n+1})\\&\pm(X_{n+1}-X_1)(Y_{n+1}+Y_1),\end{aligned}$$

wenn man in dieser Gleichung die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um den Umfang des $(n+1)$ecks nach der Ordnung der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots.\ A_{n+1}$$

zu durchlaufen, in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coor-

dinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss.

Wären die im Allgemeinen durch

$$A_{k-1},\quad A_k,\quad A_{k+1}$$

bezeichneten Punkte die Punkte

$$A_{n+1},\quad A_1,\quad A_2;$$

so bezeichne man einmal vorläufig die Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\ldots . A_n,\quad A_{n+1}$$

respective durch

$$A_2,\quad A_3,\quad A_4,\quad A_5,\ldots . A_{n+1},\quad A_1$$

und die Coordinaten in entsprechender Weise, so sind die Punkte

$$A_{k-1},\quad A_k,\quad A_{k+1}$$

die Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3;$$

und man erhält nun natürlich wieder ganz eben so wie vorher die obige Formel; ersetzt man aber in derselben nun wiederum

$$A_2,\quad A_3,\quad A_4,\quad A_5,\ldots . A_{n+1},\quad A_1$$

respective durch

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\ldots . A_n,\quad A_{n+1};$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{J'}{\sin\alpha} = &\pm(X_{n+1}-X_1)(Y_{n+1}+Y_1)\\
&\pm(X_1-X_2)(Y_1+Y_2)\\
&\pm(X_2-X_3)(Y_2+Y_3)\\
&\quad\text{u. s. w.}\\
&\pm(X_{n-1}-X_n)(Y_{n-1}+Y_n)\\
&\pm(X_n-X_{n+1})(Y_n+Y_{n+1}),
\end{aligned}$$

was offenbar wieder ganz derselbe Ausdruck wie oben ist.

Wären die im Allgemeinen durch

$$A_{k-1},\quad A_k,\quad A_{k+1}$$

bezeichneten Punkte die Punkte

$$A_n,\quad A_{n+1},\quad A_1;$$

so bezeichne man einmal vorläufig die Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\ldots A_{n-1},\quad A_n,\quad A_{n+1}$$

respective durch

$$A_2,\quad A_3,\quad A_4,\quad A_5,\ldots A_n,\quad A_{n+1},\quad A_1$$

und die Coordinaten in entsprechender Weise, so sind die Punkte

$$A_{k-1},\quad A_k,\quad A_{k+1}$$

die Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3;$$

und man erhält nun natürlich wieder ganz eben so wie vorher die obige Formel; ersetzt man aber in derselben nun wiederum

$$A_2,\quad A_3,\quad A_4,\quad A_5,\ldots A_n,\quad A_{n+1},\quad A_1$$

respective durch

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\ldots A_{n-1},\quad A_n,\quad A_{n+1}:$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{J'}{\sin\alpha} = &\pm(X_n - X_{n+1})(Y_n + Y_{n+1})\\ &\pm(X_{n+1} - X_1)(Y_{n+1} + Y_1)\\ &\pm(X_1 - X_2)(Y_1 + Y_2)\\ &\text{u. s. w.}\\ &\pm(X_{n-2} - X_{n-1})(Y_{n-2} + Y_{n-1})\\ &\pm(X_{n-1} - X_n)(Y_{n-1} + Y_n),\end{aligned}$$

was offenbar wieder ganz derselbe Ausdruck wie oben ist.

Hiermit ist nun vollständig bewiesen, dass das bemerkte Gesetz, wenn es bis zum *n*eck gilt, jederzeit auch für das $(n+1)$eck gilt, und daher allgemein gültig ist. Folglich ist in völliger Allgemeinheit für jedes *n*eck, dessen Seiten sich nirgends durchkreuzen:

$$\begin{aligned}\frac{2J}{\sin\alpha} = &\pm(X_1 - X_2)(Y_1 + Y_2)\\ &\pm(X_2 - X_3)(Y_2 + Y_3)\\ &\pm(X_3 - X_4)(Y_3 + Y_4)\\ &\text{u. s. w.}\\ &\pm(X_{n-1} - X_n)(Y_{n-1} + Y_n)\\ &\pm(X_n - X_1)(Y_n + Y_1),\end{aligned}$$

$$\frac{2J}{\sin\alpha} = \pm(x_1 - x_2)\{(y_2 - y_1) + 2y_1\}$$
$$\pm(x_2 - x_3)\{(y_2 - y_1) + (y_3 - y_1) + 2y_1\}$$
$$\pm(x_3 - x_4)\{(y_3 - y_1) + (y_4 - y_1) + 2y_1\}$$
$$\pm(x_4 - x_5)\{(y_4 - y_1) + (y_5 - y_1) + 2y_1\}$$
u. s. w.
$$\pm(x_{n-1} - x_n)\{(y_{n-1} - y_1) + (y_n - y_1) + 2y_1\}$$
$$\pm(x_n - x_1)\{(y_n - y_1) + 2y_1\},$$

also, weil

$$2y_1\{(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + \ldots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_1)\} = 0$$

ist:

$$6) \ldots\ldots \frac{2J}{\sin\alpha} = \pm(x_1 - x_3)(y_2 - y_1)$$
$$\pm(x_2 - x_4)(y_3 - y_1)$$
$$\pm(x_3 - x_5)(y_4 - y_1)$$
$$\pm(x_4 - x_6)(y_5 - y_1)$$
u. s. w.
$$\pm(x_{n-2} - x_n)(y_{n-1} - y_1)$$
$$\pm(x_{n-1} - x_1)(y_n - y_1),$$

welche Formel den Vortheil hat, dass nur Differenzen der Coordinaten darin vorkommen.

Man würde diese Ausdrücke noch unter verschiedenen anderen Formen darstellen können; von vorzüglicher Wichtigkeit für unseren Zweck ist aber die folgende Entwickelung.

Es ist:

$$x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3),$$
$$x_2 - x_4 = (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4),$$
$$x_3 - x_5 = (x_3 - x_4) + (x_4 - x_5),$$
u. s. w.
$$x_{n-2} - x_n = (x_{n-2} - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_n),$$
$$x_{n-1} - x_1 = (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_1);$$

also, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + \ldots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_1) = 0,$$

offenbar:

$$(x_1-x_3)+(x_2-x_4)+(x_3-x_5)+\ldots.+(x_{n-2}-x_n)+(x_{n-1}-x_1)$$
$$=(x_2-x_3)+(x_3-x_4)+(x_4-x_5)+\ldots.+(x_{n-1}-x_n),$$

$$(x_2-x_4)+(x_3-x_5)+\ldots.+(x_{n-2}-x_n)+(x_{n-1}-x_1)$$
$$=-(x_1-x_2)+(x_3-x_4)+(x_4-x_5)+\ldots.+(x_{n-1}-x_n),$$

$$(x_3-x_5)+\ldots.+(x_{n-2}-x_n)+(x_{n-1}-x_1)$$
$$=-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)+(x_4-x_5)+\ldots.+(x_{n-1}-x_n),$$

u. s. w.

$$(x_{n-2}-x_n)+(x_{n-1}-x_1)$$
$$=-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)-\ldots.-(x_{n-3}-x_{n-2})+(x_{n-1}-x_n),$$

$$(x_{n-1}-x_1)$$
$$=-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)-\ldots.-(x_{n-2}-x_{n-1})$$

und:

$$y_2-y_1=(y_2-y_1),$$
$$y_3-y_1=(y_3-y_2)+(y_2-y_1),$$
$$y_4-y_1=(y_4-y_3)+(y_3-y_2)+(y_2-y_1),$$
$$y_5-y_1=(y_5-y_4)+(y_4-y_3)+(y_3-y_2)+(y_2-y_1),$$

u. s. w.

$$y_{n-1}-y_1=(y_{n-1}-y_{n-2})+(y_{n-2}-y_{n-3})+\ldots.+(y_3-y_2)+(y_2-y_1),$$
$$y_n-y_1=(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+(y_{n-2}-y_{n-3})+\ldots.$$
$$\ldots.+(y_3-y_2)+(y_2-y_1);$$

folglich, wenn man diese Ausdrücke in die Gleichung 6) einführt:

$$\frac{2J}{\sin\alpha}$$
$$=\pm(y_2-y_1)\{(x_2-x_3)+(x_3-x_4)+(x_4-x_5)+(x_5-x_6)+\ldots.+(x_{n-1}-x_n)\}$$
$$\pm(y_3-y_2)\{-(x_1-x_2)+(x_3-x_4)+(x_4-x_5)+(x_5-x_6)+\ldots.+(x_{n-1}-x_n)\}$$
$$\pm(y_4-y_3)\{-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)+(x_4-x_5)+(x_5-x_6)+\ldots.+(x_{n-1}-x_n)\}$$
$$\pm(y_5-y_4)\{-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)-(x_3-x_4)+(x_5-x_6)+\ldots.+(x_{n-1}-x_n)\}$$

u. s. w.

$$\pm(y_{n-2}-y_{n-3})\{-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)-\ldots.$$
$$\ldots.-(x_{n-4}-x_{n-3})+(x_{n-2}-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_n)\}$$
$$\pm(y_{n-1}-y_{n-2})\{-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)-(x_3-x_4)-\ldots.$$
$$\ldots.-(x_{n-3}-x_{n-2})+(x_{n-1}-x_n)\}$$
$$\pm(y_n-y_{n-1})\{-(x_1-x_2)-(x_2-x_3)-(x_3-x_4)-\ldots.$$
$$\ldots.-(x_{n-3}-x_{n-2})-(x_{n-2}-x_{n-1})\},$$

welche Gleichung man nach einer leichten Transformation sogleich auf die folgende Form bringt:

$$\frac{2J}{\sin\alpha} = \mp\{(y_2-y_1)(x_3-x_2)-(y_3-y_2)(x_2-x_1)\}$$
$$\mp\{(y_2-y_1)(x_4-x_3)-(y_4-y_3)(x_2-x_1)\}$$
$$\mp\{(y_2-y_1)(x_5-x_4)-(y_5-y_4)(x_2-x_1)\}$$

u. s. w.

$$\mp\{(y_2-y_1)(x_n-x_{n-1})-(y_n-y_{n-1})(x_2-x_1)\}$$
$$\mp\{(y_3-y_2)(x_4-x_3)-(y_4-y_3)(x_3-x_2)\}$$
$$\mp\{(y_3-y_2)(x_5-x_4)-(y_5-y_4)(x_3-x_2)\}$$

u. s. w.

$$\mp\{(y_3-y_2)(x_n-x_{n-1})-(y_n-y_{n-1})(x_3-x_2)\}$$
$$\mp\{(y_4-y_3)(x_5-x_4)-(y_5-y_4)(x_4-x_3)\}$$

u. s. w.

$$\mp\{(y_4-y_3)(x_n-x_{n-1})-(y_n-y_{n-1})(x_4-x_3)\}$$

u. s. w.

u. s. w.

$$\mp\{(y_{n-2}-y_{n-3})(x_{n-1}-x_{n-2})-(y_{n-1}-y_{n-2})(x_{n-2}-x_{n-3})\}$$
$$\mp\{(y_{n-2}-y_{n-3})(x_n-x_{n-1})-(y_n-y_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-3})\}$$
$$\mp\{(y_{n-1}-y_{n-2})(x_n-x_{n-1})-(y_n-y_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})\}.$$

Bezeichnen wir nun, indem wir von jetzt an für ein rechtwinkliges Coordinatensystem den positiven Theil der Axe der y, bei willkührlicher Annahme des positiven Theils der Axe der x, so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach einer Richtung bewegen muss, welche der Richtung entgegengesetzt ist, nach welcher auf dem Limbus der Boussole die Grade von 0 bis 360° gezählt sind, die Seiten

$$\overline{A_1A_2},\quad \overline{A_2A_3},\quad \overline{A_3A_4},\ \ldots,\ \overline{A_{n-1}A_n},\quad \overline{A_nA_1}$$

der Figur

$$A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$$

respective durch

$$s_{12},\quad s_{23},\quad s_{34},\quad s_{45},\ \ldots,\ s_{n-1,n},\quad s_{n1},$$

und die an der Boussole, indem man dieselbe in

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\ldots,A_{n-1},\quad A_n$$

aufstellte und respective nach

$$A_2,\quad A_3,\quad A_4,\quad A_5,\ldots,A_n,\quad A_1$$

visirte, gemachten Ablesungen respective durch

$$\alpha_{12},\quad \alpha_{23},\quad \alpha_{34},\quad \alpha_{45},\ldots,\alpha_{n-1,n},\quad \alpha_{n1};$$

so hat man bekanntlich *) die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$x_\varkappa=x_{\varkappa-1}+s_{\varkappa-1,\varkappa}.\cos(\alpha_{\varkappa-1,\varkappa}-\omega),\quad y_\varkappa=y_{\varkappa-1}+s_{\varkappa-1,\varkappa}.\sin(\alpha_{\varkappa-1,\varkappa}-\omega);$$

$$x_\lambda=x_{\lambda-1}+s_{\lambda-1,\lambda}.\cos(\alpha_{\lambda-1,\lambda}-\omega),\quad y_\lambda=y_{\lambda-1}+s_{\lambda-1,\lambda}.\sin(\alpha_{\lambda-1,\lambda}-\omega);$$

also:

$$\begin{aligned}&(y_\varkappa-y_{\varkappa-1})(x_\lambda-x_{\lambda-1})-(y_\lambda-y_{\lambda-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})\\
=&\,s_{\varkappa-1,\varkappa}s_{\lambda-1,\lambda}\{\sin(\alpha_{\varkappa-1,\varkappa}-\omega)\cos(\alpha_{\lambda-1,\lambda}-\omega)\\
&\qquad-\cos(\alpha_{\varkappa-1,\varkappa}-\omega)\sin(\alpha_{\lambda-1,\lambda}-\omega)\}\\
=&\,s_{\varkappa-1,\varkappa}s_{\lambda-1,\lambda}\sin(\alpha_{\varkappa-1,\varkappa}-\alpha_{\lambda-1,\lambda});\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}7)\quad 2J=&\mp s_{12}s_{23}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{23})\\
&\mp s_{12}s_{34}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{34})\\
&\mp s_{12}s_{45}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{45})\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&\mp s_{12}s_{n-1,n}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{n-1,n})\\
&\mp s_{23}s_{34}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{34})\\
&\mp s_{23}s_{45}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{45})\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&\mp s_{23}s_{n-1,n}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{n-1,n})\\
&\mp s_{34}s_{45}\sin(\alpha_{34}-\alpha_{45})\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&\mp s_{34}s_{n-1,n}\sin(\alpha_{34}-\alpha_{n-1,n})\\
&\qquad\qquad\text{u. s. w.}\\
&\qquad\qquad\text{u. s. w.}\\
&\mp s_{n-3,n-2}s_{n-2,n-1}\sin(\alpha_{n-3,n-2}-\alpha_{n-2,n-1})\\
&\mp s_{n-3,n-2}s_{n-1,n}\sin(\alpha_{n-3,n-2}-\alpha_{n-1,n})\\
&\mp s_{n-2,n-1}s_{n-1,n}\sin(\alpha_{n-2,n-1}-\alpha_{n-1,n}).\end{aligned}$$

---

*) M. s. in diesem Theile S. 86, Nr. 2).

Diese nach einem einfachen Gesetze fortschreitende ganz allgemeine Formel für den Flächeninhalt gestattet die unmittelbare Einführung der gemessenen Seiten der Figuren und der an der Nadel der Boussole gemachten Ablesungen, also der Stücke, welche bei Messungen mit der Boussole die unmittelbare Beobachtung giebt.

Für die Messung mit sogenannten Springständen lassen sich ähnliche Formeln entwickeln, wobei es jedoch nöthig ist, die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so nehme man an, dass die Boussole in den Punkten

$$A_2,\quad A_4,\quad A_6,\quad A_8,\ \ldots,\ A_n$$

aufgestellt worden sei; dann hat man mit Anwendung ganz ähnlicher Bezeichnungen wie vorher die folgenden Gleichungen:

$$x_2=x_1-s_{12}.\cos(\alpha_{21}-\omega),\quad y_2=y_1-s_{12}.\sin(\alpha_{21}-\omega);$$

$$x_3=x_2+s_{23}.\cos(\alpha_{23}-\omega),\quad y_3=y_2+s_{23}.\sin(\alpha_{23}-\omega);$$

$$x_4=x_3-s_{34}.\cos(\alpha_{43}-\omega),\quad y_4=y_3-s_{34}.\sin(\alpha_{43}-\omega);$$

$$x_5=x_4+s_{45}.\cos(\alpha_{45}-\omega),\quad y_5=y_4+s_{45}.\sin(\alpha_{45}-\omega);$$

u. s. w.

$$x_{n-3}=x_{n-4}+s_{n-4,\,n-3}.\cos(\alpha_{n-4,\,n-3}-\omega),$$

$$y_{n-3}=y_{n-4}+s_{n-4,\,n-3}.\sin(\alpha_{n-4,\,n-3}-\omega);$$

$$x_{n-2}=x_{n-3}-s_{n-3,\,n-2}.\cos(\alpha_{n-2,\,n-3}-\omega),$$

$$y_{n-2}=y_{n-3}-s_{n-3,\,n-2}.\sin(\alpha_{n-2,\,n-3}-\omega);$$

$$x_{n-1}=x_{n-2}+s_{n-2,\,n-1}.\cos(\alpha_{n-2,\,n-1}-\omega),$$

$$y_{n-1}=y_{n-2}+s_{n-2,\,n-1}.\sin(\alpha_{n-2,\,n-1}-\omega);$$

$$x_n=x_{n-1}-s_{n-1,\,n}.\cos(\alpha_{n,\,n-1}-\omega),$$

$$y_n=y_{n-1}-s_{n-1,\,n}.\sin(\alpha_{n,\,n-1}-\omega);$$

$$x_1=x_n+s_{n1}.\cos(\alpha_{n1}-\omega),$$

$$y_1=y_n+s_{n1}.\sin(\alpha_{n1}-\omega);$$

und folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:

Den Schluss jeder Gruppe bilden die im Nachlass vorgefundenen Schriften, über welche noch folgende Bemerkungen hier Platz finden mögen.

Unter den im Nachlass vorgefundenen Schriften finden sich zahlreiche Manuscripte, deren Inhalt in den von **Gauss** selbst publicirten Werken schon vollständig enthalten ist. Es ist als Regel angenommen, dieselben unberücksichtigt zu lassen, ausser wo eine in ihnen niedergelegte Methode eine theilweise Veröffentlichung wünschenswerth erscheinen liess.

Zu den vorgefundenen Schriften, welche abgedruckt werden, gehören vor Allem die achte Section der Disquisitiones arithmeticae und einige vollkommen druckfertige Manuscripte, unter andern eine Abhandlung über Interpolation und eine über die Störungen der Pallas. Andere Manuscripte dagegen, von denen sich oft viele auf einen und denselben Gegenstand beziehen und gegenseitig ergänzen, stammen meist aus sehr verschiedenen Zeiten und finden sich so zerstreut, dass sie zum Zweck der Veröffentlichung erst sorgfältig zusammengestellt werden mussten; auch sie werden, nur mit Vermeidung unnöthiger Wiederholungen, unverändert abgedruckt werden. An einigen Stellen haben jedoch kurze Noten hinzugefügt werden müssen, um den Zusammenhang herzustellen und das Verständniss möglich zu machen. Zu diesen Schriften aus dem Nachlass gehören: die Bestimmung der Anzahl der Classen der binären Formen, die Fortsetzungen zu den publicirten Abhandlungen über die biquadratischen Reste und die Untersuchungen über elliptische Functionen.

Von diesen Gruppen, in welche die sämmtlichen Werke ihrem Inhalt nach vertheilt sind, wird die erste in zwei Bänden erscheinen, die zweite, dritte, vierte und fünfte werden den dritten Band bilden, die sechste und siebente den vierten Band, die achte wird den fünften Band und die neunte die beiden letzten Bände umfassen.

Sämmtliche Werke werden also in sieben Bänden unter folgenden Titeln erscheinen:

I. Disquisitiones arithmeticae.
II. Höhere Arithmetik.
III. Analysis.
IV. Geometrie und Methode der kleinsten Quadrate.
V. Mathematische Physik.
VI. Astronomie.
VII. Theoria motus corporum coelestium.

Die Theoria motus corporum coelestium ist zuletzt gestellt

also nach 7):

$$
\begin{aligned}
8^{*})\quad 2J = & \pm s_{12} s_{23} \sin(\alpha_{12} - \alpha_{32}) \\
& \mp s_{12} s_{34} \sin(\alpha_{12} - \alpha_{34}) \\
& \pm s_{12} s_{45} \sin(\alpha_{12} - \alpha_{54}) \\
& \mp s_{12} s_{56} \sin(\alpha_{12} - \alpha_{56}) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& \pm s_{12} s_{n-1,n} \sin(\alpha_{12} - \alpha_{n,n-1}) \\
& \pm s_{23} s_{34} \sin(\alpha_{32} - \alpha_{34}) \\
& \mp s_{23} s_{45} \sin(\alpha_{32} - \alpha_{54}) \\
& \pm s_{23} s_{56} \sin(\alpha_{32} - \alpha_{56}) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& \mp s_{23} s_{n-1,n} \sin(\alpha_{32} - \alpha_{n,n-1}) \\
& \pm s_{34} s_{45} \sin(\alpha_{34} - \alpha_{54}) \\
& \mp s_{34} s_{56} \sin(\alpha_{34} - \alpha_{56}) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& \pm s_{34} s_{n-1,n} \sin(\alpha_{34} - \alpha_{n,n-1}) \\
& \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
& \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
& \pm s_{n-3,n-2} s_{n-2,n-1} \sin(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) \\
& \mp s_{n-3,n-2} s_{n-1,n} \sin(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n,n-1}) \\
& \pm s_{n-2,n-1} s_{n-1,n} \sin(\alpha_{n-2,n-1} - \alpha_{n,n-1}).
\end{aligned}
$$

Für die Zeichen gilt in allen diesen Formeln die aus dem Obigen bekannte Regel, die man jedoch jetzt für den vorliegenden Zweck am Besten auf folgende Art ausspricht: Man muss in den vorstehenden Formeln für den Flächeninhalt des $n$ecks

$$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots . A_n$$

die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem man sich, um den Umfang dieses $n$ecks nach der Ordnung der Ecken

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4, \ldots ., A_n$$

zu durchlaufen, in ungleichem oder gleichem Sinne mit der Richtung bewegen muss, nach welcher auf dem Limbus der Boussole die Grade von 0 bis 360° gezählt sind.

Die Formel 7), welche dem Falle entspricht, wenn die Boussole in allen Punkten der Figur aufgestellt worden ist, wollen wir noch an einem Beispiele erläutern. Da mir gerade keine wirklichen Messungen auf dem Felde mit der Boussole zu Gebote standen, so zeichnete ich mir auf dem Papier ein Sechseck,

maass dessen Seiten mit einem verjüngten Maassstabe, bei welchem 25 Ruthen auf den preussischen Decimalzoll gerechnet waren, und machte die Winkelbestimmungen mit einer Orientir-Boussole auf dem Papier, so dass also von einer gewissen Genauigkeit hier gar nicht die Rede sein kann, auf welche mir es auch gar nicht ankam, da ich bloss ein Rechnungs-Beispiel für die Formel 7) haben wollte.

Die gegebene Figur war das Sechseck

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6,$$

und die Ordnung der Ecken war mit der Richtung, nach welcher auf der Boussole die Grade von 0 bis 360° gezählt sind, gleichstimmig. Da man also hiernach in der Formel 7) die unteren Zeichen nehmen muss, so hat man für den Fall des Sechsecks die folgende Formel:

$$\begin{aligned}2J = \; & s_{12}s_{23}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{23})\\ &+ s_{12}s_{34}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{34})\\ &+ s_{12}s_{45}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{45})\\ &+ s_{12}s_{56}\sin(\alpha_{12}-\alpha_{56})\\ &+ s_{23}s_{34}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{34})\\ &+ s_{23}s_{45}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{45})\\ &+ s_{23}s_{56}\sin(\alpha_{23}-\alpha_{56})\\ &+ s_{34}s_{45}\sin(\alpha_{34}-\alpha_{45})\\ &+ s_{34}s_{56}\sin(\alpha_{34}-\alpha_{56})\\ &+ s_{45}s_{56}\sin(\alpha_{45}-\alpha_{56}),\end{aligned}$$

woraus man zugleich sieht, wie leicht diese Formeln ihres sehr einfachen Gesetzes wegen im Kopfe zu behalten sind.

Aus den freilich nur sehr rohen Messungen, die aber für den vorliegenden Zweck völlig genügen, ergab sich:

$$\begin{array}{ll} s_{12} = 47^0.2' = 472' & \alpha_{12} = 63^0.45' \\ s_{23} = 59\;.8\; = 598 & \alpha_{23} = 132\;.30 \\ s_{34} = 38\;.8\; = 388 & \alpha_{34} = 338\;.45 \\ s_{45} = 32\;.4\; = 324 & \alpha_{45} = 69\;.45 \\ s_{56} = 48\;.7\; = 487 & \alpha_{56} = 318\;.30 \\ s_{61} = 87\;.2\; = 872 & \alpha_{61} = 223\;.30\,^{*)} \end{array}$$

*) s_{61} und α_{61} waren mit gemessen worden, sind aber zur Berechnung des Flächeninhalts nicht erforderlich. Natürlich können die oben stehenden Grössen den beiden Bedingungsgleichungen, die zwischen denselben jederzeit Statt finden müssen, nicht vollständig genügen.

Selbstanzeigen der zweiten, dritten und vierten Abhandlung.

Verschiedene Aufsätze. Zusätze zur Geometrie der Stellung von Carnot, übersetzt von Schumacher. (1810.)

Bestimmung der grössten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt. (1810.)

Auflösung einer geometrischen Aufgabe (betreffend das ebene Fünfeck). (1824.)

Elementare Ableitung eines zuerst von Legendre aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie. (1841.)

Anzeigen. Mollweide de Methodo ab Archimede adhibita ad rationem, in qua inter se sunt latus etc. (1806.)

Monge Géométrie descriptive. (1813.)

Herschel über eine merkwürdige Anwendung des Cotesischen Lehrsatzes. (1814.)

Mollweide über eine dunkle Stelle in Plato's Menon. (1814.)

Schwab Commentatio in primum elementorum Euclidis librum. (1816.)

Metternich vollständige Theorie der Parallel-Linien. — Müller, Theorie der Parallelen. (1822.)

Nachlass. Pothenotsche Aufgabe.

Zu den Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie.

Pentagramma mirificum.

Zur Geometrie der Lage.

B. Methode der kleinsten Quadrate.

Abhandlungen. Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Pars I et II. (1821. 1823.)

Supplementum Theoriae combinationis observationum. (1826.)

Selbstanzeigen dieser Abhandlungen.

Verschiedene Anwendungen. Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. (1816.)

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der practischen Geometrie. (1823.)

Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf chronometrische Längenbestimmung. (1827.)

Anwendung auf Bilanzrechnung der Wittwencasse. (1845.)

BAND V. MATHEMATISCHE PHYSIK.

Abhandlungen. Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum. (1813.)

Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. (1829.)

Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. (1830.)

XIII.

Carl Friedrich Gauss Werke.

Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Vorbemerkung des Herausgebers.

Die Königlich Hannoversche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen hat beschlossen, eine vollständige Ausgabe der Werke von Gauss in sieben Bänden in Quart zu veranstalten, wodurch Dieselbe sich den grössten Dank der Mit- und Nachwelt erwerben wird. Diese Werke sind ein ewig unvergängliches, hoch erhabenes Monument deutschen Scharfsinnes, deutschen Fleisses und deutscher Grösse, sowohl im Allgemeinen, als auch in unserer herrlichen Wissenschaft im Besonderen, und die Veranstaltung einer vollständigen Ausgabe derselben in schönster und trefflichster Ausstattung durch die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen ist ein für alle Zeiten denkwürdiges Factum in der Geschichte der Mathematik, von welchem auch in diesem Archive Act zu nehmen der Herausgeber für eine besonders freudige Pflicht erkennt. Für die Leser des Archivs muss die von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften erlassene Ankündigung der Gesammt-Ausgabe der Gauss'schen Werke schon deshalb überaus wichtig und interessant sein, weil sie darin ein vollständiges Verzeichniss aller Arbeiten des grossen Geometers finden, weshalb der Herausgeber durch einen ganz unverkürzten Abdruck dieses wahrhaft historischen Documents, wie er im Nachstehenden — und zwar im Archive selbst, nicht bloss im Literarischen Berichte — gegeben wird, dem Interesse seiner Leser am Besten zu dienen, und auch am Meisten die Würde des Gegenstandes im Auge zu behalten geglaubt hat.

Greifswald am 25. März 1862. Der Herausgeber.

Nach dem Tode von C. F. Gauss hat die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen die Herausgabe seines literarischen Nachlasses übernommen. Da aber viele seiner gedruckten Werke, namentlich die Disquisitiones arithmeticae, schon seit langer Zeit nicht mehr im Buchhandel sind und der Wunsch nach einer neuen Auflage derselben immer reger geworden, so hat die Königliche Gesellschaft beschlossen, eine Ausgabe von Gauss sämmtlichen Werken, mit Einschluss des Nachlasses, zu veranstalten.

Von den gedruckten sind noch mehrere im Buchhandel vorhanden, wiewohl theils in wenigen Exemplaren, wie die Theoria motus corporum coelestium, theils als Bestandtheile grösserer Sammelwerke, wie die in den „Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen" und in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in den Jahren von 1836 bis 1841" enthaltenen. Es hing daher das Erscheinen der „Sämmtlichen Werke" des grossen Verstorbenen von der Zustimmung der Verlagshandlungen jener Werke ab. Um so mehr verdient es dankbare Anerkennung, dass diese Buchhandlungen, in dem Bestreben, das höhere Interesse deutscher Wissenschaft in diesem Unternehmen zu befördern, auf die von der Königlichen Gesellschaft an sie deshalb ergangene Anfrage ohne alles Bedenken ihre Zustimmung zu ertheilen sich bereit gefunden haben; blos die Buchhandlung von Andreas Perthes in Gotha, welche die Theoria motus corporum coelestium in ihrem Verlage hat, versagte die Zustimmung, und es haben auch die mit derselben geführten Entschädigungs-Verhandlungen zu keinem Resultate geführt. Es wird also vor der Hand, bis die Verlagsrechte erloschen sind, die Theoria motus von der sonst vollständigen Ausgabe ausgeschlossen bleiben, den Fall jedoch ausgenommen, dass eine zweite Auflage, nachdem die wenigen von der ersten noch vorhandenen Exemplare vergriffen worden, nicht zu Stande kommen sollte.

Von grösserer Wichtigkeit für die Wissenschaft ist die Herausgabe des handschriftlichen Nachlasses, welcher durch seine Reichhaltigkeit und Bedeutsamkeit für den ganzen jetzigen Zustand der Wissenschaft in stofflicher sowohl, wie historischer Beziehung hohes Interesse bietet.

Zu diesem Zwecke haben die Gaussischen Erben nicht blos alle auf sie übergegangenen Autorrechte an die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften übertragen, sondern haben auch über den ganzen wissenschaftlichen Nachlass in solcher Weise

Subscriptionen sind durch die Post franco einzusenden unter der Adresse:

An das Secretariat der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Der nach Vollendung des Ganzen eintretende Ladenpreis ist netto für einen Band von 50 bis 60 Bogen auf 6 Thaler und für ein Exemplar auf Schreib-Velinpapier auf 7 Thaler Courant festgestellt.

Der Druck hat begonnen und wird so beschleunigt werden, dass mindestens binnen 5 Jahren die ersten sechs Bände erscheinen werden.

Göttingen im Januar 1862.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

XIV.

Ueber die Bedeutung und Anwendung der in Theil XXXVII. Nr. IV. S. 124. entwickelten Relationen in der analytischen Geometrie.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg

In Thl. XXXVII. des Archivs S. 124. hat der Herr Herausgeber unter der Rubrik Miscellen aus der Gleichung

$$1)\qquad (bc_1-cb_1)x+(ca_1-ac_1)y+(ab_1-ba_1)z=0$$

mittelst der Identitäten

2) $$(bc_1 - cb_1)a + (ca_1 - ac_1)b + (ab_1 - ba_1)c = 0,$$

3) $$(bc_1 - cb_1)a_1 + (ca_1 - ac_1)b_1 + (ab_1 - ba_1)c_1 = 0$$

die Relationen:

4) $$\begin{aligned} ab_1 - ba_1 : bc_1 - cb_1 : ca_1 - ac_1 \\ = ay - bx : bz - cy : cx - az \\ = a_1y - b_1x : b_1z - c_1y : c_1x - a_1z \end{aligned}$$

abgeleitet, über deren Bedeutung und Anwendung in der analytischen Geometrie Einiges gesagt werden möge.

Wir nehmen drei Gerade im Raume an, M, N und O, welche mit den Axen der x, y und z Winkel bilden, deren Cosinus den Grössen a, b, c; a_1, b_1, c_1; x, y, z proportional sind, so folgt aus 1), dass diese drei Geraden Einer Ebene parallel sind. Wenn wir unter Axe einer Ebene irgend eine auf derselben senkrechte Gerade verstehen, so sind nach bekannten Sätzen die Cosinus der Winkel, welche die Axen der den Geraden M und N; M und O; N und O parallelen Ebenen mit den x, y und z-Axen bilden, beziehlich den Ausdrücken

$$\begin{aligned} &bc_1 - cb_1, \quad ca_1 - ac_1, \quad ab_1 - ba_1; \\ &bz - cy, \quad cx - az, \quad ay - bx; \\ &b_1z - c_1y, \quad c_1x - a_1z, \quad a_1y - b_1x \end{aligned}$$

proportional. Ferner ist der Cosinus des Winkels zweier Geraden, die mit den Axen Winkel bilden, deren Cosinus den Grössen $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ proportional sind, gleich

$$\frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}},$$

also $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, wenn beide Gerade auf einander senkrecht stehen. Hiernach bedeutet die Gleichung 1), dass die Gerade O und die Axe der den Linien M und N parallelen Ebenen auf einander senkrecht stehen oder, was dasselbe ist, dass die Linien M, N und O Einer Ebene parallel sind.

Die Identitäten 2) und 3) bedeuten, dass die Axe der Ebene M und N sowohl senkrecht steht auf der Geraden M, als auch auf N, welches der bekannte stereometrische Satz ist: die Axe einer Ebene steht senkrecht auf allen in derselben enthaltenen Geraden. Aus den Relationen 4) geht hervor, dass die Cosinus der Winkel, welche die Axen der den Geraden M und N, M und O, N und O parallelen Ebenen mit den Coordinatenaxen bilden, unter einander proportional sind.



Als erstes Beispiel wollen wir die Determinante nehmen, welche die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf den Flächen enthält:

$$5)\qquad (dyd^2z - d^2ydz)X + (dzd^2x - d^2zdx)Y + (dxd^2y - d^2xdy)Z = 0.$$

dx, dy, dz sind die Projektionen eines Elements der Linie auf den Axen, und mithin den Cosinus der Winkel, welche dieses Element mit den Axen bildet, proportional. X, Y, Z sind Grössen, welche den Cosinus der Winkel proportional sind, die die Flächennormale mit den Axen macht. Die geometrische Bedeutung der Formel 5) besteht darin, dass sie angibt, dass der Winkel zwischen der Axe derjenigen Ebene, welche zwei auf einander folgende Elemente der geodätischen Linie enthält, und der Flächennormale $= 90^0$ ist. Wenn wir die Determinanten 1) und 5) vergleichen, so haben wir zu setzen:

$$\begin{array}{lll} a = dx, & a_1 = d^2x, & x = X, \\ b = dy, & b_1 = d^2y, & y = Y, \\ c = dz; & c_1 = d^2z; & z = Z; \end{array}$$

und erhalten nach 4) folgende Relationen für die geodätischen Linien:

$$\begin{aligned} 6)\qquad & dxd^2y - dyd^2x : dzd^2x - dxd^2z : dyd^2z - dzd^2y \\ & = Ydx - Xdy : Xdz - Zdx : Zdy - Ydz \\ & = Yd^2x - Xd^2y : Xd^2z - Zd^2x : Zd^2y - Yd^2z. \end{aligned}$$

Eine andere Determinante enthält die Gleichung der Krümmungslinien:

$$7)\qquad (YdZ - ZdY)dx + (ZdX - XdZ)dy + (XdY - YdX)dz = 0.$$

Diese Formel hat ihren Grund darin, dass der Winkel zwischen der Axe derjenigen Ebene, welche zwei auf einander folgende Flächennormalen enthält und zwischen einem Elemente der Krümmungslinie gleich 90^0 ist. Bei der Vergleichung von 1) und 7) haben wir zu setzen:

$$\begin{array}{lll} a = X, & a_1 = dX, & x = dx, \\ b = Y, & b_1 = dY, & y = dy, \\ c = Z; & c_1 = dZ; & z = dz; \end{array}$$

und finden nach 4) folgende Relationen für die Krümmungslinien der Flächen:

$$8)\quad XdY-YdX:ZdX-XdZ:YdZ-ZdY$$
$$=Xdx-Ydx:Zdx-Xdz:Ydz-Zdy$$
$$=dXdy-dYdx:dZdx-dXdz:dYdz-dZdy.$$

XV.

ehrsatz von den kürzesten Linien auf Rotationsflächen.

Von

Herrn *Eugen Lommel*,

Professor in Schwyz.

Der zu beweisende Lehrsatz ist folgender:

Projicirt man ein Stück AP (Taf. VII. Fig. 4.) der kürzesten Linie, welche sich auf einer beliebigen Rotationsfläche zwischen zwei Punkten A und B derselben ziehen lässt, sammt den Geraden AC und PC, welche irgend einen Punkt C der Rotationsaxe mit den Punkten A und P verbinden, auf eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene $XC'Y$, so ist das von den Projektionen des Curvenstücks AP und der Geraden AC und PC begrenzte Flächenstück $A'P'C'$ stets der Bogenlänge AP proportional, oder gleichen Bogenlängen AP entsprechen immer gleiche Flächenstücke $A'P'C'$.

Beweis. Damit der Bogen

$$L=\int_0^L ds=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,.dz$$

unter allen, welche auf der Rotationsfläche zwischen den Punkten A und B (deren z-Coordinaten resp. durch a und b bezeichnet sind) gezogen werden können, der kürzeste sei, muss seine Variation δL verschwinden, d. h. es muss

$$\int_a^b \left(\frac{\frac{dx}{dz}.\delta\left(\frac{dx}{dz}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} + \frac{\frac{dy}{dz}.\delta\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} \right) dz = 0,$$

oder, wenn man von nun an s als die unabhängig Variable betrachtet, es muss

$$1) \qquad \int_0^L \left(\frac{dx}{ds}.\frac{d\delta x}{ds}+\frac{dy}{ds}.\frac{d\delta y}{ds}\right) ds = 0$$

sein. Integrirt man hier theilweise, um die Differenziale der Variationen wegzuschaffen, so erhält man:

$$2) \qquad \left[\frac{dx}{ds}.\delta x+\frac{dy}{ds}.\delta y\right]_0^L - \int_0^L \left(\frac{d^2x}{ds^2}.\delta x+\frac{d^2y}{ds^2}.\delta y\right).ds = 0.$$

Weil aber die gesuchte kürzeste Linie auf der Rotationsfläche liegen muss, deren Gleichung in der Form

$$3) \qquad z = f(x^2+y^2) \quad \text{oder} \quad z = f(u)$$

$$(u \text{ statt } x^2+y^2 \text{ gesetzt})$$

gegeben sei, so sind die Variationen δx und δy vermöge der Gleichung

$$4) \qquad x.\frac{df}{du}.\delta x + y.\frac{df}{du}.\delta y = 0 \quad \text{oder} \quad x\delta x + y\delta y = 0,$$

welche durch Variiren der vorhergehenden erhalten wird, von einander abhängig. Setzt man aus 4)

$$\delta y = -\frac{x}{y}.\delta x$$

in Gleichung 2), so wird dieselbe jetzt:

$$5) \qquad \left[\frac{\delta x}{y}\left(y.\frac{dx}{ds}-x.\frac{dy}{ds}\right)\right]_0^L - \int_0^L \frac{\delta x}{y}\left(y.\frac{d^2x}{ds^2}-x.\frac{d^2y}{ds^2}\right).ds = 0.$$

Da der Anfangs- und Endpunkt der Curve bestimmt gegeben sind, so ist $\delta x_0 = \delta x_L = 0$, und das ausserhalb des Integralzeichens stehende Glied verschwindet von selbst; zur Erfüllung der Gleichung ist daher nur noch nöthig, dass der Faktor von δx unter dem Integralzeichen Null werde, dass also

6) $$y \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - x \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

sei. Die Integration dieser Gleichung gibt aber sogleich:

7) $$\tfrac{1}{2}(ydx - xdy) = cds,$$

unter c eine willkührliche Constante verstanden. Die linke Seite der Gleichung 7) stellt nun bekanntlich das dreieckige Flächenelement $C'P'Q'$ vor, oder, wenn man das zum Bogen $AP=s$ zugehörige Flächenstück $A'P'C'$ mit λ bezeichnet, das Differenzial von λ. Integrirt man daher von Neuem, indem man berücksichtigt, dass λ mit s zugleich Null sein muss, so erhält man endlich:

8) $$\lambda = cs.$$

Diess ist aber der analytische Ausdruck des oben ausgesprochenen Lehrsatzes.

Derselbe Lehrsatz gilt auch noch für die kürzeste Linie, welche auf einer beliebigen Rotationsfläche zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen gezogen wird; denn diese Linie wird durch die nämliche Gleichung 5) bestimmt, nur dass jetzt das ausserhalb des Integralzeichens stehende Glied nicht von selbst verschwindet, sondern wegen der Willkührlichkeit von δx_0 und δx_L in zwei Grenzgleichungen zerfällt, welche zur Bestimmung der bei Integration der Differentialgleichung 6) eingehenden willkührlichen Constanten dienen, für den Beweis unseres Lehrsatzes aber ohne weiteren Belang sind.

Auch gilt der Lehrsatz noch für die kürzeste Linie, welche auf einer Rotationsfläche von einem gegebenen Punkt zu einer gegebenen Curve, und für diejenige, welche zwischen zwei gegebenen Curven gezogen wird, indem diese beiden Fälle die nämliche Differenzialgleichung 6) liefern, und sich von den vorhergehenden nur durch die Beschaffenheit ihrer für den Beweis des Lehrsatzes unwesentlichen Grenzgleichungen unterscheiden.

Nachschrift des Herausgebers.

Der verehrte Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes hatte dessen Abdruck meinem Ermessen anheim gestellt, namentlich es meiner Entscheidung überlassen, ob der darin bewiesene Satz neu sei oder nicht. Absolut neu ist nun der Satz allerdings nicht und findet sich u. A. schon für das Rotations-Ellipsoid, ohne

Variationsrechnung bewiesen, in meiner Abhandlung: Ueber die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf einer beliebigen Fläche und über die Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie. Thl. XXII. S. 89. Nr. 10) ganz in derselben Weise, wie er von dem Herrn Verfasser in No. 7) analytisch ausgesprochen worden ist. Nun hat aber der Herr Verfasser den Satz für Rotationsflächen überhaupt bewiesen, — was sich übrigens auch, wie ich nachher zeigen werde, sehr leicht aus den bekannten allgemeinen Gleichungen der geodätischen Linie ableiten lässt, — und hat denselben zugleich auf einen bemerkenswerthen geometrischen Ausdruck gebracht, auch noch andere Bemerkungen beigefügt; ausserdem bietet die von dem Herrn Verfasser gegebene Ableitung durch die Variationsrechnung ein zweckmässiges Beispiel für die Anwendung dieses Calculs dar, so dass ich glaube und hoffe, in dessen Sinne gehandelt zu haben, wenn ich seinen Aufsatz habe abdrucken lassen.

Ich will nun noch zeigen, wie der Satz für Rotationsflächen überhaupt aus den bekannten allgemeinen Gleichungen der geodätischen Linie sehr leicht abgeleitet werden kann.

In meiner vorher erwähnten Abhandlung S. 87. No. 8) habe ich ohne unmittelbare Anwendung der Variationsrechnung die folgenden Gleichungen der geodätischen Curve bewiesen:

$$1) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} &= 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} &= 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= 0; \end{aligned} \right.$$

wo

$$\Omega = F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der Fläche bezeichnet, auf welcher die geodätische Curve gezogen worden.

Für Rotationsflächen ist nun in der Bezeichnung des Herrn Verfassers:

$$z = f(x^2 + y^2) = f(u) \quad \text{für} \quad u = x^2 + y^2$$

oder

$$z - f(x^2 + y^2) = z - f(u) = 0,$$

im Obigen also

$$\Omega = F(x, y, z) = z - f(x^2 + y^2) = z - f(u)$$



zu setzen, und folglich, da alle Differentialquotienten von Ω partielle Differentialquotienten sind:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-2xf'(u),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y}=-\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf'(u),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}=1;$$

also hat man nach 1) unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$2)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x\dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2}-y\dfrac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0,\\[2ex] 2yf'(u)\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2}=0,\\[2ex] 2xf'(u)\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0;\end{array}\right.$$

unter denen die von dem Herrn Verfasser gegebene Gleichung die erste ist.

Dass jede der drei vorstehenden Gleichungen eine Folge aus den beiden anderen ist, übersieht man auf den ersten Blick und versteht sich auch ganz von selbst.

Möge der Herr Verfasser hieraus die von mir seinem Aufsatze gewidmete Aufmerksamkeit erkennen!



XVI.

Einfachste Herleitung zweier bekannter Integralformeln.

Von
Herrn *Eugen Lommel*,
Professor in Schwyz.

Um das Integral $\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}.f(x).dx$, in welchem k unendlich gross, aber positiv ganz, und h beliebig positiv gedacht ist, auszuwerthen, schreibe man dasselbe in der Form:

$$k.\int_0^h \frac{\sin kx}{k\sin x}.f(x).dx$$

und bemerke, dass

$$\frac{\sin kx}{k\sin x}=0$$

ist für jeden Werth von x, mit Ausnahme der Werthe

$$x=0,\quad \pi,\quad 2\pi,\quad 3\pi,\ldots.\ n\pi,\ldots.$$

Für diese hat man:

$$\frac{\sin kn\pi}{k\sin n\pi}=1,$$

wenn k ungerade ist; ist dagegen k gerade, so hat man:

$$\frac{\sin kn\pi}{k\sin n\pi}=\pm 1,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Denkt man sich daher $f(x)$ als Ordinate einer auf ein Orthogonal-Coordinatensystem bezogenen Curve (Taf. VII. Fig. 5.), und demnach $f(x)dx$ als Element des von dieser Curve und der Abscissenaxe begrenzten Flächenstücks, so wird das Integral

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{k\sin x}.f(x).dx$$

nur die Summe derjenigen Flächenelemente vorstellen, welche den Werthen $x=0$, π, 2π, ... $n\pi$ entsprechen (wenn $h>n\pi$, aber $<(n+1)\pi$ gedacht wird), jedes Flächenelement noch multiplicirt mit dem zugehörigen Werthe des Faktors $\frac{\sin kx}{k\sin x}$. Ist z. B. $h>0$, aber $<\pi$, so bleibt nur das Element $f(0).dx$ übrig; ist ferner $h=\pi$, so stellt das Integral die Summe $f(0).dx \pm f(\pi).dx$ vor, wo das obere oder das untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem k ungerade oder gerade ist. Läge aber h zwischen π und 2π, so würde nicht bloss das Flächenelement zu nehmen sein, welches der Ordinate $f(\pi)$ unmittelbar vorausgeht, sondern auch noch dasjenige, welches ihr unmittelbar nachfolgt; in diesem Falle wäre also das Integral ausgedrückt durch die Summe $f(0).dx \pm 2f(\pi).dx$. So weiter fortschliessend gelangt man, wenn h zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ liegt und k ungerade ist, zu der Gleichung

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}.f(x).dx = 2kdx\left(\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots\ldots+f(n\pi)\right),$$

wo von dem letzten Gliede nur die Hälfte genommen werden darf, wenn $h=n\pi$ ist. Für ein gerades k dagegen erhält man:

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}.f(x).dx=2kdx\left(\tfrac{1}{2}f(0)-f(\pi)+f(2\pi)-\ldots\ldots(-1)^n.f(n\pi)\right).$$

Um den Faktor $2kdx$ zu bestimmen, setze man $f(x)=1$ und $h=\frac{1}{2}\pi$, so ergibt sich aus beiden Gleichungen:

$$2kdx=2.\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kx}{\sin x}.dx=\pi,$$

so dass man schliesslich die beiden Formeln

I.

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}.f(x).dx = \pi\left(\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots\ldots+f(n\pi)\right),$$

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}.f(x).dx =\pi\left(\tfrac{1}{2}f(0)-f(\pi)+f(2\pi)-\ldots\ldots(-1)^n.f(n\pi)\right)$$

gefunden hat, von denen die erstere für ein ungerades, die letz-

tere für ein gerades k gilt, während in beiden h zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ liegend gedacht wird; wäre dagegen $h=n\pi$, so darf in beiden Formeln vom letzten Gliede nur die Hälfte genommen werden.

Auf eben so einfache Weise lässt sich der Werth des Integrals

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{x} . f(x) . dx$$

für ein unendlich grosses k ermitteln, wenn man dasselbe in der Form

$$k . \int_0^h \frac{\sin kx}{kx} . f(x) . dx$$

schreibt. Weil nämlich $\frac{\sin kx}{kx}=0$ ist für alle Werthe von x, ausser für $x=0$, wo

$$\left[\frac{\sin kx}{kx}\right]_0 = 1$$

sich ergibt, so hat man:

$$\int_0^h \frac{\sin kx}{x} . f(x) dx = kdx . f(0),$$

oder, weil der Faktor kdx, indem man $f(x)=1$ nimmt, $=\frac{1}{2}\pi$ gefunden wird,

$$\text{II.} \ldots\ldots \int_0^h \frac{\sin kx}{x} . f(x) dx = \tfrac{1}{2}\pi . f(0).$$

Diese Herleitung der Formeln I. und II. lässt zugleich erkennen, dass dieselben stets gelten, so lange nur innerhalb der Grenzen des Integrals die Funktion $f(x)$ nicht unendlich wird, oder wenn, falls dieses doch eintreten sollte, der Exponent des Faktors, welcher im Nenner von $f(x)$ verschwindet, kleiner ist als 1.

XVII.

Ueber die Beugung des polarisirten Lichtes.

Von

Herrn *Eugen Lommel,*

Professor in Schwyz

---

§. 1. Die Formeln, welche ich in meinem Aufsatze: „Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichts" im XXXVI. Theile des Archivs S. 385 ff. zur Berechnung der Beugungserscheinungen angegeben habe, nehmen keine Rücksicht auf die Polarisationsverhältnisse der einfallenden Strahlen. Es soll nun hier zunächst gezeigt werden, wie dieselben zu modificiren sind, um für polarisirte Strahlen zu gelten.

Wenn dort behauptet wurde, ein vom Elemente $dydx$ der beugenden Oeffnung ausgehendes Strahlenbündel, welches mit den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus a, b, c sind, bringe auf der halbkugeligen Bildfläche (deren Radius gleich der Brennweite des Objektivs ist), die Excursion

$$\sin(p+qx+ry).dydx$$

hervor (wo der Kürze wegen $\frac{2\pi}{\lambda}(vt-f)=p$, $\frac{2\pi a}{\lambda}=q$, $\frac{2\pi b}{\lambda}=r$ gesetzt wurde), so geschah diess unter der stillschweigenden Annahme, dass die Kugelwelle, welche sich von einem Aethertheilchen der Oeffnung aus im isotropen Aether ausbreitet, in allen ihren Punkten die nämliche Beschaffenheit aufweise, oder dass alle von jenem Aethertheilchen ausgehenden Elementarstrahlen hinsichtlich ihrer Lichtwirkungen unter sich identisch seien. Nun ist aber klar, dass bei geradlinig polarisirtem Licht eine solche Gleichheit der Elementarstrahlen nicht stattfinden kann. Erfolgen nämlich die Oscillationen des erregenden Aethertheilchens in einer bestimmten Geraden, so werden die Schwingungsrichtungen

aller Aethertheilchen eines beliebigen, von jenem ausgehenden Elementarstrahles parallel mit dieser Geraden sein; es werden daher nur in jenen Strahlen, welche in der durch das erregende Aethertheilchen senkrecht zu seiner Schwingungsrichtung gelegten Ebene (im Aequator der Kugelwelle) sich ausbreiten, die Oscillationen senkrecht zum Strahle erfolgen; bei allen übrigen Strahlesrichtungen sind die Schwingungen zum Strahle geneigt, ja in der Oscillationsrichtung selbst (in der Axe der Kugelwelle) pflanzen sich nur longitudinale Schwingungen fort. Da nun bekanntlich die longitudinalen Schwingungen, auch wenn sie vorhanden sind, nicht in die Erscheinung treten, so wird sich in den Polen der Kugelwelle gar keine Lichtentwickelung zeigen, dieselbe wird aber zunehmen, je mehr man sich von den Polen entfernt, und endlich im Aequator ihr Maximum erreichen, weil jede zum Strahle geneigte Oscillation in eine transversale und in eine longitudinale Composante sich zerlegen lässt, von denen die letztere für die Wahrnehmung verschwindet. Bezeichnet man daher mit φ den Winkel, welchen der nach a, b, c gerichtete Elementarstrahl mit der Oscillationsrichtung des einfallenden polarisirten Lichtes bildet, so hängt die auf der Bildfläche von ihm erzeugte Wirkung bloss von der transversalen Excursion

$$\sin\varphi . \sin(p + qx + ry) . dy dx$$

ab. Nimmt man alsdann, um die Resultante aller im Punkte a, b, c der Bildfläche zusammenwirkenden Elementarstrahlen zu erhalten, das Doppelintegral dieses Ausdrucks über alle Punkte des Schirms, welche dem Lichte den Durchgang verstatten, so tritt der Faktor $\sin\varphi$, weil von x und y unabhängig, vor das Doppelintegralzeichen, und folglich wird der im oben citirten Aufsatz unter der Form

$$J^2 = C^2 + S^2$$

(wo der Kürze wegen

$$\iint \cos(qx + ry) dy dx = C \quad \text{und} \quad \iint \sin(qx + ry) dy dx = S$$

gesetzt ist) aufgestellte Ausdruck für die Intensität des Bildpunktes a, b, c jetzt unter der Form

$$\sin^2\varphi . J^2$$

erscheinen. Wenn z. B., wie es bei einem zur Schirmebene senkrecht stehenden geradlinig polarisirten Lichtbündel der Fall ist, die Oscillationsrichtung in die Schirmebene selbst fällt und mit der positiven x-Axe den Winkel ψ bildet, so ist:

$$\cos\varphi = a \cos\psi + b \sin\psi, \quad . \; .$$

also

$$\sin^2\varphi = 1 - (a\cos\psi + b\sin\psi)^2.$$

Dieser Faktor erreicht seinen grössten Werth 1, wenn man hat $a\cos\psi + b\sin\psi = 0$ oder $b = -a.\mathrm{cotg}\,\psi$. Denkt man sich daher das durch

$$\sin^2\varphi \,.\, J^2$$

vorgestellte Bild auf die Schirmebene projicirt, so dass a und b Abscisse und Ordinate eines Punktes der Bildprojektion vorstellen, so erkennt man, dass die von geradlinig polarisirtem Licht hervorgebrachte Erscheinung mit der früher unter Annahme völlig gleicher Elementarstrahlen erhaltenen nur in einer durch die Bildmitte senkrecht zur Oscillationsrichtung gezogenen Geraden vollkommen übereinstimmt; in jedem andern Punkte aber erscheint das jetzige Bild gegen das frühere verdunkelt, und zwar um so mehr, je weiter dieser Punkt von der genannten Geraden entfernt liegt; alle durch den Faktor $\sin^2\varphi$ gleichstark beschatteten Punkte liegen demnach auf geraden Linien, welche zur Oscillationsrichtung senkrecht stehen.

Wäre die Oscillationsrichtung der einfallenden Strahlen ein Mal der Ordinatenaxe, das andere Mal der Abscissenaxe parallel ($\psi = 90^0$ und $\psi = 0$), und betrachtet man in beiden Fällen nur die Intensität der Abscissenaxe ($b = 0$), so erhält man im ersten Falle den Ausdruck:

$$J_a^2,$$

im zweiten dagegen:

$$(1 - a^2).J_a^2 = \cos^2\chi.J_a^2,$$

wenn χ den Beugungswinkel bezeichnet.

Auf die so eben entwickelten Betrachtungen gestützt, versuchte bereits Holtzmann mittelst der Gittererscheinungen die Frage, ob die Oscillationen eines polarisirten Strahles in die Polarisationsebene fallen oder senkrecht zu derselben stehen, direkt zu entscheiden. Schwingt nämlich der einfallende Lichtstrahl parallel zu den Stäben des Gitters, so müssten die Spektren intensiver erscheinen, als wenn die Oscillationen zu den Gitterstäben senkrecht stehen. Holtzmann und Stokes glaubten aus ihren Versuchen auf Schwingungen im Sinne der Polarisationsebene schliessen zu dürfen, Eisenlohr auf solche in senkrechter Richtung. Die Unsicherheit dieser Resultate erklärt sich leicht durch folgende Erwägungen. Das menschliche Auge vermag einen Unterschied zwischen den Intensitäten zweier an ein-

ander grenzenden Lichtflächen erst dann mit Sicherheit zu gewahren, wenn die Lichtstärke der einen weniger beträgt als $\frac{59}{60}$ von der Lichtstärke der andern. Hätte man daher die beiden zu vergleichenden Spektrenreihen hart neben einander, so würden die brillanteren Spektren der Mitte in beiden Bildern vollkommen gleich hell erscheinen, und der Unterschied würde sich erst zu zeigen beginnen, wenn $\cos^2\chi$ kleiner als $\frac{59}{60}$, oder der Beugungswinkel grösser als $7^0\ 25'$ geworden wäre. Beobachtet man aber die beiden Gittererscheinungen nicht gleichzeitig neben einander, sondern successive, so werden sie noch weiter hinaus merklich gleich erscheinen; ein frappanter Unterschied würde erst in den äussern Spektren auftreten, welche ihrer Lichtschwäche wegen schwer zu beobachten sind. Die Unsicherheit wird ferner noch dadurch erhöht, dass die einfallenden Strahlen durch die auf Glas gezeichneten Gitter noch zwei Brechungen erleiden, welche auf verschieden gerichtete Schwingungen ungleich wirken.

§. 2. Das natürliche Licht besteht, nach der gebräuchlichen Vorstellung, aus zum Strahle senkrechten Oscillationen, welche in unmessbar kleiner Zeit alle möglichen Azimute durchlaufen. Diejenigen Oscillationen eines natürlichen, zum Schirme senkrechten Strahlenbündels, welche dem Azimute ψ angehören, würden im Punkte a, b, c des Beugungsbildes die Intensität

$$[1-(a\cos\psi+b\sin\psi)^2].J^2$$

hervorbringen. Um den von allen Oscillationen des Strahles erzeugten Lichteindruck zu bestimmen, muss man das arithmetische Mittel nehmen aus allen Werthen des vorstehenden Ausdrucks, welche derselbe annimmt, während ψ alle um das unendlich kleine $d\psi$ von einander verschiedenen Werthe von 0 bis 2π durchläuft. Da nun $\frac{2\pi}{d\psi}$ die Anzahl aller Azimute ist, so ergibt sich die Intensität

$$J^2.\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{2\pi}.[1-(a\cos\psi+b\sin\psi)^2]=(1-\frac{a^2+b^2}{2}).J^2=\frac{1+c^2}{2}.J^2.$$

Das Beugungsbild, welches ein natürliches Strahlenbündel von der angenommenen Beschaffenheit hervorbringt, ist demnach nur in der Bildmitte, wo sich die ungebeugten Strahlen sammeln, mit dem früher berechneten identisch; alle übrigen Punkte des Bildes erscheinen um so mehr geschwächt, je weiter sie von der Bildmitte entfernt sind, so dass die gleich stark geschwächten

Punkte in concentrischen Kreisen um die Bildmitte gereiht sind; am Rande des Bildes beträgt die Lichtstärke nur mehr die Hälfte der früheren.

Sollte der Ausdruck J^2 für sich allein der Erscheinung entsprechen, so müsste man Lichtstrahlen annehmen, deren Oscillationen nicht bloss in einer zum Strahle senkrechten Ebene, sondern in allen möglichen Richtungen des Raumes erfolgen, wobei aber nur die transversalen Componenten der Oscillationen Lichtwirkung hervorbringen würden.

§. 3. Obgleich die von den Polarisations-Verhältnissen der einfallenden Strahlen herrührenden Modifikationen des Beugungsbildes, so weit sie wenigstens den brillanteren Theil des Bildes betreffen, der Wahrnehmung so leicht entgehen, dass wohl in allen Fällen, wo es nicht gerade auf Diskussion jener Modifikationen abgesehen ist, der Ausdruck J^2 allein schon den Erscheinungen genügt, so dürfte doch eine Untersuchung der Aenderungen, welche doppeltbrechende Krystallplatten im Beugungsbilde hervorbringen, nicht ohne theoretisches Interesse sein. Die beugende Oeffnung sei daher durch eine einzige, parallel zur optischen Axe geschliffene Platte verschlossen, und diese werde von einem Bündel geradlinig polarisirten Lichtes, dessen Oscillationsrichtung mit der positiven x-Axe den Winkel α bilde, senkrecht getroffen. Bezeichnet alsdann ψ den Winkel, welchen die optische Axe mit der positiven x-Axe einschliesst, so bildet der gebeugte Strahl a, b, c mit der Oscillationsrichtung des ordinären Strahles einen Winkel χ_1, dessen Cosinus gleich ist:

$$\cos\chi_1 = -a\sin\psi + b\cos\psi,$$

und mit der Oscillationsrichtung des extraordinären Strahles einen Winkel χ_2, für dessen Cosinus man hat:

$$\cos\chi_2 = a\cos\psi + b\sin\psi.$$

In dem Punkte a, b, c der Bildfläche kommen demnach zwei geradlinig polarisirte Strahlen zur Wirkung, deren auf das Auge wirksame Excursionen durch die Doppelintegrale

$$\mathfrak{O})\qquad \varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 . \iint \sin(p+c+qx+ry)\,dy\,dx$$

und

$$\mathfrak{E})\qquad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 . \iint \sin(p+e+qx+ry)\,dy\,dx$$

dargestellt werden, in welchen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Schwächungscoefficienten für den ordinären und extraordinären Strahl bezeichnen,

o und e aber beziehlich statt $\frac{2\pi}{\lambda}(\omega-1)d$ und $\frac{2\pi}{\lambda}(\varepsilon-1)d$ stehen, während d die Dicke der Platte, ω und ε aber die Brechungsquotienten für den ordinären und extraordinären Strahl sind. Um die Intensität des elliptisch polarisirten Strahles, welcher aus dem Zusammenwirken der Strahlen Ω und E hervorgeht, kennen zu lernen, braucht man nur die Quadrate der Amplituden zweier beliebiger rechtwinkliger Composanten desselben zu addiren. Der Winkel ξ aber, den die Oscillationsrichtungen dieser beiden Strahlen mit einander einschliessen, hat zum Cosinus:

$$\cos\xi = -\frac{\cos\chi_1 \cos\chi_2}{\sin\chi_1 \sin\chi_2}.$$

Zerlegt man jetzt die Excursion des extraordinären Strahles in zwei andere, deren eine mit derjenigen des ordinären Strahles zusammenfällt und deren andere senkrecht darauf steht, also in:

$$E_1)\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi . \int\int \sin(p+e+qx+ry)\,dydx$$

und

$$E_2)\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi . \int\int \sin(p+e+qx+ry)\,dydx,$$

so hat man statt der schiefwinkligen Composanten Ω und E jetzt die rechtwinkligen:

$$\Omega')\quad \varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 . \int\int \sin(p+o+qx+ry)\,dydx$$
$$+\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi . \int\int \sin(p+e+qx+ry)\,dydx,$$

$$E')\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi . \int\int \sin(p+e+qx+ry)\,dydx.$$

Trennt man, zuerst in Ω', den Theil p der Phase, welcher die Zeit t enthält, von dem übrigen, so erhält man:

$$\Omega')\quad \sin p\Big(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 . \int\int \cos(o+qx+ry)\,dydx$$
$$+\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 . \cos\xi . \int\int \cos(e+qx+ry)\,dydx\Big)$$
$$+\cos p\Big(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 . \int\int \sin(o+qx+ry)\,dydx$$
$$+\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 . \cos\xi . \int\int \sin(e+qx+ry)\,dydx\Big).$$

Um das Quadrat der Amplitude des Strahles Ω' zu erhalten, braucht man nur die Quadrate der Faktoren zu addiren, mit welchen im vorstehenden Ausdruck $\sin p$ und $\cos p$ multiplicirt erscheinen; ehe wir jedoch diess thun, zerlegen wir die unter den Integralzeichen stehenden Sinus und Cosinus nochmals, indem wir den constanten Theil des Bogens vom variabeln trennen. Wir erhalten für die beiden Faktoren:

$$(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \cos\mathfrak{o} + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \cos\mathfrak{e}).C$$
$$-(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin\mathfrak{o} + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \sin\mathfrak{e}).S$$

und

$$(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin\mathfrak{o} + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \sin\mathfrak{e}).C$$
$$+(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \cos\mathfrak{o} + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \cos\mathfrak{e}).S.$$

Diese beiden Ausdrücke geben, quadrirt und addirt, für das Quadrat der Amplitude des Strahles Ω':

$$\Omega')\quad [\varkappa_1^2 \sin^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_1 + \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2 \cos^2\xi$$
$$+2\varkappa_1\varkappa_2 \sin(\alpha-\psi)\cos(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin\chi_2 \cos\xi \cos(\mathfrak{o}-\mathfrak{e})].(C^2+S^2).$$

Nimmt man mit dem Strahl E', um das Quadrat seiner Amplitude zu berechnen, eine ähnliche Zerlegung vor, so findet man zunächst:

$$E')\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi \left(\sin p \iint \cos(\mathfrak{e}+qx+ry)\,dy\,dx\right.$$
$$\left.+\cos p \iint \sin(\mathfrak{e}+qx+ry)\,dy\,dx\right),$$

so dass man die Quadrate folgender zwei Ausdrücke

$$\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi.[C\cos\mathfrak{e} - S\sin\mathfrak{e}]$$

und

$$\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi.[S\cos\mathfrak{e} + C\sin\mathfrak{e}]$$

zu addiren hat; man findet demnach für das Quadrat der Amplitude des Strahles E'):

$$E')\qquad \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2 \sin^2\xi.(C^2+S^2).$$

Um nun schliesslich die Intensität des elliptisch polarisirten Strahles, welcher aus dem Zusammenwirken der Composanten Ω' und E' hervorgeht, zu kennen, braucht man nur noch die gefundenen Amplitudenquadrate zu addiren, und erhält:

$$[\varkappa_1^2 \sin^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_1 + \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2$$
$$+2\varkappa_1\varkappa_2 \sin(\alpha-\psi)\cos(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin\chi_2 \cos\xi \cos(\mathfrak{o}-\mathfrak{e})].(C^2+S^2),$$

oder, nach Einführung des Werthes von $\cos\xi$:

$$[\varkappa_1^2 \sin^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_1 + \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2$$
$$-2\varkappa_1\varkappa_2 \sin(\alpha-\psi)\cos(\alpha-\psi)\cos\chi_1 \cos\chi_2 \cos(\mathfrak{o}-\mathfrak{e})].J^2.$$

§. 4. Der Ausdruck J^2 erscheint demnach jetzt durch einen Faktor modificirt, welcher einerseits von der Wellenlänge und

o und e aber beziehlich statt $\frac{2\pi}{\lambda}(\omega-1)d$ und $\frac{2\pi}{\lambda}(\varepsilon-1)d$ stehen, während d die Dicke der Platte, ω und ε aber die Brechungsquotienten für den ordinären und extraordinären Strahl sind. Um die Intensität des elliptisch polarisirten Strahles, welcher aus dem Zusammenwirken der Strahlen Ω und E hervorgeht, kennen zu lernen, braucht man nur die Quadrate der Amplituden zweier beliebiger rechtwinkliger Composanten desselben zu addiren. Der Winkel ξ aber, den die Oscillationsrichtungen dieser beiden Strahlen mit einander einschliessen, hat zum Cosinus:

$$\cos\xi = -\frac{\cos\chi_1 \cos\chi_2}{\sin\chi_1 \sin\chi_2}.$$

Zerlegt man jetzt die Excursion des extraordinären Strahles in zwei andere, deren eine mit derjenigen des ordinären Strahles zusammenfällt und deren andere senkrecht darauf steht, also in:

$$E_1)\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi . \iint \sin(p+e+qx+ry)\,dydx$$

und

$$E_2)\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi . \iint \sin(p+e+qx+ry)\,dydx,$$

so hat man statt der schiefwinkligen Composanten Ω und E jetzt die rechtwinkligen:

$$\Omega')\quad \varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 . \iint \sin(p+o+qx+ry)\,dydx$$
$$+\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi . \iint \sin(p+e+qx+ry)\,dydx,$$

$$E')\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi . \iint \sin(p+e+qx+ry)\,dydx.$$

Trennt man, zuerst in Ω', den Theil p der Phase, welcher die Zeit t enthält, von dem übrigen, so erhält man:

$$\Omega')\quad \sin p\Big(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 . \iint \cos(o+qx+ry)\,dydx$$
$$+\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 . \cos\xi . \iint \cos(e+qx+ry)\,dydx\Big)$$
$$+\cos p\Big(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 . \iint \sin(o+qx+ry)\,dydx$$
$$+\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 . \cos\xi . \iint \sin(e+qx+ry)\,dydx\Big).$$

Um das Quadrat der Amplitude des Strahles Ω' zu erhalten, braucht man nur die Quadrate der Faktoren zu addiren, mit welchen im vorstehenden Ausdruck $\sin p$ und $\cos p$ multiplicirt erscheinen; ehe wir jedoch diess thun, zerlegen wir die unter den Integralzeichen stehenden Sinus und Cosinus nochmals, indem wir den constanten Theil des Bogens vom variabeln trennen. Wir erhalten für die beiden Faktoren:

$$(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \cos o + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \cos\varepsilon).C$$
$$-(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin o + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \sin\varepsilon).S$$

und

$$(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin o + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \sin\varepsilon).C$$
$$+(\varkappa_1 \sin(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \cos o + \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \cos\xi \cos\varepsilon).S.$$

Diese beiden Ausdrücke geben, quadrirt und addirt, für das Quadrat der Amplitude des Strahles Ω':

$$\Omega')\quad [\varkappa_1^2 \sin^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_1 + \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2 \cos^2\xi$$
$$+2\varkappa_1\varkappa_2 \sin(\alpha-\psi)\cos(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin\chi_2 \cos\xi \cos(o-\varepsilon)].(C^2+S^2).$$

Nimmt man mit dem Strahl E', um das Quadrat seiner Amplitude zu berechnen, eine ähnliche Zerlegung vor, so findet man zunächst:

$$E')\quad \varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi \Big(\sin p \iint \cos(\varepsilon+qx+ry)\,dy\,dx$$
$$+\cos p \iint \sin(\varepsilon+qx+ry)\,dy\,dx\Big),$$

so dass man die Quadrate folgender zwei Ausdrücke

$$\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi.[C\cos\varepsilon - S\sin\varepsilon]$$

und

$$\varkappa_2 \cos(\alpha-\psi)\sin\chi_2 \sin\xi.[S\cos\varepsilon + C\sin\varepsilon]$$

zu addiren hat; man findet demnach für das Quadrat der Amplitude des Strahles E'):

$$E')\qquad \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2 \sin^2\xi.(C^2+S^2).$$

Um nun schliesslich die Intensität des elliptisch polarisirten Strahles, welcher aus dem Zusammenwirken der Composanten Ω' und E' hervorgeht, zu kennen, braucht man nur noch die gefundenen Amplitudenquadrate zu addiren, und erhält:

$$[\varkappa_1^2 \sin^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_1 + \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2$$
$$+2\varkappa_1\varkappa_2 \sin(\alpha-\psi)\cos(\alpha-\psi)\sin\chi_1 \sin\chi_2 \cos\xi \cos(o-\varepsilon)].(C^2+S^2),$$

oder, nach Einführung des Werthes von $\cos\xi$:

$$[\varkappa_1^2 \sin^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_1 + \varkappa_2^2 \cos^2(\alpha-\psi)\sin^2\chi_2$$
$$-2\varkappa_1\varkappa_2 \sin(\alpha-\psi)\cos(\alpha-\psi)\cos\chi_1 \cos\chi_2 \cos(o-\varepsilon)].J^2.$$

§. 4. Der Ausdruck J^2 erscheint demnach jetzt durch einen Faktor modificirt, welcher einerseits von der Wellenlänge und

Oscillationsrichtung des einfallenden Lichtes, den optischen Constanten und der Dicke der Platte, andererseits von der Lage der gebeugten Strahlen gegen die optische Axe des Krystalles abhängt. Wir wollen nun, um die Diskussion zu vereinfachen, annehmen, dass die optische Axe mit der Abscissenaxe des Bildes zusammenfalle; wir haben dann:

$$\sin\psi = 0, \quad \cos\psi = 1;$$

$$\cos\chi_1 = b, \quad \cos\chi_2 = a;$$

und der Faktor wird:

$$\varkappa_1^2 \sin^2\alpha + \varkappa_2^2 \cos^2\alpha$$

$$-[\varkappa_2^2 \cos^2\alpha . a^2 + \varkappa_1^2 \sin^2\alpha . b^2 + 2\varkappa_1\varkappa_2 \sin\alpha\cos\alpha\cos(o - e] . ab].$$

Er behält den nämlichen Werth:

$$\varkappa_1^2 \sin^2\alpha + \varkappa_2^2 \cos^2\alpha - K^2$$

für alle jene Punkte des Bildes, welche sich in der Ellipse

$$\text{I)} \quad \varkappa_2^2 \cos^2\alpha . a^2 + \varkappa_1^2 \sin^2\alpha . b^2 + 2\varkappa_1\varkappa_2 \sin\alpha\cos\alpha\cos(o - e) . ab$$
$$= K^2$$

projiciren. Vergleichen wir jetzt diese Ellipse mit der Bahn, welche die Aethertheilchen des ungebeugt aus der Platte heraustretenden elliptisch polarisirten Strahles durchlaufen. Aus den Gleichungen

$$\eta = \varkappa_1 \sin\alpha . \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - \zeta + (o - 1)d),$$

$$\xi = \varkappa_2 \cos\alpha . \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - \zeta + (e - 1)d);$$

welche die Excursionen des ordinären und extraordinären Strahles nach ihrem Durchgang durch die Platte vorstellen, erhält man durch Elimination von t die Gleichung der Bahnellipse in folgender Gestalt:

$$\text{II)} \quad \varkappa_1 \sin^2\alpha . \xi^2 + \varkappa_2^2 \cos^2\alpha . \eta^2 - 2\varkappa_1\varkappa_2 \sin\alpha\cos\alpha\cos(o - e) . \xi\eta$$
$$= \varkappa_1\varkappa_2^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2(o - e).$$

Ein Blick auf die Gleichungen I) und II) reicht hin, um zu erkennen, dass die Ellipsen, welche unser Faktor über das Beugungsbild ausbreitet, den Bahnellipsen des direkt durchgehenden elliptisch polarisirten Strahles ähnlich, aber um 90° gegen dieselben gedreht sind. Obgleich dieser

Satz die Aenderungen, welche der Faktor beim Dickerwerden der Platte erfährt, aus den bekannten Aenderungen des jedesmal resultirenden elliptisch polarisirten Strahls abzuleiten gestattet, so dürfte doch, zur Bequemlichkeit des Lesers, eine unmittelbare Untersuchung derselben hier am Platze sein.

§. 5. Wenn $\varkappa_1 \sin\alpha > \varkappa_2 \cos\alpha$ oder $\operatorname{tg}\alpha > \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$, d. h. wenn der ordinäre Strahl der intensivere ist, so bildet die grosse Axe der Ellipse I.) mit der optischen Axe der Krystallplatte einen Winkel φ, welcher durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varkappa_1^2 \sin^2\alpha - \varkappa_2^2 \cos^2\alpha - \sqrt{\left\{\begin{array}{c}(\varkappa_1^2 \sin^2\alpha - \varkappa_2^2 \cos^2\alpha)^2 \\ +4\varkappa_1^2\varkappa_2^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \cos^2(o-e)\end{array}\right\}}}{2\varkappa_1\varkappa_2 \sin\alpha \cos\alpha \cos(o-e)}$$

gegeben ist; das Axenverhältniss wird

$$\frac{B}{A} = \pm \frac{\varkappa_1^2 \sin^2\alpha + \varkappa_2^2 \cos^2\alpha - \sqrt{\left\{\begin{array}{c}(\varkappa_1^2 \sin^2\alpha + \varkappa_2^2 \cos^2\alpha)^2 \\ -4\varkappa_1^2\varkappa_2^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \sin^2(o-e)\end{array}\right\}}}{2\varkappa_1\varkappa_2 \sin\alpha \cos\alpha \sin(o-e)}$$

gefunden, wo das Vorzeichen stets so gewählt werden muss, dass $\frac{B}{A}$ positiv wird. Für $\cos(o-e)=1$, d. h. wenn $d=\frac{n\lambda}{\omega-\varepsilon}$ ist, oder wenn der Gangunterschied des ordinären und extraordinären Strahles eine ganze Anzahl von Wellenlängen beträgt, wird $\frac{B}{A}=0$; die Ellipsen gehen demnach in gerade Linien über, für welche sich unmittelbar aus I) die Gleichung:

$$b = -\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \operatorname{cotg}\alpha . a \pm \frac{K}{\varkappa_1 \sin\alpha}$$

ergibt. Lässt man jetzt d von $\frac{n\lambda}{\omega-\varepsilon}$ an durch $\frac{4n+1}{4}\cdot\frac{\lambda}{\omega-\varepsilon}$ hindurch bis $\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\omega-\varepsilon}$ wachsen, führt man also $\cos(o-e)$ von 1 durch 0 hindurch zu -1 hinüber, so durchläuft $\operatorname{tg}\varphi$ die Werthe von $-\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\operatorname{cotg}\alpha$ durch 0 hindurch bis $+\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\operatorname{cotg}\alpha$, während das Axenverhältniss, anfangs Null, bei $\cos(o-e)=0$ seinen grössten Werth $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\operatorname{cotg}\alpha$ erreicht, um von da bei $\cos(o-e)=-1$ wieder zur Null herabzusinken. Im nächsten Intervall, von $d=\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\omega-\varepsilon}$

bis $d = \frac{(n+1)\lambda}{\omega - \varepsilon}$, durchläuft die grosse Ellipsenaxe die nämlichen Richtungen in umgekehrter Ordnung, u. s. f. Die Richtung der grossen Axe des Ellipsensystems ist unter allen Richtungen, welche im Mittelpunkte des Bildes sich kreuzen, diejenige, welche durch unsern Faktor das meiste Licht empfängt; in die Richtung der kleinen Axe dagegen fällt die geringste Erleuchtung. Wir können daher jene die „Axe der grössten Erleuchtung", diese die „Axe der kleinsten Erleuchtung" nennen, und die obigen Resultate wie folgt ausdrücken: Wenn man die Dicke der Krystallplatte ändert, so schwankt die Axe der grössten Erleuchtung zu beiden Seiten der optischen Axe zwischen zwei äussersten Lagen hin und her; die Tangente des Winkels, welchen diese äussersten Lagen mit der optischen Axe einschliessen, ist dem Werthe $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \operatorname{cotg} \alpha$ gleich; derselbe Werth gibt, für die Mittellage, das Axenverhältniss des Systems ähnlicher Ellipsen an, deren Punkte durch den Faktor gleiche Erleuchtung erhalten. Je mehr sich die Axe der grössten Erleuchtung von ihrer Mittellage entfernt, desto langgedehnter werden die Ellipsen, um in der Grenzlage endlich in gerade Linien überzugehen, welche dieser Lage parallel sind.

Da Lage und Axenverhältniss der Ellipsensysteme durch den Werth von $\cos(o - e)$ bedingt sind, und dieser Cosinus von der Wellenlänge abhängt, so ist klar, dass für die nämliche Platte einer jeden Farbe ein Ellipsensystem von anderer Gestalt und Lage entspricht.

Es ist im Vorhergehenden angenommen worden, dass $\operatorname{tg} \alpha > \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$ sei; man erkennt aber leicht aus den gegebenen Formeln, dass man für $\operatorname{tg} \alpha < \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$ Dasjenige, was in Bezug auf die optische Axe gesagt wurde, jetzt in Bezug auf die zur optischen Axe Senkrechte wiederholen müsste.

Ist dagegen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$, d. h. sind die Oscillationen des einfallenden Lichtes so zur optischen Axe geneigt, dass der ordinäre und der extraordinäre Strahl gleiche Intensitäten erlangen, so hört das Hin- und Herschwanken der Axe der grössten Erleuchtung auf, und es entsprechen ihr nur noch zwei zu einander senkrechte unveränderliche Lagen, welche um 45° beiderseits gegen die optische Axe geneigt sind. Man findet nämlich alsdann

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm 1 \quad \text{und} \quad \frac{B}{A} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(o - e).$$

So lange demnach $\cos(o-e)$ positiv ist, zwischen $d = \frac{n\lambda}{\omega - \varepsilon}$ und $d = \frac{4n+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{\omega - \varepsilon}$, bildet die Axe der grössten Erleuchtung mit der optischen Axe des Krystalls den Winkel -45^{0}; dabei wächst das Axenverhältniss der Ellipsensysteme von seinem anfänglichen Nullwerthe bis 1; während also bei jenem ersten Werthe von d die von dem Faktor gleichstark modificirten Punkte in gerade Linien gereiht sind, welche mit der optischen Axe einen Winkel von -45^{0} einschliessen, bilden bei dem zweiten Werthe von d die gleichstark modificirten Punkte concentrische Kreise um die Mitte des Bildes; für alle zwischenliegenden Werthe von d aber sind sie in Ellipsen gestellt, deren Axenverhältnisse alle Werthe von 0 bis 1 durchlaufen; wenn jetzt, von $d = \frac{4n+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{\omega - \varepsilon}$ bis $d = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\lambda}{\omega - \varepsilon}$, $\cos(o-e)$ negativ wird, so fällt die Axe der grössten Erleuchtung in die Richtung $+45^{0}$; gleichzeitig nimmt das Axenverhältniss von 1 bis 0 ab, die Linien gleicher Schwächung, anfangs concentrische Kreise, gehen durch alle möglichen Ellipsen hindurch zuletzt in gerade Linien über, welche unter $+45^{0}$ zur optischen Axe geneigt sind. — Besteht das einfallende Licht aus verschiedenfarbigen Strahlen, so behalten die Ellipsensysteme zwar für alle Farben die nämliche Lage, einer jeden Farbe entspricht aber ein anderes Axenverhältniss.

Zum Schlusse mache ich noch darauf aufmerksam, dass es vollkommen gleichgültig ist, ob das elliptisch polarisirte Licht, welches man der Beugung unterwirft, durch eine doppeltbrechende Krystallplatte oder auf irgend eine andere Art entstanden sei: immer wird der Faktor, mit welchem der Ausdruck J^2 zu modificiren ist, ein System von Ellipsen vorstellen, welche die Gestalt der Bahnen der Aethertheilchen im einfallenden Licht getreulich nachahmen, aber um einen rechten Winkel gegen dieselben gedreht sind.

XVIII.

Notiz über den sphärischen Excess.

Von
dem Herausgeber.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Der nachstehende Aufsatz ist mir aus sehr weiter Ferne von einem von mir hochgeachteten Verfasser zugesandt worden. In dem den Aufsatz begleitenden Briefe sagt der Herr Verfasser:

„Finden Sie in dieser Notiz wirklich etwas Interessantes und der Veröffentlichung Werthes, so wird es zu meiner Ehre gereichen, wenn Sie dieselbe in irgend einem der nächsten Hefte Ihres geschätzten Archives aufnehmen.“

Hiemit war es mir also freigestellt, den Aufsatz aufzunehmen oder zurückzulegen. Ich würde den Aufsatz nicht aufgenommen haben, weil die Darstellung nach meiner Meinung in einem sehr wesentlichen Punkte mangelhaft ist, welche ohne Ergänzung ihn zur Aufnahme ungeeignet macht, worüber ich nachher das Weitere bemerken werde. Auf der anderen Seite aber finde ich in dem Aufsatze manches Interessante und der Veröffentlichung Werthe, wohin ich namentlich die, so viel ich weiss, bisher noch nicht angewandte Zerlegung von $\sin\frac{E}{2}$ in zwei Factoren, welches nach meiner Meinung in diesem Aufsatze der Hauptpunkt ist, wodurch die Darstellung vorzugsweise vereinfacht wird, rechne. Aus diesem Grunde lasse ich den Aufsatz im Folgenden abdrucken, aber ohne den Herrn Verfasser zu nennen, weil ich es mir nie erlaubt habe und auch fernerhin nicht erlauben werde, von mir aufgenommene Aufsätze genannter Verfasser mit einer Kritik von meiner Seite zu begleiten. Sollte aber in diesem Falle der Herr Verfasser die Nennung seines Namens wün-

schen oder überhaupt nicht mit meinen Ansichten über seinen Aufsatz sich einverstanden erklären können, so bitte ich denselben nur, mir davon gütigst so bald als möglich Anzeige zu machen, und soll dann ungesäumt die erforderliche Notiz in dem Archive folgen. In einer Nachschrift werde ich zeigen, wie ich mir die Darstellung zu ergänzen erlauben würde, wodurch aber dem Grundgedanken, der dem Herrn Verfasser ganz allein gehört, sein Werth in keiner Weise geschmälert werden soll. Ob übrigens ein ähnliches Verfahren nicht vielleicht schon früher angewandt worden ist, worauf es aber zunächst nicht besonders ankommt, da der Gegenstand gewiss an sich für viele Leser lehrreich, interessant und neu ist, kann ich, wie schon erinnert, mit völliger Bestimmtheit nicht sagen. Ich lasse nun den Aufsatz selbst folgen.

Notiz über den sphärischen Excess.

Es giebt bekanntlich mehrere Ausdrücke für den sphärischen Excess E, von welchen der **Lhuilier**'sche der eleganteste ist, nämlich:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\operatorname{tang}\frac{a+b+c}{4}\operatorname{tang}\frac{b+c-a}{4}\operatorname{tang}\frac{a+c-b}{4}\operatorname{tang}\frac{a+b-c}{4}}.$$

Zu dieser Formel führen verschiedene Wege; einer der einfachsten und am Leichtesten im Gedächtniss zu behaltenden scheint mir folgender zu sein.

Bezeichnen a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreiecks, bedeutet ferner $2p$ die Summe der drei Seiten, $2P$ die der drei Winkel, so gelten die bekannten sphärisch-trigonometrischen Formeln:

(1)

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}},\quad \sin\frac{b}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cos(P-B)}{\sin A\sin C}},$$

$$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cos(P-C)}{\sin A\sin B}}.$$

Es folgt daraus durch Multiplication:

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=-\frac{\cos P}{\sin C}\cdot\frac{\sqrt{-\cos P\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}}{\sin A\sin B}$$

$$=-\frac{\cos P}{2}\cdot\frac{\sin c}{\sin C}.$$

Der sphärische Excess ist aber

$$E = A + B + C - 180^\circ = 2P - 180^\circ,$$

woraus $P = 90^\circ + \frac{E}{2}$ und $\cos P = -\sin\frac{E}{2}$, so dass

$$\sin\frac{E}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C$$

$$= \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdot \frac{2\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a \sin b},$$

also endlich:

(2)

$$\sin\frac{E}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Der Ausdruck rechts kann in zwei Faktoren zerlegt werden, so dass:

(3)

$$\sin\frac{E}{2} = 2\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$\times\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}},$$

von welchen der eine $=\sin\frac{E}{4}$ und der andere $=\cos\frac{E}{4}$ sein wird, wenn es nachgewiesen werden kann, dass die Summe ihrer Quadrate $=1$ ist, d. i.

(4)

$$\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2} + \cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}$$

$$= \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Werden die Produkte der Sinusse und Cosinusse durch Summen ersetzt, so ergiebt sich:

$$[\cos\frac{a}{2}-\cos(p-\frac{a}{2})][\cos\frac{b-c}{2}-\cos(p-\frac{b+c}{2})]$$

$$+[\cos\frac{a}{2}+\cos(p-\frac{a}{2})][\cos\frac{b-c}{2}+\cos(p-\frac{b+c}{2})]=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

und nach Ausführung der Rechnungen:

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b-c}{2}+\cos(p-\frac{a}{2})\cos(p-\frac{b+c}{2})=2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Werden hierin wieder die Produkte durch Summen ausgedrückt, so gelangt man zu der eleganten Formel:

(5)

$$\cos\frac{a+b+c}{2}+\cos\frac{b+c-a}{2}+\cos\frac{a+c-b}{2}+\cos\frac{a+b-c}{2}$$

$$=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

welche, wie man sich leicht überzeugen kann, eine Identität darstellt.

Man gelangt noch zu einer Identität, wenn man in der vorletzten Gleichung für p seinen Werth schreibt, alsdann wird:

$$\cos\frac{b-c}{2}+\cos\frac{b+c}{2}=2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Es folgt nun daraus, dass die Faktoren, in welche der Ausdruck für $\sin\frac{E}{2}$ zerlegt wurde, wirklich den Sinus und Cosinus von $\frac{E}{4}$ darstellen, dass also:

$$(6)\quad\begin{cases}\sin\frac{E}{4}=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{b}}},\\[2ex]\cos\frac{E}{4}=\sqrt{\dfrac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}};\end{cases}$$

woraus folgt:

$$\tang\frac{E}{4}=\sqrt{\tang\frac{p}{2}\tang\frac{p-a}{2}\tang\frac{p-b}{2}\tang\frac{p-c}{2}},$$

welches die Lhuilier'sche Formel ist.

Nachschrift des Herausgebers.

Wie ich schon erwähnt habe, ist der Hauptpunkt, auf den es in der obigen Darstellung vorzugsweise ankommt, und durch welchen die Einfachheit des Beweises hauptsächlich bedingt wird, die Zerlegung von:

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

in zwei Factoren, wodurch sich der Ausdruck:

$$\sin\frac{E}{2}=2\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$\times\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

ergiebt. Auch ist es ganz richtig, wenn der Herr Verfasser sagt: „der eine dieser beiden Factoren wird $=\sin\frac{E}{4}$ und der andere $=\cos\frac{E}{4}$ sein, wenn es nachgewiesen werden kann, dass die Summe ihrer Quadrate $=1$ ist." Letzteres beweist der Herr Verfasser auch ganz richtig. Wenn nun aber am Ende, nachdem dies bewiesen, ohne Weiteres der **erste** der beiden Factoren $=\sin\frac{E}{4}$, der **zweite** $=\cos\frac{E}{4}$ gesetzt wird; so ist dazu nach meiner Meinung in der That gar kein unmittelbarer Grund, — wenigstens nach der Darstellung des Herrn Verfassers, — vorhanden, indem man eben so gut den **ersten** der beiden Factoren $=\cos\frac{E}{4}$, den **zweiten** $=\sin\frac{E}{4}$ hätte setzen können. In diesem

Punkte ist also nach meiner Meinung die Darstellung mangelhaft, und darin liegt der Grund, welcher mich bestimmt haben würde, den Aufsatz nicht aufzunehmen, wenn mir derselbe nicht auf der anderen Seite doch manches Interessante und der Mittheilung Werthe zu enthalten geschienen hätte. Ich will nun zeigen, wie nach meiner Meinung die Darstellung vervollständigt und vielleicht hin und wieder noch etwas eleganter gemacht werden kann, auf welches Letztere ich aber keinen besonderen Werth lege, indem eben so gut die Methode des Herrn Verfassers hätte beibehalten werden können.

Weil $E = A + B + C - 180^0$, also $\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}(A + B + C) - 90^0$ ist, so ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}E = \sin\tfrac{1}{2}(A+B+C),\quad \sin\tfrac{1}{2}E = -\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C);$$

und folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}E = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}E = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C;$$

nach den Gauss'schen Gleichungen ist aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C;$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}E = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C^2 + \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C^2}{\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}E = \frac{\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c};$$

folglich, wie man sogleich übersieht:

$$\cos\tfrac{1}{2}E = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}E = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C}{\cos\tfrac{1}{2}c};$$

aber bekanntlich, wenn wie gewöhnlich $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ gesetzt wird*):

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\sin a\sin b},\quad \sin C = \frac{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a\sin b};$$

*) Der Herr Verfasser schreibt p statt s, welches Letztere mir geläufiger ist.

also, wenn man zugleich

$$\sin a \sin b = 4 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b$$

setzt:

$$\cos \tfrac{1}{2}E = \frac{4 \cos \tfrac{1}{2}a^2 \cos \tfrac{1}{2}b^2 + (\cos c - \cos a \cos b)}{4 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c};$$

folglich, weil bekanntlich

$$4 \cos \tfrac{1}{2}a^2 \cos \tfrac{1}{2}b^2 = (1 + \cos a)(1 + \cos b)$$

ist:

$$1) \ldots \begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}E = \dfrac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}, \\ \sin \tfrac{1}{2}E = \dfrac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}. \end{cases}$$

Nun setze man der Kürze wegen:

$$2) \begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{\cos \tfrac{1}{2}s \cos \tfrac{1}{2}(s-a) \cos \tfrac{1}{2}(s-b) \cos \tfrac{1}{2}(s-c)}{\cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}}, \\ v = \sqrt{\dfrac{\sin \tfrac{1}{2}s \sin \tfrac{1}{2}(s-a) \sin \tfrac{1}{2}(s-b) \sin \tfrac{1}{2}(s-c)}{\cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}}; \end{cases}$$

so ist nach der zweiten der Gleichungen 1) offenbar;

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots \sin \tfrac{1}{2}E = 2uv.$$

Leicht erhält man aber aus 2) nach sehr bekannten goniometrischen Formeln:

$$4(u^2 \pm v^2) \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c$$

$$= \{\cos \tfrac{1}{2}a + \cos (s - \tfrac{1}{2}a)\}\{\cos \tfrac{1}{2}(b-c) + \cos [s - \tfrac{1}{2}(b+c)]\}$$

$$\pm \{\cos \tfrac{1}{2}a - \cos (s - \tfrac{1}{2}a)\}\{\cos \tfrac{1}{2}(b-c) - \cos [s - \tfrac{1}{2}(b+c)]\},$$

oder:

$$4(u^2 \pm v^2) \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c$$

$$= \{\cos \tfrac{1}{2}a + \cos \tfrac{1}{2}(b+c)\}\{\cos \tfrac{1}{2}(b-c) + \cos \tfrac{1}{2}a\}$$

$$\pm \{\cos \tfrac{1}{2}a - \cos \tfrac{1}{2}(b+c)\}\{\cos \tfrac{1}{2}(b-c) - \cos \tfrac{1}{2}a\};$$

also, wenn man die Multiplicationen ausführt:

$$2(u^2+v^2)\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}a\{\cos\tfrac{1}{2}(b-c)+\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\},$$
$$2(u^2-v^2)\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}a^2+\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}(b+c);$$

also nach sehr bekannten Formeln:

$$(u^2+v^2)\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c,$$
$$4(u^2-v^2)\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c=1+\cos a+\cos b+\cos c;$$

also:

$$u^2+v^2=1,\quad u^2-v^2=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c};$$

und folglich nach 1):

$$4)\ \ldots\ldots\quad u^2+v^2=1,\quad u^2-v^2=\cos\tfrac{1}{2}E.$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$2u^2=1+\cos\tfrac{1}{2}E=2\cos\tfrac{1}{4}E^2,$$
$$2v^2=1-\cos\tfrac{1}{2}E=2\sin\tfrac{1}{4}E^2;$$

also:

$$u^2=\cos\tfrac{1}{4}E^2,\quad v^2=\sin\tfrac{1}{4}E^2;$$

und folglich, weil $\cos\tfrac{1}{4}E$ und $\sin\tfrac{1}{4}E$ offenbar beide positiv sind:

$$5)\ \ldots\ldots\ldots\ u=\cos\tfrac{1}{4}E,\quad v=\sin\tfrac{1}{4}E;$$

folglich nach 2):

$$6)\ \begin{cases}\cos\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}(s-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-b)\cos\tfrac{1}{2}(s-c)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}},\\[2ex]\sin\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\dfrac{\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}};\end{cases}$$

also durch Division:

$$7)\quad \tan\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)},$$

welches die zu beweisende, von Lhuilier *) gefundene Formel ist.

Etwa auf diese Weise muss der Beweis vervollständigt werden.

Dass $\cos\tfrac{1}{4}E$ und $\sin\tfrac{1}{4}E$ beide positiv sind, wie oben behauptet wurde, erhellet leicht. Denn es ist bekanntlich kein Winkel des sphärischen Dreiecks grösser als 180°, also:

---

*) Auf den Titeln der verschiedenen Werke dieses trefflichen Mathematikers ist der Name theils Lhuilier (Algebra), theils L'Huilier (Expositio elementaris) geschrieben.

$$A+B+C<540^\circ,$$

und folglich

$$A+B+C-180^\circ<360^\circ,$$

also $E<360^\circ$, $\frac{1}{4}E<90^\circ$, woraus das Behauptete unmittelbar folgt.

Möge der Herr Verfasser aus vorstehenden Bemerkungen die von mir seinem Aufsatze gewidmete Aufmerksamkeit erkennen. Sein Name soll, wie schon erinnert, sogleich genannt werden, wenn er mir seinen Wunsch, dass dies geschehe, zu erkennen giebt.

XIX.

Kürzeste Entfernung zweier Normalen eines Ellipsoids von einander.

Von

dem Herausgeber.

Wenn zwei gerade Linien im Raume durch die Gleichungen:

$$\frac{x-a_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-b_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-c_0}{\cos\gamma_0},\quad \frac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-c_1}{\cos\gamma_1}$$

charakterisirt sind, deren kürzeste Entfernung von einander durch E_{01} bezeichnet, und

$$\cos W_{01}=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1$$

gesetzt wird; so ist *):

$$E_{01}=\pm\frac{\left\{\begin{array}{c}(a_0-a_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\+(b_0-b_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\+(c_0-c_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{array}\right\}}{\sin W_{01}},$$

*) M. s. Thl. XXXV. S. 5. Nr. 14).

wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens positiv oder negativ ist.

Sind nun $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ zwei beliebige Punkte des durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

charakterisirten Ellipsoids, so sind bekanntlich:

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}},\quad \frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}}$$

die Gleichungen der diesen Punkten entsprechenden Normalen des Ellipsoids; und wir können also, wenn G_0, G_1 gewisse Factoren bezeichnen, für diese beiden Normalen respective:

$$\cos\alpha_0=G_0\frac{x_0}{a^2},\quad \cos\beta_0=G_0\frac{y_0}{b^2},\quad \cos\gamma_0=G_0\frac{z_0}{c^2};$$

$$\cos\alpha_1=G_1\frac{x_1}{a^2},\quad \cos\beta_1=G_1\frac{y_1}{b^2},\quad \cos\gamma_1=G_1\frac{z_1}{c^2}$$

setzen. Also ist immer in den obigen Bezeichnungen:

$$\cos W_{01}=G_0G_1\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right),$$

folglich:

$$\sin W_{01}=\sqrt{1-G_0{}^2G_1{}^2\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)^2},$$

wenn wir uns, was offenbar verstattet ist, den Winkel W_{01} zwischen 0 und 180° angenommen denken, und:

$$\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1=G_0G_1\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2},$$

$$\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1=G_0G_1\frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2},$$

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1=G_0G_1\frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2};$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{E_{01}}{G_0G_1}=\pm\frac{(x_0-x_1)\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2}+(y_0-y_1)\frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2}+(z_0-z_1)\frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2}}{\sqrt{1-G_0{}^2G_1{}^2\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)^2}}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen offenbar:

$$G_0^2=\frac{1}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2},\quad G_1^2=\frac{1}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2};$$

also, wenn man diese Ausdrücke in die vorstehende Formel einführt:

$$E_{01}=\pm\frac{(x_0-x_1)\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2}+(y_0-y_1)\frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2}+(z_0-z_1)\frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}-\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)^2}}$$

oder nach einem bekannten arithmetischen Satze:

$$E_{01}=\pm\frac{(x_0-x_1)\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2}+(y_0-y_1)\frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2}+(z_0-z_1)\frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2}\right)^2+\left(\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2}\right)^2+\left(\frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2}\right)^2}},$$

natürlich immer das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens positiv oder negativ ist. Man kann diese Formel auch auf folgende Art schreiben:

$$E_{01}=\pm\frac{\left\{\begin{array}{c}a^2(x_0-x_1)(y_0z_1-z_0y_1)+b^2(y_0-y_1)(z_0x_1-x_0z_1)\\+c^2(z_0-z_1)(x_0y_1-y_0x_1)\end{array}\right\}}{\sqrt{\{a^2(y_0z_1-z_0y_1)\}^2+\{b^2(z_0x_1-x_0z_1)\}^2+\{c^2(x_0y_1-y_0x_1)\}^2}}.$$

Weil, wie sogleich in die Augen fällt:

$$(x_0-x_1)(y_0z_1-z_0y_1)+(y_0-y_1)(z_0x_1-x_0z_1)+(z_0-z_1)(x_0y_1-y_0x_1)=0$$

ist, so kann man offenbar setzen:

$$E_{01}=\pm\frac{(a^2-b^2)(y_1-y_0)(z_0x_1-x_0z_1)+(a^2-c^2)(z_1-z_0)(x_0y_1-y_0x_1)}{\sqrt{a^4(y_0z_1-z_0y_1)^2+b^4(z_0x_1-x_0z_1)^2+c^4(x_0y_1-y_0x_1)^2}},$$

oder der Kürze wegen:

$$E_{01}=\pm\frac{Z}{N},$$

wo die Bedeutung von Z und N sogleich von selbst erhellen wird.

Weil nun

$$x_0y_1-y_0x_1=x_0(y_1-y_0)-y_0(x_1-x_0),$$
$$y_0z_1-z_0y_1=y_0(z_1-z_0)-z_0(y_1-y_0),$$
$$z_0x_1-x_0z_1=z_0(x_1-x_0)-x_0(z_1-z_0)$$

ist; so ist

$$\frac{Z}{abc}=(a^2-b^2)\frac{y_1-y_0}{b}\left(\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{z_0}{c}-\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{x_0}{a}\right)$$
$$+(a^2-c^2)\frac{z_1-z_0}{c}\left(\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{x_0}{a}-\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{y_0}{b}\right)$$

und

$$\frac{N^2}{a^2b^2c^2}=a^2\left(\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{y_0}{b}-\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{z_0}{c}\right)^2$$
$$+b^2\left(\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{z_0}{c}-\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{x_0}{a}\right)^2$$
$$+c^2\left(\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{x_0}{a}-\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{y_0}{b}\right)^2,$$

also, wenn

$$Z'=(a^2-b^2)\frac{y_1-y_0}{b}\left(\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{z_0}{c}-\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{x_0}{a}\right)$$
$$+(a^2-c^2)\frac{z_1-z_0}{c}\left(\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{x_0}{a}-\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{y_0}{b}\right)$$

und

$$N'^2=a^2\left(\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{y_0}{b}-\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{z_0}{c}\right)^2$$
$$+b^2\left(\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{z_0}{c}-\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{x_0}{a}\right)^2$$
$$+c^2\left(\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{x_0}{a}-\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{y_0}{b}\right)^2$$

gesetzt wird:

$$E_{01}=\pm\frac{Z'}{N'}.$$

Setzt man nun aber:

$$Z''=(1-\frac{b^2}{a^2})\frac{y_1-y_0}{b}\left(\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{z_0}{c}-\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{x_0}{a}\right)$$
$$+(1-\frac{c^2}{a^2})\frac{z_1-z_0}{c}\left(\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{x_0}{a}-\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{y_0}{b}\right)$$

und

$$N''^2 = \left(\frac{a}{a}\right)^2\left(\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{y_0}{b}-\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{z_0}{c}\right)^2$$
$$+\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{z_0}{c}-\frac{z_1-z_0}{c}\cdot\frac{x_0}{a}\right)^2$$
$$+\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{y_1-y_0}{b}\cdot\frac{x_0}{a}-\frac{x_1-x_0}{a}\cdot\frac{y_0}{b}\right)^2;$$

so ist offenbar:

$$\frac{E_{01}}{a}=\pm\frac{Z''}{N''},$$

woraus erhellet, dass die Grösse $\frac{E_{01}}{a}$ in Bezug auf die Grössen

$$1-\frac{b^2}{a^2},\quad 1-\frac{c^2}{a^2};\quad \frac{x_1-x_0}{a},\quad \frac{y_1-y_0}{b},\quad \frac{z_1-z_0}{c}$$

eine Grösse der zweiten Ordnung ist, welches nachzuweisen der Hauptzweck dieses Aufsatzes war.

Man kann auch

$$Z'' = (1-\frac{b^2}{a^2})\frac{y_1-y_0}{b}\left(\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c}\right)$$
$$+(1-\frac{c^2}{a^2})\frac{z_1-z_0}{c}\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}\right)$$

und

$$N''^2 = \left(\frac{a}{a}\right)^2\left(\frac{y_0}{b}\cdot\frac{z_1}{c}-\frac{z_0}{c}\cdot\frac{y_1}{b}\right)^2$$
$$+\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c}\right)^2$$
$$+\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^2$$

oder

$$N''^2=\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\cdot\frac{z_1}{c}-\frac{z_0}{c}\cdot\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c}\right)^2$$
$$-(1-\frac{b^2}{a^2})\left(\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c}\right)^2-(1-\frac{c^2}{a^2})\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^2$$

oder, weil

$$\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\cdot\frac{z_1}{c}-\frac{z_0}{c}\cdot\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c}\right)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2\right\}$$

$$-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)^2$$

ist,

$$N^{*2}=1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c}\right)^2$$

$$-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^2$$

setzen.

Für das Rotations-Ellipsoid ist $a=b$ zu setzen, also:

$$\frac{E_{01}}{a}=\pm\frac{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{z_1-z_0}{c}\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{a}-\frac{y_0}{a}\cdot\frac{x_1}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{a^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{a}-\frac{y_0}{a}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^2}}.$$

Setzt man in diesem Falle

$$x=a\cos L\cos B,\quad y=a\sin L\cos B,\quad z=c\sin B;$$

so ist

$$\frac{z_1-z_0}{c}=\sin B_1-\sin B_0=2\sin\tfrac{1}{2}(B_1-B_0)\cos\tfrac{1}{2}(B_1+B_0)$$

und

$$\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{a}-\frac{y_0}{a}\cdot\frac{x_1}{a}=\sin(L_1-L_0)\cos B_0\cos B_1;$$

ferner offenbar

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{a^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}=\sin B_0\sin B_1+\cos(L_1-L_0)\cos B_0\cos B_1;$$

also:

$$\frac{E_{01}}{a}=\pm\frac{2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\sin(L_1-L_0)\sin\tfrac{1}{2}(B_1-B_0)\cos\tfrac{1}{2}(B_1+B_0)\cos B_0\cos B_1}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}1-\{\sin B_0\sin B_1+\cos(L_1-L_0)\cos B_0\cos B_1\}^2\\ \quad-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\sin(L_1-L_0)^2\cos B_0^2\cos B_1^2\end{array}\right\}}}.$$

Denkt man sich ein sphärisches Dreieck beschrieben, in welchem die Seiten 90^0-B_0, 90^0-B_1 einen von dem absoluten Werthe von L_1-L_0 gemessenen Winkel einschliessen, und bezeichnet die dritte Seite dieses sphärischen Dreiecks durch L_{01}, so ist

$$\cos L_{01} = \cos(90^0-B_0)\cos(90^0-B_1) + \cos(L_1-L_0)\sin(90^0-B_0)\sin(90^0-B_1),$$

also

$$\cos L_{01} = \sin B_0 \sin B_1 + \cos(L_1-L_0)\cos B_0 \cos B_1,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{E_{01}}{a} = \pm \frac{2(1-\frac{c^2}{a^2})\sin(L_1-L_0)\sin\frac{1}{2}(B_1-B_0)\cos\frac{1}{2}(B_1+B_0)\cos B_0\cos B_1}{\sqrt{\sin L_{01}{}^2-(1-\frac{c^2}{a^2})\sin(L_1-L_0)^2\cos B_0{}^2\cos B_1{}^2}}.$$

Für das allgemeine dreiaxige Ellipsoid kann man bekanntlich in ähnlicher Weise

$$x = a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad y = b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad z = c\sin\mathfrak{B}$$

setzen, wo dann freilich die Formeln weitläufiger ausfallen, weshalb wir der Kürze wegen uns darüber jetzt nicht weiter verbreiten wollen.

Leicht kann man nun auch Ausdrücke für die Coordinaten der Punkte der kürzesten Entfernung finden, die wir, wie in dem Aufsatze Thl. XXXV. Nr. I., auf den wir uns hier überhaupt beziehen, durch x_{01}, y_{01}, z_{01} und x_{10}, y_{10}, z_{10} bezeichnen wollen.

Zunächst findet man leicht:

$$\begin{aligned}
&(x_1-x_0)(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_{01})\\
&+(y_1-y_0)(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_{01})\\
&+(z_1-z_0)(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_{01})
\end{aligned}$$

$$= G_0\left\{\begin{aligned}
&(x_1-x_0)\left[\frac{x_0}{a^2}-G_1{}^2\frac{x_1}{a^2}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right]\\
&+(y_1-y_0)\left[\frac{y_0}{b^2}-G_1{}^2\frac{y_1}{b^2}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right]\\
&+(z_1-z_0)\left[\frac{z_0}{c^2}-G_1{}^2\frac{z_1}{c^2}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right]
\end{aligned}\right\}$$

$$= -G_0\left\{1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)\right\}\left\{1+G_1{}^2\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right\},$$

und

$$(x_0-x_1)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos W_{01})$$
$$+(y_0-y_1)(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos W_{01})$$
$$+(z_0-z_1)(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos W_{01})$$

$$=G_1\left\{\begin{array}{l}(x_0-x_1)\left[\frac{x_1}{a^2}-G_0{}^2\frac{x_0}{a^2}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right]\\+(y_0-y_1)\left[\frac{y_1}{b^2}-G_0{}^2\frac{y_0}{b^2}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right]\\+(z_0-z_1)\left[\frac{z_1}{c^2}-G_0{}^2\frac{z_0}{c^2}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=-G_1\left\{1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)\right\}\left\{1+G_0{}^2\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)\right\}.$$

Die Gleichungen der Berührungsebenen des Ellipsoids in den Punkten $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ sind respective

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

und

$$\frac{x_1}{a^2}(x-x_1)+\frac{y_1}{b^2}(y-y_1)+\frac{z_1}{c^2}(z-z_1)=0:$$

bezeichnen wir also die von dem Mittelpunkte des Ellipsoids oder dem Anfange der Coordinaten auf die in Rede stehenden Berührungsebenen gefällten Perpendikel durch P_0 und P_1, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$P_0=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},\quad P_1=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}};$$

also nach dem Obigen:

$$G_0{}^2=P_0{}^2,\quad G_1{}^2=P_1{}^2.$$

Bezeichnen wir ferner die auf die Berührungsebenen in $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ respective von $(x_1y_1z_1)$ und $(x_0y_0z_0)$ gefällten Perpendikel durch Q_0 und Q_1; so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$Q_0{}^2=\frac{\left\{\frac{x_0}{a^2}(x_0-x_1)+\frac{y_0}{b^2}(y_0-y_1)+\frac{z_0}{c^2}(z_0-z_1)\right\}^2}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}$$

und

$$Q_1{}^2=\frac{\left\{\frac{x_1}{a^2}(x_1-x_0)+\frac{y_1}{b^2}(y_1-y_0)+\frac{z_1}{c^2}(z_1-z_0)\right\}^2}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2},$$

oder:

$$Q_0{}^2=\frac{\left\{1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)\right\}^2}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}$$

und

$$Q_1{}^2=\frac{\left\{1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)\right\}^2}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_1}{b}-\frac{y_0}{b}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\cdot\frac{z_1}{c}-\frac{z_0}{c}\cdot\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\cdot\frac{x_1}{a}-\frac{x_0}{a}\cdot\frac{z_1}{c}\right)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2\right\}$$

$$-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)^2$$

$$=1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)^2,$$

folglich diese letztere Grösse positiv, und daher:

$$\text{val. abs.}\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)<1,$$

also offenbar auch die Grösse

$$1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)$$

positiv. Folglich ist nach dem Obigen:

$$Q_0=\frac{1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}$$

und



$$Q_1 = \frac{1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}};$$

also offenbar:

$$1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)=\frac{Q_0}{P_0}=\frac{Q_1}{P_1}.$$

Lassen wir, was offenbar verstattet ist, die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 den von den Punkten $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ aus nach dem äusseren Raume des Ellipsoids hin gehenden Theilen der Normalen entsprechen, so ist, wie ich in Thl. XXXVI. S. 83. Nr. 5) gezeigt habe:

$$\cos\alpha_0=\frac{\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},\quad \cos\alpha_1=\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},\quad \cos\beta_1=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_0=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},\quad \cos\gamma_1=\frac{\frac{z_1}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}};$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\alpha_0=P_0\frac{x_0}{a^2},\quad \cos\beta_0=P_0\frac{y_0}{b^2},\quad \cos\gamma_0=P_0\frac{z_0}{c^2};$$

$$\cos\alpha_1=P_1\frac{x_1}{a^2},\quad \cos\beta_1=P_1\frac{y_1}{b^2},\quad \cos\gamma_1=P_1\frac{z_1}{c^2};$$

und bezeichnet nun w_{01} den von den in Rede stehenden Theilen der beiden Normalen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, so ist

$$\cos w_{01}=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

also nach Vorstehendem:

$$\cos w_{01}=P_0P_1\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right),$$

folglich:

$$\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}=\frac{\cos w_{01}}{P_0P_1}.$$

Hiernach ist nun nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}&(x_1-x_0)(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_{01})\\&+(y_1-y_0)(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_{01})\\&+(z_1-z_0)(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_{01})\end{aligned}$$

$$=-G_0\frac{Q_1}{P_1}\left(1+P_1{}^2\frac{\cos w_{01}}{P_0P_1}\right)=-G_0Q_1\left(\frac{1}{P_1}+\frac{\cos w_{01}}{P_0}\right)$$

$$=-G_0\frac{Q_1}{P_0P_1}(P_0+P_1\cos w_{01})$$

und

$$\begin{aligned}&(x_0-x_1)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos W_{01})\\&+(y_0-y_1)(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos W_{01})\\&+(z_0-z_1)(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos W_{01})\end{aligned}$$

$$=-G_1\frac{Q_0}{P_0}\left(1+P_0{}^2\frac{\cos w_{01}}{P_0P_1}\right)=-G_1Q_0\left(\frac{1}{P_0}+\frac{\cos w_{01}}{P_1}\right)$$

$$=-G_1\frac{Q_0}{P_0P_1}(P_1+P_0\cos w_{01}).$$

Folglich ist nach Thl. XXXV. S. 4. Nr. 8) in der dort gebrauchten Bezeichnung:

$$G_{01}=-G_0\frac{Q_1}{P_0P_1}\cdot\frac{P_0+P_1\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2},$$

$$G_{10}=-G_1\frac{Q_0}{P_0P_1}\cdot\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2}.$$

Nach Thl. XXXV. S. 2. und S. 3. Nr. 5) und Nr. 6) ist aber:

$$x_{01}=x_0+G_{01}\cos\alpha_0,\quad y_{01}=y_0+G_{01}\cos\beta_0,\quad z_{01}=z_0+G_{01}\cos\gamma_0$$

und

$$x_{10}=x_1+G_{10}\cos\alpha_1,\quad y_{10}=y_1+G_{10}\cos\beta_1,\quad z_{10}=z_1+G_{10}\cos\gamma_1;$$

also:

$$x_{01}=x_0+G_{01}G_0\frac{x_0}{a^2},\quad y_{01}=y_0+G_{01}G_0\frac{y_0}{b^2},\quad z_{01}=z_0+G_{01}G_0\frac{z_0}{c^2}$$

und

$$x_{10}=x_1+G_{10}G_1\frac{x_1}{a^2},\quad y_{10}=y_1+G_{10}G_1\frac{y_1}{b^2},\quad z_{10}=z_1+G_{10}G_1\frac{z_1}{c^2};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{x_{01}}{x_0}=1-\frac{G_0{}^2}{a^2}\cdot\frac{Q_1}{P_0P_1}\cdot\frac{P_0+P_1\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{y_{01}}{y_0}=1-\frac{G_0{}^2}{b^2}\cdot\frac{Q_1}{P_0P_1}\cdot\frac{P_0+P_1\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{z_{01}}{z_0}=1-\frac{G_0{}^2}{c^2}\cdot\frac{Q_1}{P_0P_1}\cdot\frac{P_0+P_1\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2}$$

und:

$$\frac{x_{10}}{x_1}=1-\frac{G_1{}^2}{a^2}\cdot\frac{Q_0}{P_0P_1}\cdot\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{y_{10}}{y_1}=1-\frac{G_1{}^2}{b^2}\cdot\frac{Q_0}{P_0P_1}\cdot\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{z_{10}}{z_1}=1-\frac{G_1{}^2}{c^2}\cdot\frac{Q_0}{P_0P_1}\cdot\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2};$$

also:

$$\frac{x_{01}}{x_0}=1-\frac{P_0Q_1}{a^2}\cdot\frac{P_0+P_1\cos w_{01}}{P_1\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{y_{01}}{y_0}=1-\frac{P_0Q_1}{b^2}\cdot\frac{P_0+P_1\cos w_{01}}{P_1\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{z_{01}}{z_0}=1-\frac{P_0Q_1}{c^2}\cdot\frac{P_0+P_1\cos w_{01}}{P_1\sin w_{01}{}^2};$$

und:

$$\frac{x_{10}}{x_1}=1-\frac{P_1Q_0}{a^2}\cdot\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{y_{10}}{y_1}=1-\frac{P_1Q_0}{b^2}\cdot\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2},$$

$$\frac{z_{10}}{z_1}=1-\frac{P_1Q_0}{c^2}\cdot\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2}.$$

Man würde aus diesen merkwürdigen Ausdrücken noch verschiedene andere Ausdrücke ableiten können, wobei ich jetzt aber nicht länger verweilen will.

Beiläufig will ich nur noch auf den folgenden Satz aufmerksam machen. Es seien

$$(x_0y_0z_0),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2)$$

oder A_0, A_1, A_2 drei Punkte eines Ellipsoids, durch welche an dasselbe Berührungsebenen gelegt sind. Auf diese Berührungsebenen seien von dem Mittelpunkte des Ellipsoids die Perpendikel P_0, P_1, P_2 gefällt. Ferner seien auf die Berührungsebene in A_0 von A_1 und A_2 die Perpendikel Q_{01} und Q_{02}, auf die Berührungsebene in A_1 von A_2 und A_0 die Perpendikel Q_{12} und Q_{10}, auf die Berührungsebene in A_2 von A_0 und A_1 die Perpendikel Q_{20} und Q_{21} gefällt. Dann ist nach dem Obigen:

$$1-\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)=\frac{Q_{01}}{P_0}=\frac{Q_{10}}{P_1},$$

$$1-\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}\right)=\frac{Q_{12}}{P_1}=\frac{Q_{21}}{P_2},$$

$$1-\left(\frac{x_2x_0}{a^2}+\frac{y_2y_0}{b^2}+\frac{z_2z_0}{c^2}\right)=\frac{Q_{20}}{P_2}=\frac{Q_{02}}{P_0};$$

also ist:

$$\frac{Q_{01}Q_{12}Q_{20}}{P_0P_1P_2}=\frac{Q_{10}Q_{21}Q_{02}}{P_0P_1P_2},$$

woraus sich die bemerkenswerthe Relation

$$Q_{01}Q_{12}Q_{20}=Q_{10}Q_{21}Q_{02}$$

ergiebt.

Eine frühere Untersuchung von mir über denselben Gegenstand s. m. Thl. XXI. S. 314.

XX.

Verschiedene arithmetische Sätze.

Von

Herrn Doctor *G. F. Meyer*

in Hannover.

I. Heissen $a, b, c, \ldots l$ diejenigen Theiler von r, für welche $2a+1, 2b+1, \ldots 2l+1$ Primzahlen werden, so drückt, dem von Staudt'schen Theoreme zufolge, die $r$te Bernoulli'sche Zahl $=B_r$ gesetzt,

$$B_r+(-1)^{r-1}[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}+\ldots+\frac{1}{2l+1}]$$

eine ganze Zahl aus *). Nun ist aber, wenn wir der Kürze wegen

$${}_m\overset{r}{\mathfrak{B}}=\frac{m.m-1\ldots.m-r+1}{1.2.3\ldots.r}$$

schreiben, nach der bekannten Moivre'schen Formel:

$${}_{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}B_n-{}_{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}B_{n-1}+{}_{2n+1}\overset{5}{\mathfrak{B}}B_{n-2}-\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\,{}_{2n+1}\overset{2n-1}{\mathfrak{B}}B_1+(-1)^n\frac{2n-1}{1.2}=0.$$

Mithin:

---

*) Crelle's Journal Bd. 21. No. 18. S. 372 ff. Für diejenigen der geehrten Leser dieses Archivs, welche die Geschichte des erwähnten Lehrsatzes kennen, bemerke ich noch, dass ich recht gut weiss, dass auch Herr Th. Clausen denselben gefunden hat. Ich habe indess das Theorem nach Herrn von Staudt benannt, weil dieser — nach seiner eignen Aussage — schon lange vor Clausen in dem Besitze des Satzes gewesen ist.

$$
\begin{aligned}
&{}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big[B_n+(-1)^{n-1}[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda+1}]\Big] \\
&-{}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}\Big[B_{n-1}+(-1)^{n-2}[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha_1+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_1+1}]\Big] \\
&+{}^{2n+1}\overset{5}{\mathfrak{B}}\Big[B_{n-2}+(-1)^{n-3}[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha_2+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_2+1}]\Big]-\ldots \\
&+(-1)^{n-1}\;{}^{2n+1}\overset{2n-1}{\mathfrak{B}}\Big[B_1+[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha_{n-1}+1}+\ldots]\Big]+(-1)^n.n \\
&={}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(-1)^n\Big[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha+1}+\frac{1}{2\beta+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda+1}\Big] \\
&+{}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}(-1)^n\Big[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha_1+1}+\frac{1}{2\beta_1+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_1+1}\Big] \\
&+{}^{2n+1}\overset{5}{\mathfrak{B}}(-1)^n\Big[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha_2+1}+\frac{1}{2\beta_2+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_2+1}\Big] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+{}^{2n+1}\overset{2n-1}{\mathfrak{B}}(-1)^n\Big[\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha_{n-1}+1}+\ldots\Big]-(-1)^n.\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Wie leicht ersichtlich, bedeuten hier die verschiedenen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots l$ die Werthe der obigen a, b, c, ... l in Bezug auf n, $n-1$, ... 1. Da nun in der vorstehenden Gleichung der Theil links vom Gleichheitszeichen eine ganze Zahl vorstellt, so muss nothwendig auch

$$
\begin{aligned}
&{}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\{\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha+1}+\frac{1}{2\beta+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda+1}\} \\
&+{}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}\{\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha_1+1}+\frac{1}{2\beta_1+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_1+1}\} \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+{}^{2n+1}\overset{2n-1}{\mathfrak{B}}\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\}-\tfrac{1}{2},
\end{aligned}
$$

und daher

$$
{}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big\{\frac{1}{2\alpha+1}+\ldots\Big\}+{}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}\Big\{\frac{1}{2\alpha_1+1}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_1+1}\Big\}+\ldots+{}^{2n+1}\overset{2n-1}{\mathfrak{B}}.\tfrac{1}{3}\;{}^{*)}
$$

mit einer ganzen Zahl identisch sein.

---

*) Dass statt der ungeraden Binomial-Coefficienten auch die geraden in Anwendung kommen können, ergiebt sich wegen der Beziehung

$$
{}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}}={}^{m}\overset{m-r}{\mathfrak{B}}
$$

sofort.

Wie sofort einleuchtet, lässt dieses Ergebniss noch dadurch sich vereinfachen, dass man von den Zahlen $2\alpha+1$, $2\beta+1$, ...; $2\alpha_1+1$, $2\beta_1+1$, ... u. s. w. diejenigen ausscheidet, welche beziehungsweise Primfactoren von ${}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}$, ${}^{2n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ u. s. f. darstellen.

II. Bedeutet $f^{2n}(0)$ den $2n$ten Differentialquotienten der Function $fz=\frac{z}{e^z-1}$, so ist bekanntlich:

$$B_n=(-1)^{n-1}f^{2n}(0).$$

Für $f^{2n}(0)$ aber ergiebt sich nach dem bekannten Laplace'schen Verfahren *):

$$f^{2n}(0)=\frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}[\overset{2n-1}{A_1}-\overset{2n-1}{A_2}+\overset{2n-1}{A_3}-....+\overset{2n-1}{A_{2n-1}}],$$

wo

$$\overset{2n-1}{A_p}=p^{2n-1}-\frac{2n}{1}(p-1)^{2n-1}+\frac{2n.2n-1}{1.2}(p-2)^{2n-1}-....$$

$$\pm\frac{2n.(2n-1)....(2n-p+2)}{1.2.3....(p-1)}$$

für $p=1, 2, 3, ... 2n-1$ gesetzt. Da also hiernach $\overset{2n-1}{A_1}$, $\overset{2n-1}{A_2}$, ... ganze Zahlen ausdrücken, so erhellt sofort, dass auch

$$\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n}$$

eine ganze Zahl bezeichnet **). Hieraus aber ergiebt sich mit Hülfe des Fermat'schen Satzes eine neue Folgerung. Bedeutet nämlich n eine ungerade Primzahl, so hat man:

$$2^{2n-2}-1\equiv 0 \ (\text{mod.}\ n)$$

und

$$2^{2n}\equiv 2^2.$$

---

*) Lacroix. Traité. T. III. p. 107 sqq — Supplem. zu Klügel's mathem. Wörterbuche von A—D, Art. Bernoulli'sche Zahlen.

**) Dasselbe folgt z. B. auch aus der Relation:

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{2n}=b_n-{}^{2n-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}\,b_{n-1}+{}^{2n-1}\overset{4}{\mathfrak{B}}\,b_{n-2}-...+(-1)^{n-1}\,{}^{2n-1}\overset{2n-2}{\mathfrak{B}}\,b_1,$$

wo die b die Secanten-Coefficienten sind.

Ist demnach $n > 3$, so kann nur dadurch die Bedingung $\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n} =$ einer Ganzzahl erfüllt werden, dass B_n im Zähler n als Factor enthält.

Wir können diesem Satze eine allgemeinere Fassung geben, indem wir die Bedingung aufsuchen, welche erfüllt sein muss, damit für ein zusammengesetztes n irgend ein (ungerader) Primfactor desselben einen Theiler von $2^{2n}-1 = 4^n-1$ bilde. Sei daher $n = vp$, wo p eine ungerade Primzahl ausdrückt. Heisst d der kleinste Exponent, für welchen die Congruenz Statt hat:

$$4^d \equiv 1 \pmod{p},$$

so muss nothwendig $p-1 = md$ sein. Weil aber aus

$$4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

folgt:

$$4^{vp} \equiv 4^v,$$

so muss für

$$4^v \equiv 1$$

offenbar $v = m_1 d$ sein. Findet mithin diese Bedingung nicht Statt, so kann p nur in dem Zähler von B_n vorkommen. Die Bedingung $v = m_1 d$ aber muss jedesmal eintreten, wenn auch $2p+1$ eine Primzahl bedeutet. Denn ist $t = \frac{n}{c}$ ein solcher Theiler von n, für welchen $2t+1$ zu einer Primzahl wird, so folgt:

$$2^{2t} \equiv 1 \pmod{2t+1}$$

und daher auch:

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{2t+1}.$$

Hat man $n = v_1 p^\alpha$, so entspringt zunächst:

$$4^{(p-1)p^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \text{ folglich } 4^{v_1 p^\alpha} \equiv 4^{v_1 p^{\alpha-1}}.$$

Und nennen wir jetzt d_1 den kleinsten Exponenten, für welchen die Congruenz

$$4^{d_1} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

Gültigkeit besitzt, so muss für den Fall

$$4^{v_1 p^{\alpha-1}} \equiv 1$$

$v_1 p^{\alpha-1}$ nothwendig ein Vielfaches von d_1 vorstellen.

So ist z. B. für $n = 3.5$:

$$4^2 \equiv 1 \text{ (mod.} 5) \text{ und } 4^{15} \equiv 4^3, \text{ also } 3 (=) 2,$$

$$B_n = B_{15} = \frac{8615841276005}{14322} = \frac{5.1723168255201}{2.3.7.11.31}.$$

Für $n = 5^2$ hat man:

$$4^{10} \equiv 1 \text{ (mod.} 5^2), \quad 4^{25} \equiv 4^5;$$

sonach $d_1 = 10 (=) 5$. Dem Obigen zufolge muss somit der Zähler von

$$B_{25} = \frac{4950572052410796482124775525}{2.3.11}$$

ein Multiplum von 25 bezeichnen, was — wie man sieht — in der That der Fall ist.

III. Elementarer Beweis eines Stern'schen Lehrsatzes.

Setzt man $M = 1.2.3 \ldots . p-1$, so muss, falls p eine Primzahl bedeutet, $M + \frac{M}{2} + \frac{M}{3} + \ldots + \frac{M}{p-1}$ durch p theilbar sein.

Dieser — so viel ich weiss — zuerst von Herrn Professor Stern in der Abhandlung: „Zur Theorie der Euler'schen Integrale. Göttingen 1847. S. 39." ausgesprochene interessante Lehrsatz lässt sich nach meinem Dafürhalten kurz so beweisen.

Da nämlich p als Primzahl vorausgesetzt wird, so erhellt zuvörderst, dass die ganzen Zahlen $M, \frac{M}{2}, \ldots, \frac{M}{p-1}$ zu p prim sind. Und eben so leicht ergiebt sich, dass irgend zwei Zahlen $\frac{M}{q}$ und $\frac{M}{r}$ der obigen Reihe, durch p dividirt, verschiedene Reste geben müssen, indem sonst die Congruenz Statt haben müsste:

$$\frac{M}{q} - \frac{M}{r} = \frac{M}{qr}(r-q) \equiv 0 \text{ (mod.} p),$$

was unmöglich. Führt man daher in Bezug auf jede der Zahlen $M, \frac{M}{2}, \ldots$ die Division mit p aus, so muss die Reihe der Reste schliesslich lauten:

$$p-1, \quad p-2, \ldots . 1.$$

Die Summe

$$p-1+p-2+\ldots+1 = \frac{p.p-1}{2}$$

aber ist durch p theilbar und sonach auch:

$$M+\frac{M}{2}+\frac{M}{3}+\ldots+\frac{M}{p-1}.$$

Eleganter dürfte der Beweis sein, wenn man erwägt, dass immer zwei Zahlen $\frac{M}{q}$ und $\frac{M}{r}$ der vorgelegten Reihe sich angeben lassen, für welche man hat:

$$\frac{M}{q}+\frac{M}{r}=\frac{M}{qr}(q+r)\equiv 0 \text{ (mod. } p\text{), d. h. } q+r\equiv 0.$$

Zu diesem Behufe braucht man offenbar nur jedesmal zwei solche Zahlen zu einer zu vereinigen, welche von den Enden gleich weit entfernt sind. Man erhält auf diese Weise sofort:

$$M+\frac{M}{2}+\ldots+\frac{M}{p-2}+\frac{M}{p-1}$$

$$=\frac{M}{p-1}(p-1+1)+\frac{M}{2.p-2}(p-2+2)+\ldots\equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

XXI.

Ueber einige bestimmte Integrale nebst Summirung einiger endlichen Reihen.

(Aus den Uebersichten der Verhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Stockholm.)

Von

Herrn *Christian Fr. Lindman*,

Lector der Mathematik am Gymnasium zu Strengnäs in Schweden.

Die leicht zu findende Gleichung

$$\int_0^1 \frac{xdy}{x^2+y^2}=\text{Arctg}\frac{1}{x}$$

giebt durch $n$malige Differentiation nach x, und wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Cos}[(n+1)\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}]}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy = \frac{\operatorname{Sin}(n \operatorname{Arctg}\frac{1}{x})}{n(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}, \ldots (1)$$

weil man hat:

$$D_x{}^n\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = (-1)^n \Gamma(n+1)\frac{\operatorname{Cos}[(n+1)\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}]}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$D^n(\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}) = -D^{n-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = (-1)^n\Gamma(n)\frac{\operatorname{Sin}(n\operatorname{Arctg}\frac{1}{x})}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Wenn man in (1) $x = \operatorname{Cot}\alpha$, $y = \operatorname{Cot}\alpha \operatorname{tg}\varphi$ setzt, so findet man:

$$\int_0^\alpha \operatorname{Cos}(n+1)\varphi \operatorname{Cos}^{n-1}\varphi d\varphi = \frac{\operatorname{Sin} n\alpha \operatorname{Cos}^n\alpha}{n} \ldots (2)$$

Das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}(n+1)\varphi \operatorname{Cos}^{n-1}\varphi d\varphi = 0,$$

welches ein besonderer Fall des Integrals (2) ist, ist schon früher von Kummer in Crelle's Journal und von mir in den Verhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Stockholm gegeben worden.

Durch $n$malige Differentiation nach x und Aufhebung findet man desgleichen aus der Formel

$$\int_0^1 \frac{ydy}{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2}l(x^2+y^2) - lx$$

das Integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Sin}[(n+1)\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}]}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy = \frac{1}{nx^n} - \frac{\operatorname{Cos}(n\operatorname{Arctg}\frac{1}{x})}{n(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}, \quad (3)$$

weil man hat:

$$D_x{}^n\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \frac{(-1)^n\Gamma(n+1)}{y}\cdot\frac{\operatorname{Sin}[(n+1)\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}]}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$



$$\tfrac{1}{2}D^n l(1+x^2) = D^{n-1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = (-1)^{n-1}\Gamma(n)\frac{\operatorname{Cos}\left(n\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$D^n lx = D^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n)}{x^n}.$$

Führt man auch hier $\operatorname{Cot}\alpha$ statt x und $\operatorname{Cotg}\alpha\operatorname{tg}\varphi$ statt y ein, so bekommt man:

$$\int_0^\alpha \operatorname{Sin}(n+1)\varphi\operatorname{Cos}^{n-1}\varphi d\varphi = \frac{1-\operatorname{Cos}n\alpha\operatorname{Cos}^n\alpha}{n}. \qquad (4)$$

Die Integrale (2) und (4) kann man auch finden, wenn man $\operatorname{Cos}^{n-1}\varphi$ durch Cosinus vielfacher Bogen ausdrückt und die Producte in Sinus und Cosinus zerlegt. Dann erhält man die endlichen Reihen:

$$\frac{1}{2^n}\overset{p=n-1}{\underset{p=0}{S}}(n-1)_p\frac{\operatorname{Sin}2(p+1)\alpha}{p+1}, \quad \frac{1}{2^n}\overset{p=n-1}{\underset{p=0}{S}}(n-1)_p\frac{1-\operatorname{Cos}2(p+1)\alpha}{p+1};$$

welche der rechten Seite der Formeln (2) und (4) respective gleich sind. Diese Reihen können auch folgendermaassen summirt werden.

Wenn man

$$\sigma = \overset{p=m}{\underset{p=0}{S}}\frac{m_p x^{p+1}}{p+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

setzt und differentiirt, so bekommt man:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \overset{p=m}{\underset{p=0}{S}} m_p x^p = (1+x)^m,$$

woraus durch Integration

$$\sigma = C + \frac{(1+x)^{m+1}}{m+1}$$

erhalten wird. Weil $\sigma=0$ ist für $x=0$, so ist $C=-\frac{1}{m+1}$ und

$$\overset{p=m}{\underset{p=0}{S}}\frac{m_p x^{p+1}}{p+1} = \frac{(1+x)^{m+1}-1}{m+1}. \quad \ldots\ldots (6)$$

Die Formel (6), wenn man $x=e^{2yi}$ setzt, geht in

$$\overset{p=m}{\underset{p=0}{S}}\frac{m_p}{p+1}e^{2(p+1)yi} = \frac{(1+e^{2yi})^{m+1}-1}{m+1} = \frac{e^{(m+1)yi}(e^{yi}+e^{-yi})^{m+1}-1}{m+1}$$

über. Zufolge der bekannten Formeln

$$e^{ryi} = \mathrm{Cos}\, ry + i\,\mathrm{Sin}\, ry, \quad (e^{yi}+e^{-yi})^{m+1} = 2^{m+1}\,\mathrm{Cos}^{m+1}y$$

finden wir also:

$$\underset{p=0}{\overset{p=m}{S}} \frac{m_p}{p+1}\,[\mathrm{Cos}\,2(p+1)y + i\,\mathrm{Sin}\,2(p+1)y]$$

$$= \frac{2^{m+1}\,\mathrm{Cos}^{m+1}y\,[\mathrm{Cos}\,(m+1)y + i\,\mathrm{Sin}\,(m+1)y] - 1}{m+1}.$$

Durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile ergiebt sich endlich:

$$\underset{p=0}{\overset{p=m}{S}} \frac{m_p}{p+1}\,\mathrm{Cos}\,2(p+1)y = \frac{2^{m+1}\,\mathrm{Cos}\,(m+1)y\,\mathrm{Cos}^{m+1}y - 1}{m+1}. \quad (7)$$

$$\underset{p=0}{\overset{p=m}{S}} \frac{m_p}{p+1}\,\mathrm{Sin}\,2(p+1)y = \frac{2^{m+1}\,\mathrm{Sin}\,(m+1)y\,\mathrm{Cos}^{m+1}y}{m+1}. \quad (8)$$

Führt man in (2) und (4) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ statt φ und α ein, so findet man:

$$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}\,(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{Sin}^{n-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\, n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{Sin}^n\alpha}{n},$$

$$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}\,(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{Sin}^{n-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1 - \mathrm{Cos}\, n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{Sin}^n\alpha}{n}$$

und, $\alpha = 0$ gesetzt,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}\,(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{Sin}^{n-1}\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}\,(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{Sin}^{n-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{n};$$

also auch:

$$\int_0^{\alpha} \mathrm{Cos}\,(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{Sin}^{n-1}\varphi\, d\varphi = -\frac{\mathrm{Sin}\, n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{Sin}^n\alpha}{n},$$

$$\int_0^{\alpha} \mathrm{Sin}\,(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{Sin}^{n-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\mathrm{Cos}\, n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{Sin}^n\alpha}{n}.$$

Durch bekannte goniometrische Formeln finden wir jetzt:

$$\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\int_0^{\alpha}\operatorname{Cos}(n+1)\varphi\operatorname{Sin}^{n-1}\varphi d\varphi-\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}\int_0^{\alpha}\operatorname{Sin}(n+1)\varphi\operatorname{Sin}^{n-1}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{Sin}^n\alpha}{n},$$

$$\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}\int_0^{\alpha}\operatorname{Cos}(n+1)\varphi\operatorname{Sin}^{n-1}\varphi d\varphi+\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\int_0^{\alpha}\operatorname{Sin}(n+1)\varphi\operatorname{Sin}^{n-1}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{Sin}^n\alpha}{n};$$

und durch Elimination:

$$\int_0^{\alpha}\operatorname{Cos}(n+1)\varphi\operatorname{Sin}^{n-1}\varphi d\varphi=\frac{\operatorname{Cos}n\alpha\operatorname{Sin}^n\alpha}{n}, \quad . \; . \; . \; (9)$$

$$\int_0^{\alpha}\operatorname{Sin}(n+1)\varphi\operatorname{Sin}^{n-1}\varphi d\varphi=\frac{\operatorname{Sin}n\alpha\operatorname{Sin}^n\alpha}{n}. \quad . \; . \; . \; (10)$$

Führt man hier statt $\operatorname{Sin}^{n-1}\varphi$ seinen durch Sinus und Cosinus vielfacher Bogen ausgedrückten Werth ein und verfährt wie in Hinsicht der Formeln (2) und (4), so erhält man gleichfalls endliche Reihen wie (7) und (8), aber mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern. Auch diese Reihen lassen sich, wie die vorigen, besonders summiren. Setzt man also:

$$\sigma=\mathop{S}_{p=0}^{p=n}(-1)^p\frac{n_p x^{p+1}}{p+1},$$

so ergiebt sich wie vorher:

$$\mathop{S}_{p=0}^{p=n}(-1)^p\frac{n_p x^{p+1}}{p+1}=\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}, \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

woraus, wenn man e^{-2yi} statt x setzt, gerade und ungerade n unterscheidet und die reellen und imaginären Theile vergleicht, entsteht:

(12)

$$\mathop{S}_{p=0}^{p=2m}(-1)^p\frac{(2m)_p}{p+1}\operatorname{Cos}2(p+1)y=\frac{1+(-1)^{m+1}2^{2m+1}\operatorname{Sin}(2m+1)y\operatorname{Sin}^{2m+1}y}{2m+1},$$

(13)

$$\mathop{S}_{p=0}^{p=2m}(-1)^p\frac{(2m)_p}{p+1}\operatorname{Sin}2(p+1)y=\frac{(-1)^m 2^{2m+1}\operatorname{Cos}(2m+1)y\operatorname{Sin}^{2m+1}y}{2m+1},$$

(14)

$$\underset{p=0}{\overset{p=2m-1}{S}}(-1)^p\frac{(2m-1)_p}{p+1}\operatorname{Cos}2(p+1)y=\frac{1-(-1)^m 2^{2m}\operatorname{Cos}2my\operatorname{Sin}^{2m}y}{2m},$$

(15)

$$\underset{p=0}{\overset{p=2m-1}{S}}(-1)^p\frac{(2m-1)_p}{p+1}\operatorname{Sin}2(p+1)y=\frac{(-1)^{m+1}2^{2m}\operatorname{Sin}2my\operatorname{Sin}^{2m}y}{2m}.$$

Ohne Schwierigkeit findet man, wenn man in (7) $y=0$ und $y=2y$ macht und die Resultate addirt und subtrahirt, die Summen:

(16)

$$\underset{p=0}{\overset{p=m}{S}}\frac{m_p}{p+1}\operatorname{Cos}^2 2(p+1)y=\frac{2^m[1+\operatorname{Cos}2(m+1)y\operatorname{Cos}^{m+1}2y]-1}{m+1},$$

$$\underset{p=0}{\overset{p=m}{S}}\frac{m_p}{p+1}\operatorname{Sin}^2 2(p+1)y=\frac{2^m[1-\operatorname{Cos}2(m+1)y\operatorname{Cos}^{m+1}2y]}{m+1}. \quad (17)$$

Dasselbe Verfahren mit (12) und (14) giebt neue Summen, was ich aber hier nicht weiter ausführen zu dürfen glaube.

XXII.

Beweis der Gleichung

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2}du=(-1)^k\int_0^1 (u)_{k+2}du.$$

(Siehe dieses Archiv Thl. XX. Seite 410—418.)

Von

Herrn *Christian Fr. Lindman*,

Lector der Mathematik am Gymnasium zu Strengnäs in Schweden.

Führt man in das bestimmte Integral

$$J'=\int_0^1 u(u-1)\ldots.(u-k)(u-k-1)\,du$$

($k=$ einer ganzen Zahl)

$1-x$ statt u ein, so wird $du=-dx$ und die Grenzen $u=0$, $u=1$ geben resp. in $x=1$, $x=0$ über. Setzen wir hier $-(x-1)$ statt $1-x$, so haben alle Factoren das Vorzeichen $-$; weil sie aber in der Anzahl $k+2$ vorhanden sind, so bekommt das Product das Vorzeichen $+$ oder $-$, jenachdem die ganze Zahl $k+2$ oder k gerade oder ungerade ist. Demzufolge, und wenn wir die Grenzen umtauschen, finden wir:

$$J'=(-1)^k\int_0^1 (x-1)x(x+1)\dots(x+k-1)(x+k)\,dx$$

$$=(-1)^k\int_0^1 (u+k)(u+k-1)\dots u(u-1)\,du,$$

wenn man u statt x schreibt. Multiplicirt man endlich beiderseits mit $\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+3)}$, so ergiebt sich:

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2}\,du=(-1)^k\int_0^1 (u)_{k+2}\,du.$$

Q. e. d.

XXIII.
Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herausgeber.

Die durch die folgende Construction der Länge der halben Peripherie eines Kreises gewährte Annäherung zu untersuchen.

Durch den Mittelpunkt O (Taf. VI. Fig. 5.) des gegebenen Kreises ziehe man die auf einander senkrecht stehenden Durchmesser AB und CD, mache die Sehne AE dem Halbmesser gleich, ziehe durch C eine Berührende an den Kreis, und von O nach E einen Halbmesser, welcher, verlängert, die Berührende in F schneidet; macht man dann FG dem dreifachen Halbmesser gleich und zieht DG, so ist diese Linie näherungsweise der halben Peripherie des Kreises gleich.

Fehler
im Texte zu Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln. 1860 und 1861.

In der Einleitung zu Tafel I. und II.

a) S. 8., linke Spalte, §. 50., Zeile 2, statt 0,334238 lies ,0334238.

b) S. 13., rechte Spalte, §. 77., Z. 4, statt $D=D\pm1$ lies $D=D_r\pm1$.

XXIV.

Eine Verhältnissreihe von Körpern, die einem bestimmten Paraboloidsegmente ein- und umgeschrieben sind.

Zwei Uebungsaufgaben für Primaner.

Von

Herrn *Hermann Martus*,

Lehrer der Mathematik an der Königstädtischen Realschule in Berlin.

I. In welcher Entfernung vom Scheitel muss man ein Rotationsparaboloid durch eine zur Axe senkrechte Ebene durchschneiden, wenn das Octaeder, welches mit einer Ecke im Scheitelpunkte sich dem Segmente einschreiben lässt, ein regelmässiges sein soll? In welchen Verhältnissen stehen der Reihe nach die Volumina von folgenden acht Körpern: 1) der um das Octaeder zu beschreibende Doppelkegel D; 2) die dem Octaeder umgeschriebene Kugel G; 3) das Paraboloidsegment P selbst; 4) der mit ihm auf demselben Grundkreise stehende, ihm umgeschriebene (das Paraboloid mit seinem Mantel tangirende) Kegel K; 5) das Kugelsegment S und 6) der Cylinder C, welche mit ihm auf derselben Grundfläche stehen und dieselbe Höhe haben; ferner 7) das über das Paraboloidstück gedeckte Segment eines Hyperboloides H, entstanden durch Umdrehung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Axen und Parameter gleich dem Parameter der Parabel sind $(a=b=p)$; und endlich 8) das dem Paraboloide umgeschriebene Ellipsoid E, in welchem die Höhe des Segmentes eine Halbaxe ist.

Auflösung. In der gegebenen Parabel BOR (Tafel VIII. Fig. 1) ziehe man vom Scheitel aus auf beiden Seiten der Axe

unter einem Winkel von 45° Sehnen, und vollends aus ihnen das Quadrat $OJAL$; errichte nun in der dem Scheitel O gegenüberliegenden Ecke auf der Axe eine senkrechte Parabelsehne, so schneidet dieselbe das Segment BOR ab, welches bei der Umdrehung der Figur um die Axe OA das zu betrachtende Paraboloidsegment liefert. Denn die Ecken des Quadrates $OJAL$ bestimmen in dieser Lage und wenn es bei der Umdrehung in die auf der Figur in OA senkrechte Ebene gekommen ist, die sechs Eckpunkte eines regelmässigen Octaeders.

Man hat aus $x^2 = MJ^2 = 2px$:

$$OM = x = 2p;$$

folglich

$$OA = 4p.$$

Demnach ist der vom Quadrate $OJAL$ bei der Umdrehung beschriebene Doppelkegel:

$$1) \ldots\ldots D = 2.\pi x^2 \cdot \frac{x}{3} = \frac{2}{3}\pi x^3 = \frac{16}{3}\pi p^3.$$

Ferner die von dem Kreise um M erzeugte Kugel:

$$2) \ldots\ldots G = \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{32}{3}\pi p^3 = 2.\frac{16}{3}\pi p^3.$$

Für die Bestimmung des Paraboloidsegmentes weiss man, dass ein Körper, welcher in jeder Höhe x einen Querschnitt

$$Q = a + bx + cx^2$$

besitzt, den Inhalt

$$J = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3}$$

hat. Hier ist jeder Querschnitt $y^2\pi = 2px\pi$, also $a = 0$, $b = 2p\pi$, $c = 0$; mithin

$$3) \ldots\ldots P = p\pi x^2 = 16\pi p^3 = 3.\frac{16}{3}\pi p^3.$$

Dann giebt das von den Tangenten BN und RN gebildete Dreieck BNR den Kegel:

$$4) \ldots K = \frac{1}{3}.2AO.AB^2\pi = \frac{64}{3}\pi p^3 = 4.\frac{16}{2}\pi p^3.$$

Der durch die Punkte B, O und R gehende Kreis hat zum Radius $3p$; denn

$$AB^2 = OA.AQ$$

giebt $AP = 2p$, also $OQ = 6p$. Darum

$$5) \ldots S = \frac{\pi}{3}.16p^2.(9p - 4p) = \frac{80}{3}\pi p^3 = 5.\frac{16}{3}\pi p^3.$$

Der von dem Rechtecke $BTUR$ beschriebene Cylinder:

$$6) \ldots\ldots C^2 = 4p.8p^2\pi = 32\pi p^3 = 6.\frac{16}{3}\pi p^3.$$

Zur Construction der gleichseitigen Hyperbel VOW, in welcher $a = b = p$ sein soll, hat man aus dem rechtwinkligen Dreiecke YOZ, dessen Katheten $= p$ sind, den Abstand ihrer Brennpunkte vom Mittelpunkte Y gleich YZ. Da jeder Querschnitt des Hyperboloidsegmentes in der Entfernung x von O

$$y^2\pi = 2\pi px + \pi x^2,$$

ist, so beträgt

$$J = \pi px^2 + \tfrac{1}{3}\pi x^3 = \tfrac{1}{3}\pi x^2(3p + x),$$

also hier:

$$7) \ldots\ldots\ldots H = \frac{112}{3}\pi p^3 = 7.\frac{16}{3}\pi p^3.$$

Endlich beschreibt die Ellipse, deren Halbaxen AO und AB sind, ein Rotationsellipsoid, dessen Inhalt

$$8) \ldots\ldots E = \frac{4}{3}\pi AB^2.AO = \frac{128}{3}\pi p^3 = 8.\frac{16}{3}\pi p^3.$$

Also verhält sich

$$\mathbf{D:G:P:K:S:C:H:E}$$

$$= \mathbf{1:2:3:4:5:6:7:8}.$$

Zusätze. 1) Der merkwürdige Platz der Zahl 7 in dieser Reihe würde auch durch das vierfache kleinere Kugelsegment, von $ABQR$ beschrieben, ausgefüllt werden.

2) Der mit seinem Mantel das Paraboloid tangirende Kegel und das Kugelsegment, von $ABOR$ beschrieben, haben gleiche Oberflächen, die achtmal so gross sind, als der dem Quadrate $AJOL$ umgeschriebene Kreis.

3) Die Oberfläche des Doppelkegels D ist gleich der Ellipse $XBOR$.

4) Mit Ausnahme von No. 5 und No. 7 stehen diese Körper bei einem Paraboloidsegmente von beliebiger Höhe, auch bei einem elliptischen Paraboloide, in den angegeben Verhältnissen.

Anmerkung. Soll am Scheitel des gegebenen Rotationsparaboloides ein grades Segment von solcher Höhe abgeschnitten werden, dass ein Tetraeder, welches auf einem dem Durchschnittskreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke steht und seine Spitze im Scheitelpunkte des Paraboloides hat, regelmässig ist: so muss es dieselbe Höhe $4p$ wie in der vorstehenden Aufgabe haben; und darum könnte hier jene Verhältnissreihe wieder eintreten. Allein es fehlt hier das Glied 1; und die Stelle der Zahl 2 hat der um das Tetraeder beschriebene Kegel oder eine Kugel von gleicher Höhe (Durchmesser) mit dem Segmente.

II. Durch welchen Punkt der Axe eines gegebenen Rotationsparaboloides muss man einen geraden Querschnitt legen, damit in dem erhaltenen Segmente ein Würfel so construirt werden könne, dass die Höhe des Segmentes eine Diagonale wird und die drei Eckpunkte, welche der im Scheitel ruhenden Würfelecke zunächst liegen, in den Mantel des Paraboloides fallen? In welchen Verhältnissen stehen der Reihe nach die Volumina von folgenden Körpern: 1) Die um den Würfel beschriebene Kugel G; 2) der jener im Scheitel ruhenden Würfelecke eingeschriebene Kegel k, von gleicher Höhe mit dem Segmente; derselbe wird bei der Umdrehung durch eine vom Scheitel auslaufende Diagonale eines Seitenquadrates beschrieben; 3) das Paraboloidsegment P; 4) von der um das Paraboloidsegment beschriebenen Kugel derjenige Abschnitt S, welcher jenes in sich einschliesst; 5) der Cylinder C, welcher mit dem Paraboloidsegmente gleiche Grundfläche und Höhe hat; 6) der auf der Ebene des Querschnittes stehende Kegel K, welcher dem Würfel umgeschrieben ist, d. h. ihn überdeckt, indem er die vom Scheitel des Paraboloides auslaufenden Kanten in seinem Mantel enthält; 7) ein eben so hohes Segment H eines Hyperboloides, entstanden durch Umdrehung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Axen und Parameter gleich dem Parameter der Parabel ($a = b = p$) sind.

Auflösung. Die Coordinaten des Eckpunktes A (Taf. IX. Fig. 2.) heissen x und y, die zu findende Kante OA des Würfels z. Dann hat man aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke OAT und OAD

$$x:y = z:\sqrt{2z^2},$$

folglich

$$y = x\sqrt{2}$$

und daher aus $y^2 = 2px$:

$$x = p, \quad y = p\sqrt{2} \quad \text{und} \quad z = p\sqrt{3};$$

folglich ist die Höhe des gesuchten Segmentes:

$$OD = 3p.$$

Demnach ist 1) der Inhalt der um den Würfel beschriebenen Kugel

$$G = \tfrac{9}{2}\pi p^3.$$

Die Diagonale OE schneidet die Grundebene in U, und es verhält sich

$$DU : VE = OD : OV,$$

oder

$$DU : y = 3p : 2p,$$

also

$$DU = 3p\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

mithin ist 2) der Inhalt des durch Umdrehung des Dreiecks OUD beschriebenen Kegels

$$k = \tfrac{9}{2}\pi p^3,$$

also gleich der umgeschriebenen Kugel.

3) Das Paraboloidsegment, da $DQ^2 = 6p^2$ ist,

$$P = 9\pi p^3 = 2 . \tfrac{9}{2}\pi p^3.$$

Der Durchmesser des durch die Punkte Q, O und R gehenden Kreises findet sich aus $DQ^2 = OD.(2R - OD)$:

$$2R = 5p;$$

daher ist 4) das von dem Kreissegmente $DQOR$ beschriebene Kugelsegment S:

$$S = \frac{27}{2}\pi p^3 = 3 . \frac{9}{2}\pi p^2.$$

5) Der das Paraboloidsegment einschliessende gerade Cylinder C:

$$C = 18\pi p^3 = 4 . \tfrac{9}{2}\pi p^3.$$

Verlängert man die Kante OA bis sie die Erweiterung der Grund-

ebene schneidet, so beschreibt OAW bei Umdrehung des Dreiecks WDO einen Kegelmantel, welcher den Würfel überdeckt. Es verhält sich

$$WD:AT = 3p:p,$$

also:

$$WD = 3p\sqrt{2},$$

daher 6):

$$K = 18\pi p^3 = 4.\tfrac{9}{2}\pi p^3$$

gleich dem Cylinder C.

Endlich ist 7) auch das Hyperboloidsegment:

$$H = \frac{\pi}{3}(3p)^2.(3p+3p) = 18\pi p^3 = 4.\tfrac{9}{2}\pi p^3.$$

Mithin hat man für diese Körper die Verhältnisse:

$$(\mathbf{G} \text{ oder } \mathbf{k}):\mathbf{P}:\mathbf{S}:(\mathbf{C} \text{ oder } \mathbf{K} \text{ oder } \mathbf{H})$$

$$= \mathbf{1}:\mathbf{2}:\mathbf{3}:\mathbf{4}.$$

Zusatz. Auch verhält sich der dem Paraboloidsegmente eingeschriebene Kegel, welcher durch Umdrehung des Dreiecks QOD entsteht, zu dem ihm umgeschriebenen Kegel, dessen Mantel von der durch Q an die Parabel gelegten Tangente erhalten wird, zu einem der unter No. 5, 6 oder 7 genannten Körper, zu dem Ellipsoide, dessen Mittelpunkt D, Scheitel O und worin die Grundfläche QR ein Haupt-Axenschnitt ist, wie

$$\mathbf{1}:\mathbf{2}:\mathbf{3}:\mathbf{4}.$$

Dieses Verhältniss der beiden letztgenannten Kegel, des Cylinders No. 5 und des Ellipsoides zeigt sich bei jedem geraden Segmente eines (auch elliptischen) Paraboloides.

Anmerkung. Ein Paraboloidsegment, welches ein mit einer Ecke im Scheitel ruhendes regelmässiges Dodekaeder oder Ikosaeder einschliesst, giebt keine Verhältnissreihe in ganzen Zahlen.

XXV.

Zur Theorie der quadratischen Formen.

Von

Herrn *Gustav Skrivan,*

Direktor der öffentlichen Oberrealschule a. d. Bauernmarkte zu Wien.

Folgende zwei Beweise der unter art. 154. und art. 166. in den Disquis. arith. enthaltenen Sätze unterscheiden sich von den Gauss'schen darin, dass der erste auf mehr direkte Weise und der zweite auf eine selbständige Art geführt wird.

Theorem (ad art. 154. disq. arith.).

Wenn eine quadratische Form für spezielle zu einander teilfremde Zahlenwerte von x, y eine bestimmte Zahl M repräsentirt, so ist die Determinante D ein quadratischer Rest nach M.

Beweis. Wenn die Zahl M vermöge der Substituzion $x=m$, $y=n$ mittelst der quadratischen Form

$$am^2+2bmn+cn^2=M \tag{1}$$

dargestellt wird und m zu n teilfremd ist, so ergeben sich aus (1) ganz einfach die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(am+bn)^2-Dn^2&=aM,\\(cn+bm)^2-Dm^2&=cM;\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo D die Determinante $=b^2-ac$ bedeutet. Sind nun μ und ν zwei unbestimmte Zahlen und multiplizirt man die erste Gleichung in (2) mit ν^2, die zweite mit μ^2 und addirt sonach diese Gleichungen, so folgt:

$$(am+bn)^2\nu^2+(cn+bm)^2\mu^2-D(n^2\nu^2+m^2\mu^2)=M(a\nu^2+c\mu^2).$$

Ergänzt man die zwei ersten Teile und ebenso den Faktor bei D zu vollständigen Quadraten, so übergeht diese Gleichung in:

$$[(am+bn)\nu-(cn+bm)\mu]^2-D(n\nu+m\mu)^2$$
$$+2\mu\nu(am+bn)(cn+bm)+2n\nu m\mu D=M(a\nu^2+c\mu^2).$$

Nun ist

$$2\mu\nu(am+bn)(cn+bm)+2mn\mu\nu D$$
$$=2\mu\nu[acmn+bcn^2+bam^2+b^2nm+nmb^2-mnac]$$
$$=2b\mu\nu(am^2+2bmn+cn^2)=2b\mu\nu M,$$

und daher hat man, wenn ausserdem

$$[(am+bn)\nu-(cn+bm)\mu]^2=z^2$$

gesetzt wird,

$$z^2-D(n\nu+m\mu)^2=M(a\nu^2-2b\mu\nu+c\mu^2).$$

Da nun m und n teilfremd sind, so giebt es unendlich viele spezielle Werte von μ und ν, welche die Gleichung

$$m\mu+n\nu=1 \tag{3}$$

befriedigen, und hernach übergeht die letzte aufgestellte Gleichung in

$$z^2-D=Ms, \tag{4}$$

wo $s=a\nu^2-2b\mu\nu+c\mu^2$ bedeutet, und aus welcher die Kongruenz

$$z^2\equiv D(\text{mod. } M)$$

resultirt; wie behauptet wurde.

Hiezu bemerke ich, dass sich s nicht nur in der Abhängigkeit a, b, c, μ, ν darstellen lässt, sondern dass man ganz einfach eine lineare Kongruenzform bilden kann, worin s von m, n, c, a und M abhängig ist. Werden nämlich die Gleichungen in (2) subtrahirt und die so gewonnene Gleichung in eine Kongruenz nach M umgewandelt, so ist

$$[(cn+bm)^2\mu^2-(am+bn)^2\nu^2]\equiv(m\mu-n\nu)D(\text{mod. } M),$$

wobei noch der Koeffizient bei D, mit Rücksicht auf (3), vereinfacht erscheint. Multiplizirt man diese Kongruenz mit

$$[(cn+bm)\mu+(am+bn)\nu]$$

und bringt dieselbe mit der aus (4) resultirenden Kongruenz in Verbindung, so folgt nach einer einfachen Redukzion, wobei man wieder die Gleichung (3) anwendet:

$$mn(c\mu^2 + a\nu^2) + b(m^2\mu^2 + n^2\nu^2) \equiv (cn\mu + am\nu + b) \pmod{M};$$

und setzt man statt $m^2\mu^2 + n^2\nu^2$ aus (3) den Wert $(1 - 2mn\mu\nu)$ ein und statt $c\mu^2 + a\nu^2 = s + 2b\mu\nu$, so ergiebt sich leicht:

$$mns \equiv cn\mu + am\nu \pmod{M},$$

oder

$$s \equiv am\xi + cn\chi \pmod{M}, \tag{5}$$

welches die erwähnte Darstellung ist.

Theorem (art. 166. Disq. arith.).

Wenn die Zahl M durch zwei aequivalente Formen F und F' gleichzeitig dargestellt wird, so haben die speziellen Substituzionen, welche M durch F darstellen, denselben grössten Gemeinteiler, wie die speziellen Substituzionen, welche M mittelst F' repräsentiren.

Beweis. Sind

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{und} \quad a_1x_1^2 + 2b_1x_1y_1 + c_1y_1^2$$

zwei aequivalente Formen, für welche also die respekt. Determinanten einander gleich sind und das reziproke enthalten sein der einen Form in die andere bedingt ist, und repräsentirt M gemäss der Substituzion $x = m$, $y = n$ die Form F, also

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = M,$$

ferner M die Form F', wenn man aus F die Form F' vermöge der Substituzion $\begin{pmatrix}\alpha, & \gamma\\ \beta, & \delta\end{pmatrix}$ ableitet, so ergiebt sich aus dem Sisteme $\begin{pmatrix}\alpha, & \gamma\\ \beta, & \delta\end{pmatrix}$ ganz einfach das Wertenpaar:

$$x_1 = \frac{\delta m - \beta n}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad y_1 = \frac{\alpha n - \gamma m}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

welches, zufolge $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, in $x_1 = \delta m - \beta n$, $y_1 = \alpha n - \gamma m$ übergeht.

Setzt man nun

$$\delta m - \beta n = fA, \quad \alpha n - \gamma m = fB,$$

worin f den grössten Gemeinteiler von m und n bedeutet, und sonach A zu B teilfremd ist, ferner:

$$m = gA', \quad n = gB',$$

wobei g der grösste Gemeinteiler von m und n ist und A' prim zu B', so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \delta m &= \delta g A' \\ \beta n &= \beta g B' \end{aligned}\right\} \delta m - \beta n = g(\delta A' - \beta B') = fA,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha n &= \alpha g B' \\ \gamma m &= \gamma g A' \end{aligned}\right\} \alpha n - \gamma m = g(\alpha B' - \gamma A') = fB;$$

und hieraus:

$$\delta A' - \beta B' = \frac{fA}{g}, \quad \alpha B' - \gamma A' = \frac{fB}{g}. \tag{1}$$

Nun kommt es darauf an, unter welchen Modalitäten $\frac{fA}{g}$, $\frac{fB}{g}$ ganzzahlige Darstellungen zulassen. Wäre $\frac{A}{g}$ ganzzahlig, so ist aus der Betrachtung der Gleichung $\delta m - \beta n = fA$ ersichtlich, dass, wenn g den grössten Gemeinteiler von m und n bedeutet, derselbe in f, als Stammfaktor, nicht mehr enthalten sein kann. Demzufolge wäre in der Gleichung $\alpha n - \gamma m = fB$ der grösste Gemeinteiler von m und n ebenfalls nicht in f, sondern in B enthalten, was jedoch nicht stattfinden kann, weil sonst A und B teilverwandt wären. Daher sind $\frac{A}{g}$ und $\frac{B}{g}$ keine ganzzahligen Formen, und es muss also in (1) die Quozientenform $\frac{f}{g}$ eine ganzzahlige Darstellung zulassen.

Sei nun $\frac{f}{g} = \eta$, und wäre $\eta > 1$, so hat man

$$\eta A = \delta A' - \beta B', \quad \eta B = \alpha B' - \gamma A';$$

und hieraus:

$$\eta(\alpha A + \beta B) = (\alpha\delta - \beta\gamma)A' = \pm 1 . A',$$

und auf dieselbe Weise:

$$\eta(\gamma A + \delta B) = \pm B';$$

also:

$$\frac{A'}{\eta} = \alpha A + \beta B, \quad \frac{B'}{\eta} = \gamma A + \delta B.$$

Da jedoch A' teilfremd zu B' vorausgesetzt wurde, so ist klar, dass η keinen anderen Zahlenwert als die Einheit bedeuten kann, welchem gemäss $f = g$ folgt, was eben zu beweisen war.

XXVI.

Weitere Ausführung der politischen Arithmetik.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

(Fortsetzung und Schluss von Nr. XVII. Thl. XXXVII.)

Sechstes Kapitel.

Ueber Lebensversicherungen.

§. 77.

Einrichtung und Zweck der Lebensversicherungs-Anstalten.

Unter den verschiedenen Wohlthätigkeits-Anstalten, deren Zweck Sparsamkeit und Hebung des Wohlstandes einzelner Personen und Familien ist, haben die Lebensversicherungs-Banken eine weite Verbreitung und erfreuen sich grosser Theilnahme.

Unter Lebensversicherung wird nämlich ein Vertrag verstanden, wornach eine Anstalt oder ein Verein mehrerer Personen jährlich bestimmte Beiträge empfängt und dafür die Verpflichtung übernimmt, bei dem eintretenden Tode einer bezeichneten Person eine im Voraus festgesetzte Summe auszuzahlen. Derjenige, mit welchem dieser Vertrag abgeschlossen wird, heisst der Versicherte, die hierüber ausgestellte Urkunde Police und die jährliche Beitragssumme Prämie.

Die Anstalt, welche die hiefür nöthigen Geschäfte besorgt, führt gewöhnlich den Namen Bank (Versicherungsbank), ist als eine moralische Person vom Staate anerkannt und beruht zur Hebung des Vertrauens auf Gegenseitigkeit und Oeffentlichkeit, denn die Theilnehmer an dieser Anstalt leisten jedem einzelnen Versicherten, also sich gegenseitig, für die Erfüllung der über-

nommenen Verbindlichkeiten Gewähr und Sicherheit, und die Anstalt legt jährlich öffentliche Rechenschaft über den Bestand ihrer Mittel ab.

Die Bank übernimmt Versicherungen auf das Leben einzelner Personen und zwar auf ihre Lebensdauer, lebenslängliche Versicherungen, oder auf eine bestimmte abgegrenzte Zeit von einem oder mehreren Jahren, kurze Versicherungen, ferner auf zwei verbundene Leben, so dass die versicherte Summe nur dann ausgezahlt wird, wenn von den beiden verbundenen Personen die im Voraus bezeichnete (B) die andere (A) überlebt, Ueberlebens-Versicherungen. Sie werden nur auf Lebensdauer abgeschlossen. Endlich ist gestattet, ausser der Versicherung auf das eigene Leben auch Versicherungen auf das Leben Anderer abzuschliessen.

Diejenigen Personen, welche lebenslängliche Versicherungen auf das eigene oder andere Leben, oder Ueberlebensversicherungen mit der Bank abgeschlossen haben, sind Eigenthümer der Anstalt oder Banktheilhaber. Sie leisten sich gegenseitig Sicherheit und nehmen an den Ueberschüssen der Bank Theil.

Die Einnahmen, wodurch die Bank in Stand gesetzt wird, ihren Verpflichtungen nachzukommen, bestehen hauptsächlich in den laufenden Beiträgen oder Prämiengeldern, dann in den Zinsen von den angelegten Geldern und in dem etwa sich ergebenden Agiogewinn.

Da die Versicherungen zu jeder Zeit eines Jahres abgeschlossen werden können und die Prämiengelder auf Jahresfrist gezahlt werden, also in das nächste Jahr hinüberlaufen können, so werden die Beiträge jeweils der Zeit entsprechend auf die beiden Jahre vertheilt (Ueberträge).

Die Ausgaben der Bank bestehen in den auszuzahlenden Versicherungssummen, in den Dividenden, einzelnen besondern Vergütungen aus der Reserve und in den Verwaltungskosten, deren Betrag mit Rücksicht auf möglichste Ersparniss normal bestimmt ist und für besondere Fälle bestimmt wird, ferner in zufälligen Verlusten, welche die Bank ohne Schuld ihrer Beamten treffen.

Der Ueberschuss der Einnahmen über die Ausgaben bildet den Fonds der Bank, der alle vorräthigen Zahlungsmittel in sich begreift. Ein Theil des Bankfonds dient als Reserve zur Deckung für künftig fällig werdende Versicherungssummen, ein Theil als Sicherheitsfonds, um Deckungsmittel für ausserordentliche Fälle zu haben.

Die Reserve besteht in dem, was von den Prämiengeldern zurückgelegt wird. Die jährlichen Beiträge des einzelnen Mitgliedes bleiben nämlich für das ganze Leben der Versicherten gleich. In den ersten Jahren werden dieselben eine grössere Summe liefern, in den spätern aber eine kleinere, als sich nach dem Sterblichkeitsgesetz für die Auszahlungen ergeben wird. Der Ueberschuss aus den früheren Jahren muss daher dazu dienen, den Ausfall in den späteren zu decken. Der jedesmalige Betrag der Reserve wird jährlich berechnet und von Zeit zu Zeit durch Berechnung nach den in der Anstalt sich ergebenden Abweichungen von dem angenommenen Sterblichkeitsgesetze berichtigt.

Der Sicherheitsfonds besteht in den jährlich angesammelten Ueberschüssen. Der reine Ueberschuss ist die Summe, welche nach Abzug aller Ausgaben und der Reserve eines Jahres, sowie der oben genannten Ueberträge von der Einnahme übrig bleibt. Er ist Eigenthum der Banktheilhaber nach dem Maassstabe der eingezahlten Prämiengelder und macht die Dividende des betreffenden Jahres aus.

Nicht jede Summe kann versichert werden. Die Gothaer Lebensversicherungs-Bank nimmt Versicherungen auf Summen zwischen 300 und 15000 Thaler (das Maximum wird jeweils vom Vorstande bestimmt) an; die Lübecker zwischen 300 und 30000 Mark, die Wiener zwischen 10 und 20000 Gulden u. s. w.

Auch die Eintrittszeit ist beschränkt. Die Gothaer Bank gestattet den Eintritt für Personen zwischen dem 15ten und 60sten Lebensjahre. Der Eintritt der Personen höhern Alters kann nur ausnahmsweise und mit Genehmigung des Bankbüreaus geschehen. Die Lübecker Bank gestattet ihn für Personen zwischen dem 10ten und 67sten; die Wiener zwischen dem 15ten und 70sten; die Frankfurter zwischen dem 1sten und 70sten Lebensjahre u. s. w. Die zu versichernden Summen müssen durch 100 theilbar, also runde Zahlen von 100 sein.

Ausserdem können Summen so auf bestimmte Jahre, jedoch nicht unter einem bestimmten Minimum versichert werden, dass die Auszahlung der versicherten Summe wie gewöhnlich erfolgt, wenn die versicherte Person innerhalb des bezeichneten Zeitraums stirbt, dass sie aber spätestens am Schlusse des letzten Jahres erfolgt, wenn sie den festgesetzten Zeitraum überlebt.

Die Prämiengelder für lebenslängliche und Ueberlebens-Versicherungen werden bis auf ein bestimmtes Jahr (das 85ste oder 90ste, letzteres bei der Gothaer Bank) berechnet und bezahlt.

Die Prämienzahlung hört auf, wenn die versicherte Person das genannte Alter erreicht hat, und es erfolgt sofort die Auszahlung der Versicherungssumme.

Das Aufhören oder der Verlust einer Versicherung ist an bestimmte Bedingungen geknüpft und erfolgt unter den durch die Statuten festgestellten Verhältnissen in gewissen Fällen von selbst. Es ist jedoch auch der freiwillige Austritt aus der Gesellschaft erlaubt. In diesem Falle und in bestimmt vorhergesehenen wird bei lebenslänglichen Versicherungen dem Inhaber einer Police gegen deren Rückgabe eine besondere, nach festgestellten Grundsätzen zu berechnende Vergütung aus dem Reservefonds der Anstalt, unbeschadet seiner Ansprüche auf die für Versicherungen vorhandenen Dividenden-Antheile, gewährt.

§. 78.

Werthbestimmung einer Leibrente für eine Person von bestimmtem Alter.

Auf die im vorigen Paragraphen gegebenen Prämissen sind die hierher gehörigen Berechnungen zu gründen. Sie beruhen, wie sich diess später zeigen wird, vorzüglich auf der Werthbestimmung der Leibrenten.

Unter Leibrente versteht man nämlich eine bestimmte Summe (K), welche so lange jährlich ausgezahlt wird, als eine Person von bestimmtem Alter lebt und deren Auszahlung aufhört, wenn dieselbe stirbt.

Am einfachsten wird man den Werth einer Leibrente bestimmen, wenn man von dem zu deckenden Bedürfnisse einer Anstalt ausgeht, welche es unternimmt, irgend einer Anzahl von Personen, welche nach ihrem Alter demselben Jahre angehören, eine derartige Rente zu gewähren.

Bezeichnet man die Zahl der demselben Jahre angehörigen Personen durch A_a ($a$jährigen Personen), und legt hiebei eine bestimmte Sterblichkeitstafel zu Grunde, so dass die Zahl der Personen, welche am Ende des 1sten, 2ten, 3ten .... Jahres u. s. w. bis zur äussersten Lebensgrenze noch am Leben sind, der Reihe nach durch

$$1)\qquad A_{a+1},\quad A_{a+2},\quad A_{a+3},\ldots.\ A_{a+u}$$

zu bezeichnen sind, so hat die Anstalt am Ende der genannten Jahre folgende Summen auszuzahlen, wenn jede noch lebende Person die Rente K jährlich geniessen will:

$$A_{a+1}.K, \quad A_{a+2}.K, \quad A_{a+3}.K, \ldots . A_{a+u}.K.$$

Rabattirt man diese Summen der Zeit entsprechend bei dem Zinsfuss p, so ist der gegenwärtige Werth der zur Deckung des Bedürfnisses erforderlichen Summe:

$$2) \qquad R = \frac{A_{a+1}.K}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}.K}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}.K}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{A_{a+u}.K}{1{,}0p^u}.$$

Diesen Werth haben die sich betheiligenden Personen in die Casse zu zahlen. Nennt man nun die Summe, welche jeder einzulegen hat, E_a, so beträgt ihre Gesammt-Einlage, da jeder sich für die gleiche Summe betheiligt, $E_a.A_a$. Hieraus und aus 2) ergibt sich die Gleichung:

$$E_a.A_a = R = \left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right) K,$$

also:

$$3) \qquad E_a = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right).$$

Setzt man, was gewöhnlich geschieht, $K = 1$, so stellt sich der Werth einer Leibrente von dem jährlichen Betrage 1 für eine $a$jährige Person, die durch L_a bezeichnet werden soll, auf folgende Weise dar:

$$4) \quad L_a = \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right) = \frac{1}{A_a} \Sigma_1^u \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u},$$

wenn nach dem Sammelzeichen (Σ) allmälig $u = 1, 2, 3 \ldots . u$ gesetzt wird.

Aus 4) kann man auf jeden beliebigen Werth der Leibrente (K) übergehen, wenn der Ausdruck mit K multiplicirt wird. Auch kann in No. 4) statt a jeder andere Werth $a + n$ gesetzt werden. Es ändert sich nur die Form und es entsteht für den Werth 1:

$$5) \qquad L_{a+n} = \frac{1}{A_{a+n}}\left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^2} + \ldots . \frac{A_{a+n+u}}{1{,}0p^u}\right).$$

§. 79.

Verschiedene Arten von Leibrenten.

Man unterscheidet zwischen **aufhörenden**, **aufgeschobenen** und **temporären** Leibrenten, und versteht unter einer **aufhörenden** Leibrente eine solche, welche mit dem Ende des ersten Jahres für eine $a$jährige Person beginnt und n Jahre dauert;

unter einer **aufgeschobenen** eine solche, welche erst nach Umfluss von m Jahren beginnt und bis zur Lebensgrenze dauert; unter einer **temporären** eine solche, welche nach Umfluss von m Jahren beginnt und n Jahre dauert.

Die Werthe dieser Leibrenten lassen sich nach dem Inhalt des §. 78. leicht bestimmen.

Beginnt eine Leibrente mit dem Ende des ersten Jahres und dauert n Jahre, so kommen die n ersten Glieder der Reihe No. 2) §. 78. in Betrachtung, und der gegenwärtige Werth des Bedürfnisses, welches die Casse zu decken hat, ist bei einer Leibrente von 1:

$$1) \qquad R = \frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}.$$

Bezeichnet man den Werth einer aufhörenden Leibrente für eine $a$jährige Person durch $L_{a;1,n}$; so ist der einmalige Beitrag einer Person, wenn sich A_a Personen betheiligen:

2)

$$L_{a;1,n} = \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right) = \frac{1}{A_a}\Sigma_1^n \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}.$$

Dieser Werth kann durch den Werth einer lebenslänglichen Leibrente nach §. 78. ausgedrückt werden. Ergänzt man nämlich den Werth der Reihe in No. 2) bis zur Lebensgrenze und zieht die zugezählten Glieder wieder ab, so erhält man:

3)

$$L_{a;1,n} = \frac{A_{a+1}}{A_a.1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{A_a.1{,}0p^2} + \dots \frac{A_{a+n}}{A_a.1{,}0p^n} + \frac{A_{a+n+1}}{A_a.1{,}0p^{n+1}}$$
$$+ \frac{A_{a+n+2}}{A_a.1{,}0p^{n+2}} \dots \frac{A_{a+u}}{A_a.1{,}0p^u}$$
$$- \frac{A_{a+n+1}}{A_a.1{,}0p^{n+1}} - \frac{A_{a+n+2}}{A_a.1{,}0p^{n+2}} - \dots - \frac{A_{a+u}}{A_a.1{,}0p^u}.$$

Die erste Reihe drückt nach No. 4) §. 78. den Werth einer lebenslänglichen Leibrente L_a aus. Multiplicirt und dividirt man die Glieder der zweiten Reihe mit A_{a+n} und zieht den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor im Nenner $A_a.1{,}0p^n$ aus der Reihe, so geht No. 3) über in:

4)

$$L_{a;1,n} = L_a - \frac{A_{a+n}}{A_a.1{,}0p^n}\cdot\frac{1}{A_{a+n}}\left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{A_{a+n+u}}{1{,}0p^u}\right).$$

Die Reihe in dieser Darstellung drückt nach 5) §. 78. gleichfalls den Werth einer lebenslänglichen Leibrente aus. Führt man diesen Werth ein, so ergibt sich aus No. 4) der gesuchte Werth für eine aufhörende Leibrente auf folgende Weise:

$$5) \qquad L_{a;\,1,n} = L_a - \frac{A_{a+n}}{A_a \cdot 1{,}0p^n} L_{a+n}.$$

Soll der Werth einer aufgeschobenen, nach Umfluss von m Jahren beginnenden und bis zur Lebensgrenze dauernden Leibrente bestimmt werden, so kommen die Glieder der Reihe in No. 2) oder No. 4) §. 78. vom $(m+1)$ten an in Betrachtung.

Der gegenwärtige Werth des Bedürfnisses der Casse ist daher:

$$6) \qquad R = \frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \frac{A_{a+m+3}}{1{,}0p^{m+3}} + \ldots \frac{A_{a+m+n}}{1{,}0p^{m+n}}$$

$$= \frac{1}{1{,}0p^m}\left(\frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+m+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+m+n}}{1{,}0p^n}\right).$$

Da dieser Betrag durch A_a Theilnehmer gedeckt werden muss, so ergibt sich sofort der Beitrag des einzelnen, wenn der Werth der aufgeschobenen Leibrente durch $L_{a,m}$ bezeichnet wird, durch

7)

$$L_{a,m} = \frac{1}{A_a \cdot 1{,}0p^m}\left(\frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+m+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+m+n}}{1{,}0p^n}\right).$$

Durch Multiplikation und Division mit A_{a+m} kann auch diese Reihe durch eine lebenslängliche Leibrente nach No. 5) §. 78. ausgedrückt werden. No. 7) erhält dann folgende Form:

8)

$$L_{a,m} = \frac{A_{a+m}}{A_a \cdot 1{,}0p^m} \cdot \frac{1}{A_{a+m}}\left(\frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{A_{a+m+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

$$= \frac{A_{a+m}}{A_a \cdot 1{,}0p^m} \cdot L_{a+m}.$$

Die Werthbestimmung einer temporären Leibrente ergibt sich auf gleiche Weise, denn es werden hiezu n auf einander folgende Glieder vom $(m+1)$ten Gliede an in der Reihe No. 2) oder No. 4) §. 78. nöthig. Der gegenwärtige Werth des von der Casse zu deckenden Bedürfnisses ist daher:

$$9) \qquad R = \frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \frac{A_{a+m+3}}{1{,}0p^{m+3}} + \ldots \frac{A_{a+m+n}}{1{,}0p^{m+n}}.$$

Der Beitrag für den einzelnen Theilnehmer, der durch $L_{a;m,n}$ bezeichnet werden soll, ist:

10)

$$L_{a;m,n} = \frac{1}{A_a . 1{,}0p^m}\left(\frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+m+3}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{A_{a+m+n}}{1{,}0p^n}\right).$$

Durch Multiplikation und Division mit A_{a+m} kann man diese Darstellung nach No. 2) auf den Werth einer aufhörenden Leibrente für eine $(a+m)$jährige Person zurückbringen, denn es entsteht:

11)

$$L_{a;m,n} = \frac{A_{a+m}}{A_a . 1{,}0p^m} \cdot \frac{1}{A_{a+m}}\left(\frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{A_{a+m+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

$$= \frac{A_{a+m}}{A_a . 1{,}0p^m} L_{a+m;1,n}.$$

Man kann nun auch hier verfahren wie in No. 1)—5) geschah, die fehlenden Glieder der Reihe ergänzen und dann wieder abziehen. Einfacher ergibt sich die Sache, wenn man den Werth von $L_{a+m;1,n}$ nach No. 5) behandelt und $a+m$ statt a schreibt. Es entsteht:

$$L_{a+m;1,n} = L_{a+m} - \frac{A_{a+m+n}}{A_{a+m} . 1{,}0p^m} L_{a+m+n}.$$

Wird dieser Werth in No. 11) eingeführt, so ergibt sich zur Werthbestimmung einer temporären Leibrente folgende Gleichung:

12)
$$L_{a;m,n} = \frac{A_{a+m}}{A_a . 1{,}0p^m}\left(L_{a+m} - \frac{A_{a+m+n}}{A_{a+m} . 1{,}0p^n} L_{a+m+n}\right)$$

$$= \frac{A_{a+m}}{A_a . 1{,}0p^m} L_{a+m} - \frac{A_{a+m+n}}{A_a . 1{,}0p^{m+n}} L_{a+m+n}.$$

Hiernach sind die Werthe der verschiedenen Arten von Leibrenten sämmtlich auf die Werthe lebenslänglicher Leibrenten zurückgebracht, und man hat es nur mit den letztern zu thun.

§. 80.

Methoden für die Werthberechnung der Leibrenten.

Bei Auswerthung der Leibrenten für Personen der verschiedenen Lebensalter hat man eine bestimmte Sterblichkeitstafel zu Grunde zu legen, hieraus nach den in §. 78. und §. 79. gefundenen Gleichungen zu verfahren, und die fraglichen Werthe für

die sämmtlichen Jahre einer Sterblichkeitstafel zu berechnen, um sie weiter benutzen zu können.

Liesse sich die Zahl der Lebenden aus einem bestimmten Gesetze ableiten, so würde diess die Werthberechnung der Leibrenten sehr erleichtern. Diess ist aber nicht der Fall, daher wird die Ermittelung dieser Werthe für eine grosse Gliederanzahl der fraglichen Reihe sehr mühevoll. Man kann jedoch bei Ausführung der nöthig werdenden Rabattirungen manche Erleichterung anbringen.

Es gibt jedoch schon gefertigte Leibrententafeln, wodurch man der Mühe der Rechnung überhoben ist.

Zu den bekannteren ältern Tafeln gehören die, welche auf der zu Northampton beobachteten Sterblichkeits-Ordnung beruhen und von allen Lebensversicherungs-Anstalten in London benutzt werden, dann die von Deparcieux. Zu den neuern gehören die von Brune, berechnet von Hattendorf (Leibrenten und Lebensversicherungen von D. Jones. Deutsch bearbeitet von K. Hattendorf. Hannover 1859), dann eine von Herrn M. Kasten in Frankfurt berechnete und mir mitgetheilte, die sich auf die von Finlaison angegebene Sterblichkeits-Ordnung gründet.

Von den Methoden, deren man sich zur Berechnung der Leibrenten bedienen kann, werden hier folgende angeführt:

Erste Methode. Sie besteht in der direkten Berechnung der in No. 4) §. 78. angegebenen Gleichung. Zu dem Ende hat man in die Formel

$$1)\qquad L_a = \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

bei einem bestimmten Zinsfuss die Werthe der A nach einer gewählten Sterblichkeits-Ordnung und für $1{,}0p$ einzuführen, jedes einzelne Glied zu berechnen und sie in eine Summe zu vereinigen.

Hiernach ist der Werth einer Leibrente für einen 89jährigen Mann nach Finlaison bei 3 Procent:

$$L_{89} = \frac{1}{A_{89}}\left(\frac{A_{90}}{1{,}03} + \frac{A_{91}}{1{,}03^2} + \frac{A_{92}}{1{,}03^3} + \frac{A_{93}}{1{,}03^4} + \frac{A_{94}}{1{,}03^5}\right)$$

$$= \frac{1}{17}\left(\frac{11}{1{,}03} + \frac{7}{1{,}03^2} + \frac{4}{1{,}03^3} + \frac{3}{1{,}03^4} + \frac{1}{1{,}03^5}\right).$$

Es ist:

$$11 . 1{,}03^{-1} = 11 . 0{,}9708737 = 10{,}6796116$$
$$7 . 1{,}03^{-2} = 7 . 0{,}9425959 = 6{,}5981714$$
$$4 . 1{,}03^{-3} = 4 . 0{,}9151417 = 3{,}6605666$$
$$3 . 1{,}03^{-4} = 3 . 0{,}8884870 = 2{,}6654611$$
$$1 . 1{,}03^{-5} = 1 . 0{,}8626088 = 0{,}8626088$$
$$24{,}4664195$$

2) $$L_{89} = \frac{24{,}4664195}{17} = 1{,}43920115.$$

Diese Methode ist sehr mühevoll und zeitraubend, wie man sieht.

Zweite Methode. Eine zurücklaufende Berechnungsweise erhält man dadurch, dass man aus No. 1) das erste Glied $\frac{A_{a+1}}{1{,}0p}$ innerhalb der Klammer scheidet. Es entsteht:

3)

$$L_a = \frac{A_{a+1}}{A . 1{,}0p}\left[1 + \frac{1}{A_{a+1}}\left(\frac{A_{a+2}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+4}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^{n-1}}\right)\right]$$
$$= \frac{A_{a+1}}{A_a . 1{,}0p}(1 + L_{a+1}),$$

wie sich diess aus No. 5) §. 78. ergibt, wenn man $n = 1$ setzt.

Ist nun der Werth einer Leibrente für eine $(a+1)$jährige Person gefunden, so kann man daraus den für eine um ein Jahr jüngere Person durch Ausführung der in No. 3) angezeigten Geschäfte finden. So ist der Werth einer Leibrente für einen 88jährigen Mann nach Finlaison:

4)

$$L_{88} = \frac{A_{89}}{A_{88} . 1{,}03}(1 + L_{89}) = \frac{17}{24 . 1{,}03}(1 + 1{,}43920115) = \frac{41{,}46641955}{24 . 1{,}03}$$
$$= 1{,}677444415.$$

Ein einmal begangener Fehler schleppt sich in den darzustellenden Werthen weiter. Es wird daher zweckmässig sein, nach einer andern Methode von Zeit zu Zeit eine Controle vorzunehmen.

Dritte Methode. Man beginne mit dem letzten Gliede A_{a+n}, rabattire mit $1{,}0p$, zähle hinzu die Zahl der im vorhergehenden Jahre lebenden Personen (A_{a+n-1}), rabattire die erhaltene Summe mit $1{,}0p$, fahre so fort und theile schliesslich mit der betreffenden Zahl der Personen A_a. Diess Verfahren stellt scih auf folgende Weise dar:

5)

$$L_a = \left(\left(\ldots\left(\frac{A_{a+u}}{1,0p} + A_{a+u-1}\right)\frac{1}{1,0p} + A_{a+u-2}\right)\frac{1}{1,0p} + \ldots + A_{a+1}\right)\frac{1}{1,0p\,A_a}.$$

Diese Methode hat den Vortheil, dass man mit jedem Gliede abbrechen, die schon erhaltenen Werthe benutzen und der Reihe nach allmälig die Werthe der Leibrenten für jedes Alter einer Sterblichkeits-Ordnung berechnen kann. So ist unter der oben angegebenen Voraussetzung:

6)

$$L_{93} = \frac{1}{1,03}\cdot\frac{1}{3} = \frac{0,9708738}{3} = 0,3236245,$$

$$L_{92} = \left(\frac{1}{1,03} + 3\right)\frac{1}{1,03.4} = \frac{3,97087378}{4.1,03} = \frac{3,85521726}{4} = 0,96380431,$$

$$L_{91} = \left(\left(\frac{1}{1,03} + 3\right)\frac{1}{1,03} + 4\right)\frac{1}{1,03.7} = \frac{4 + 3,85521726}{7.1,03} = \frac{7,62642453}{7}$$

$$= 1,08948921,$$

$$L_{90} = \left(\left(\left(\frac{1}{1,03} + 3\right)\frac{1}{1,03} + 4\right)\frac{1}{1,03} + 7\right)\cdot\frac{1}{1,03.11} = \frac{7 + 7,62642453}{11.1,03}$$

$$= \frac{14,20041216}{11} = 1,29094656,$$

$$L_{89} = (14,20041216 + 11)\,\frac{1}{1,03.17} = \frac{24,46641967}{17} = 1,43920115$$

u. s. w. Führt man, wie hier geschehen, die Rechnung mit der Division durch 1,03 aus, so hat man eine grosse Zahl von Decimalstellen nöthig, um die früheren Werthe richtig zu erhalten. Es wird daher die Rechnung mit Logarithmen hier vorzuziehen sein, was eine Erleichterung gewährt, da man ausser den Zahlen der Lebenden nur den Logarithmen von $1,03^{-1}$ bedarf. Um sicher zu gehen, kann man gleichzeitig die zweite Methode benutzen.

Vierte Methode. Wird die Reihe No. 1) mit $1,0p^u$ multiplicirt und dividirt, oder, was dasselbe ist, wird der Divisor $\frac{1}{1,0p^u}$ aus der Klammer geschieden, so entsteht:

7)

$$L_a = \frac{1}{A_a.1,0p^u}(A_{a+1}.1,0p^{u-1} + A_{a+2}.1,0p^{u-2} + \ldots A_{a+u-1}.1,0p + A_{a+u}).$$

Vergleicht man hiermit den Werth der Leibrente für eine $(a+1)$jährige Person, so entsteht:

8) $$L_{a+1} = \frac{1}{A_{a+1}.1,0p^{u-1}}(A_{a+2}.1,0p^{u-2} + A_{a+3}.1,0p^{u-3} + .. A_{a+u-1}.1,0p + A_{a+u})$$

In beiden Reihen sind die $(u-1)$ letzten Glieder einander gleich. Man kann daher von 8) auf 7) übergehen. Zu dem Ende hat man zu der Summe, welche die Glieder der eingeschlossenen Reihe in No. 8) bilden, $A_{a+1}.1,0p^{u-1}$ zu zählen und dann mit dem vorgeschriebenen Divisor zu theilen.

Um die Leibrenten für eine bestimmte Sterblichkeitstafel zu erhalten, hat man also die verschiedenen Summen der Reihe

$$A_{a+u} + A_{a+u-1}.1,0p + A_{a+u-2}.1,0p^2 + A_{a+u-3}.1,0p^3 + \ldots.$$

zu bilden und die angezeigte Division bei jeder einzelnen Summe zu machen. Da diese Methode hauptsächlich auf Multiplikationen beruht, so lässt sie sich leicht durchführen, wenn man im Besitze von Multiplikationstafeln ist. Die Werthe von $1,0p^n$ und $1,0p^{-n}$ sind den bekannten Tafeln zu entnehmen. Zudem gewährt die Methode den Vortheil, dass sich ein bei der Division begangener Fehler nicht fortschleppt und die Summirung der Reihe sich leicht controliren lässt, man also bei einiger Aufmerksamkeit gegen die Gefahr des Fehlens geschützt ist. Man kann für die nöthig werdenden Geschäfte eine besondere Tabelle entwerfen in nachstehender Weise, wozu die Sterblichkeitstafel von Finlaison benutzt ist:

Alter	Zahl der Lebenden A_a	$1,03^{-n}$	$1,03^n$	S	Werth der Leibrente
94	1				
93	3	0,970873786	1,03	1	0,3236246
92	4	0,942595909	1,0609	4,09	0,9638943
91	7	0,915141659	1,092727	8,3336	1,0894892
90	11	0,888487048	1,12550881	15,982689	1,2909466
89	17	0,862608784	1,159274074	28,363285491	1,4392015
88	24	0,837484257	1,194052297	48,070945168	1,6774441
87	34	0,813091511	1,229873865	76,728200296	1,8349132
86	44	0,789409234	1,266770081	118,543911706	2,1268108
85	56	0,766416732	1,304773184	174,281795270	2,3852228
84	68	0,744093915	1,343916379	247,349093574	2,7066317

Die Werthe der fünften Reihe (S) findet man, wenn man die

Werthe der zweiten (A_n) und der vierten ($1,03^n$) vorhergehenden Horizontalreihe multiplicirt und zu der Zahl in derselben fünften Horizontalreihe addirt. So ist die Zahl (S) in der vierten Horizontalreihe:

$$8,3336 = 4.1,0609 + 4,09 = 4,2436 + 4,09.$$

Die Werthe der Leibrenten findet man, wenn man den Werth in der fünften Reihe mit dem Werthe in der dritten gleichen Horizontalreihe multiplicirt und durch die Zahl der zweiten gleichen Horizontalreihe theilt. So ist:

$$L_{91} = \tfrac{1}{7}.1,03^{-3}(4.1,03^2 + 3.1,03 + 1) = \tfrac{1}{7}.1,03^{-3}.8,3336$$

$$= \frac{0,9151416 59.8,3336}{7} = \frac{7,626424529}{7} = 1,0894892.$$

Die eben mitgetheilte Methode empfiehlt sich, wie man sieht, als eine bequeme, sehr förderende und sichere Methode und verdient vor den übrigen wohl den Vorzug.

Sind die Werthe der lebenslänglichen Leibrenten für eine bestimmte Sterblichkeitstafel bekannt, so ergeben sich die für aufhörende, aufgeschobene und temporäre nach §. 79. ohne Schwierigkeit.

§. 81.

Werthbestimmung einer Leibrente, welche so lange gezählt wird, als zwei Personen von bestimmtem Alter sich am Leben befinden.

Soll der Werth einer Leibrente bestimmt werden, welche so lange jährlich mit der Summe 1 ausgezahlt wird, als zwei Personen, wovon die eine a, die andere b Jahre alt ist, zusammen leben, so wird folgende Methode zum Ziele führen.

Da die Leibrente nur ausgezahlt wird, wenn beide Personen sich noch am Leben befinden, so hat man die Fälle zu bestimmen, in welchen dies Ereigniss eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die fraglichen Personen am Ende des ersten, zweiten, dritten,.... Jahres bis zur Lebensgrenze zusammen leben, beruht auf der Verbindung der Wahrscheinlichkeit, dass jede einzelne Person am Ende der genannten Jahre noch lebt. Die Wahrscheinlichkeiten für das fragliche Zusammenleben stellen sich der Reihe nach durch folgende Ausdrücke dar:

$$\frac{A_{a+1}.A_{b+1}}{A_a.A_b},\ \frac{A_{a+2}.A_{b+2}}{A_a.A_b},\ \frac{A_{a+3}.A_{b+3}}{A_a.A_b},\ \ldots \frac{A_{a+n}.A_{b+n}}{A_a.A_b}.$$

In jedem dieser Fälle muss die Summe 1 gezahlt werden. Da aber diese Werthe erst im Laufe der Zeit gezahlt werden müssen, so hat man zur Bestimmung des gegenwärtigen Werthes dieser Summen sämmtliche Glieder der Zeit entsprechend bei dem Zinsfuss p zu rabattiren. Bezeichnet man nun den Werth einer Leibrente für zwei verbundene Leben nach dem Vorgange des frühern durch L_{ab}, so erhält man hiefür folgende Bestimmung, wenn man den gemeinschaftlichen Divisor $A_a.A_b$ ausscheidet:

1)

$$L_{ab} = \frac{1}{A_a.A_b}\left(\frac{A_{a+1}.A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}.A_{b+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}.A_{b+3}}{1{,}0p^3} \ldots \frac{A_{a+n}.A_{b+n}}{1{,}0p^n}\right).$$

Das hier gefundene Gesetz tritt deutlich hervor und charakterisirt sich ganz in derselben Weise, wie dasjenige, welches nach §. 78. No. 4) zur Werthbestimmung für eine einzige Person gilt.

Auf dieselbe Weise bestimmen sich auch die Werthe für zwei verbundene Leben für die in §. 79. aufgeführten besondern Leibrenten.

Der Werth einer aufhörenden Leibrente für das Zusammenleben zweier Personen von dem Alter a und b ist dann nach §. 79. No. 2) und No. 5):

2)

$$L_{ab;1,n} = \frac{1}{A_a.A_b}\left(\frac{A_{a+1}.A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}.A_{b+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{A_{a+n}.A_{b+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

$$= L_{ab} - \frac{A_{a+n}.A_{b+n}}{A_a A_b.1{,}0p^n} L_{(a+n)(b+n)}.$$

Der Werth einer aufgeschobenen Leibrente ist nach §. 79. No. 7) und No. 8):

3)

$$L_{ab,m} = \frac{1}{A_a.A_b.1{,}0p^m}\left(\frac{A_{a+m+1}.A_{b+m+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+m+2}.A_{b+m+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \frac{A_{a+m+n}.A_{b+m+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

$$= \frac{A_{a+m}.A_{b+m}}{A_a.A_b.1{,}0p^m} L_{(a+m)(b+m)};$$

der einer temporären ist nach §. 79. No. 11) und No. 12):

4)

$$L_{ab;\,m,n}=\frac{1}{A_a.A_b.1{,}0p^m}\left(\frac{A_{a+m+1}.A_{b+m+1}}{1{,}0p}+\frac{A_{a+m+2}.A_{b+m+2}}{1{,}0p^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\frac{A_{a+m+n}.A_{b+m+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

$$=\frac{A_{a+m}.A_{b+m}}{A_a.A_b.1{,}0p^m}L_{(a+m)(b+m)}-\frac{A_{a+m+n}.A_{b+m+n}}{A_a.A_b.1{,}0p^{m+n}}L_{(a+m+n)(b+m+n)}.$$

Die Werthberechnung dieser Leibrenten kann nach den in §. 80. angegebenen Methoden geschehen. Sie ist aber viel mühevoller und weit ausgedehnter wegen der vielen möglichen Combinationen, als die der Leibrenten für einzelne Leben.

§. 82.

Werthbestimmung lebenslänglicher Versicherungen.

Auch hier gelangt man am Einfachsten zum Ziele, wenn man von dem Bedürfnisse der Casse ausgeht. Bezeichnet man die Zahl der Personen, welche nach einer bestimmten Sterblichkeitstafel im $a$ten, $(a+1)$ten, $(a+2)$ten Jahre u. s. f. sterben, der Reihe nach durch

$$M_a,\quad M_{a+1},\quad M_{a+2},\quad M_{a+3}+\ldots,$$

und nimmt man an, dass sämmtliche $a$jährige Personen (A_a) zusammentreten, um für den Fall des Todes mit der Summe K ihr Leben zu versichern, so hat die Casse am Ende der genannten Jahre folgende Summen zu zahlen:

$$M_a.K,\quad M_{a+1}.K,\quad M_{a+2}.K,\quad M_{a+3}.K\ldots.M_{a+u}.K.$$

Der gegenwärtige Werth sämmtlicher Summen ist bei p Procent:

$$1)\qquad R=\frac{M_a.K}{1{,}0p}+\frac{M_{a+1}.K}{1{,}0p^2}+\frac{M_{a+2}.K}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{M_{a+u}.K}{1{,}0p^{u+1}}.$$

Da sich A_a Personen hiebei betheiligen, so muss jede den gleichen Betrag hieran zahlen. Bezeichnet man denselben mit E_a, so haben die Theilnehmer die Summe $E_a.A_a$ zu hinterlegen. Diese Summe muss dem in No. 1) angegebenen Werthe gleich sein. Hiernach ist der einmalige Beitrag für den einzelnen Theilnehmer:

$$2)\qquad E_a=\frac{K}{A_a}\left(\frac{M_a}{1{,}0p}+\frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2}+\frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{M_{a+u}}{1{,}0p^{u+1}}\right).$$

Diesen Werth kann man nach einer der in §. 80. angegebenen Methoden berechnen, wenn man die Zahl der in den einzelnen Jahren sterbenden Personen einführt. Man kann jedoch den Werth der vorstehenden Reihe auch durch Leibrenten darstellen. Die Zahl der in einem bestimmten Jahre Sterbenden findet man, wenn man die Zahl der am Ende des Jahres noch Lebenden von der Zahl der am Anfang desselben Jahres Lebenden abzieht. Hiernach ist:

$$3)\qquad M_{a+n} = A_{a+n} - A_{a+n+1}.$$

Setzt man nun der Reihe nach 0, 1, 2, 3,.... statt n in 3) und führt die hiedurch entstehenden Werthe in die Reihe No. 2) ein, so gewinnt man folgende zwei Reihen:

$$4)\qquad E_a = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_a}{1{,}0p} + \frac{A_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^3} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^4} \cdots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^{n+1}}\right)$$

$$- \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right).$$

Offenbar drückt die negative Reihe nach §. 78. den Werth einer lebenslänglichen Leibrente aus. Die Glieder der positiven Reihe lassen sich gleichfalls auf eine solche zurückbringen, wenn man $\frac{1}{1{,}0p}$ ausscheidet. Geschieht diess, so geht die vorstehende Darstellung in folgende über:

$$5)\qquad E_a = K.\left[\frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{A_a.1{,}0p}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right)\right] - K.L_a$$

$$= K\left[\frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p} L_a - L_a\right].$$

Der einmalige Beitrag bestimmt sich nach den nöthigen Reductionen hieraus durch folgende Gleichung:

$$6)\qquad E_a = K.\frac{100 - pL_a}{100 + p} = K.\frac{1 - 0{,}0pL_a}{1{,}0p}.$$

Nimmt man auch hier die Versicherungssumme zur Einheit an, $K = 1$, von der man auf jeden beliebigen Betrag übergehen kann, so ist:

$$7)\qquad E_a = \frac{100 - p.L_a}{100 + p} = \frac{1 - 0{,}0pL_a}{1{,}0p}.$$

Die Vorschrift, welche diese Formel enthält, ist leicht zu erkennen. Soll hiernach der Werth einer Versicherungssumme 1

für eine 30jährige Person nach Finlaison bei 3 Procent bestimmt werden, so ist die einmalige Einkaufssumme:

$$E_{30} = \frac{100 - 3 . L_{30}}{103} = \frac{100 - 3 . 19,0473528}{103} = 0,4160965.$$

Nach der Sterblichkeitstafel von Northampton ist sie:

$$E_{30} = \frac{100 - 3 . 16,922}{103} = \frac{49,234}{103} = 0,47800.$$

Nach der Sterblichkeitstafel von Deparcieux:

$$E_{30} = \frac{100 - 3 . 19,492}{103} = \frac{41,524}{103} = 0,40315.$$

Nach der von Brune:

$$E_{30} = \frac{100 - 3 . 19,1778}{103} = \frac{42,4666}{103} = 0,412296.$$

Man sieht wie nahe die Werthe von Brune und Finlaison zusammenkommen. Ihnen nähert sich der nach Deparcieux, während die Tafel von Northampton einen viel grössern Werth giebt, was von der grössern Sterblichkeit herrührt.

§. 83.

Werthbestimmung für Versicherungssummen auf bestimmte Zeit (kurze Versicherungen).

Die hier zu beantwortende Frage stellt sich auf folgende Weise dar: Eine $a$jährige Person will ihr Leben mit irgend einer Summe (K) unter der Bedingung auf irgend eine Anzahl (n) auf einander folgender Jahre versichern, dass diese Summe ausgezahlt wird, wenn sie im Laufe dieser Jahre stirbt. Wie gross ist die hiefür einzuzahlende Summe?

Die vorliegende Frage beantwortet sich auf die in §. 82. angegebene Weise, wenn man die in No. 1) und No. 2) §. 82. gegebene Darstellung auf n Glieder beschränkt. Hiernach bestimmt sich der Werth der Kaufsumme, die mit $E_{a;1,n}$ bezeichnet werden soll, wenn die Versicherungssumme 1 ist, durch

$$1)\quad E_{a;1,n} = \frac{1}{A_a}\left(\frac{M_a}{1,0p} + \frac{M_{a+1}}{1,0p^2} + \frac{M_{a+2}}{1,0p^3} + \ldots \frac{M_{a+n-1}}{1,0p^n}\right).$$

Zerlegt man nun die Glieder in der Klammer nach No. 4), 5) und 6) §. 82. in zwei Reihen, so entsteht aus der vorstehenden Gleichung:

$$2)\quad E_{a;1,n} = \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p.A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$

$$-\frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

$$= \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p} L_{a;1,n-1} - L_{a;1,n},$$

denn beide Reihen in No. 2) bezeichnen nach §. 79. No. 2) aufhörende Leibrenten. Nun ist nach No. 5) §. 79.:

$$L_{a;1,n-1} = L_a - \frac{A_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}} L_{a+n-1},$$

$$L_{a;1,n} = L_a - \frac{A_{a+n}}{A_a.1{,}0p^n} L_{a+n}.$$

Werden diese Werthe in 2) eingeführt, so erhält man:

3)

$$E_{a;1,n} = \frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p}\left(L_a - \frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}\right) - L_a + \frac{A_{a+n}.L_{a+n}}{A_a.1{,}0p^n},$$

und hieraus nach den nöthigen Reductionen:

$$4)\quad E_{a;1,n} = \frac{1-0{,}0p.L_a}{1{,}0p} - \frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1} - A_{a+n}.L_{a+n}}{A_a.1{,}0p^n}$$

oder

$$5)\quad E_{a;1,n} = \frac{100-pL_a}{100+p} - \frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1} - A_{a+n}.L_{a+n}}{A_a.1{,}0p^n}.$$

Hiedurch ist auch die Werthbestimmung von kurzen Versicherungen auf den Werth der lebenslänglichen Leibrenten zurückgeführt. Umfasst die Zeitdauer für eine kurze Versicherung nur wenige Jahre (etwa 5 oder weniger), so wird man oft schneller zum Ziele gelangen, wenn man die Gleichung No. 1) benutzt und die Werthe für die M aus den Tafeln bestimmt und einführt. Diese bleiben nämlich bei kleinen Zeiträumen gleich, oder differiren nur wenig, so dass man dann mit Vortheil die gewöhnlichen Zinstafeln benutzen kann.

Soll hiernach die einmalige Kaufsumme einer Versicherung für eine 30jährige Person nach Finlaison bei 3 Procent berechnet werden, die 20 Jahre dauert, so erhält man aus No. 5):

6)

$$E_{30;1,20} = \frac{100-3.L_{30}}{103} - \frac{A_{49}.L_{49} - A_{50}.L_{50}}{A_{30}.1{,}03^{20}}$$

$$= \frac{100-3.19{,}0473525}{103} - \frac{570.14{,}1392877 - 561.13{,}7971049}{732.1{,}03^{20}}$$

$$= 0{,}41609652 - \frac{319{,}218255}{732.1{,}03^{20}}$$

$$= 0{,}41609652 - 0{,}1917929 = 0{,}2243036;$$

für eine Versicherung von 100 müssen daher 22,430 erlegt werden.

Sollte aber die Versicherung nur 5 Jahre dauern, so ergäbe sich aus No. 1):

$$7) \quad E_{30;1,5} = \frac{1}{732}\left(\frac{9}{1{,}03} + \frac{9}{1{,}03^2} + \frac{9}{1{,}03^3} + \frac{9}{1{,}03^4} + \frac{9}{1{,}03^5}\right)$$

$$= \frac{9}{732} \cdot \frac{1-1{,}03^{-5}}{0{,}03} = \frac{9.4{,}5797072}{732}$$

$$= 0{,}05630787 \ldots,$$

und man hätte für eine 5jährige Versicherung von 100 nur 5,630.... zu erlegen.

Für eine Versicherung, die vom 30sten bis zum 90sten Jahre dauert, ist die Kaufsumme:

$$E_{30;1,60} = \frac{100-3.L_{30}}{103} - \frac{A_{89}.L_{89} - A_{90}.L_{90}}{A_{30}.1{,}03^{60}}$$

$$= 0{,}41609652 - \frac{17.1{,}43920115 - 11{,}12909466}{732.1{,}03^{60}}$$

$$= 0{,}41609652 - \frac{10{,}2660069}{732.1{,}03^{60}} = 0{,}4160952 - 0{,}002380447$$

$$= 0{,}41371608.$$

§. 84.

Werthbestimmung einer Versicherung, welche wie gewöhnlich ausgezahlt wird, wenn die versicherte Person innerhalb *n* Jahren stirbt und spätestens am Schlusse des *n*ten Jahres ausgezahlt wird, wenn die versicherte Person den festgesetzten Zeitraum überlebt.

Da die Versicherungsbanken auch Versicherungen auf eine be-

schränkte Zeit in der Weise zulassen, dass die Versicherungssumme jedenfalls ausgezahlt wird, und zwar innerhalb derselben, wenn der Versicherte stirbt, oder am Schluss derselben, wenn er die festgesetzte Zeit überlebt, so liegt die Aufgabe vor, die Grösse der Einkaufssumme für eine solche Versicherung zu bestimmen. Für die Dauer dieser Art von Versicherungen ist gewöhnlich ein Minimum (bei der Gothaer Bank 11 Jahre) bedingt.

Erste Methode. Nimmt man an, dass eine Anzahl $a$jähriger Personen (A_a) ihr Leben auf die genannte Art zu versichern wünschen, so ist das Bedürfniss, welches die Gesellschaftskasse innerhalb n Jahren bei der Versicherungssumme 1 wegen der eintretenden Todesfälle zu decken hat:

$$1)\qquad M_a,\quad M_{a+1},\quad M_{a+2},\ldots. M_{a+n-1}.$$

Ausserdem hat die Casse noch am Schlusse des $n$ten Jahres an sämmtliche Personen, welche am Ende des $n$ten Jahres noch leben (A_{a+n}) gleichfalls die Versicherungssumme auszuzahlen. Zählt man daher zu der Reihe No. 1) noch das Glied A_{a+n} und rabattirt der Zeit entsprechend mit dem Zinsfuss p, so ergibt sich der von den A_a theilnehmenden Personen zu deckende gegenwärtige Werth des Cassenbedürfnisses durch folgende Darstellung:

$$2)\qquad R=\frac{M_a}{1{,}0p}+\frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2}+\frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3}+\ldots.\frac{M_{a+n-1}}{1{,}0p^n}+\frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}.$$

Nennt man nun die Einkaufssumme, welche jeder Theilnehmer sogleich einzulegen hat, $E_{a,n}$, so zahlen sämmtliche Theilnehmer die Summe $E_{a,n}.A_a$. Diese Summe muss dem Werthe in No. 2) gleichkommen. Hiernach bestimmt sich die Grösse der einmaligen Einkaufssumme durch:

$$3)\qquad E_{a,n}=\frac{1}{A_a}\left(\frac{M_a}{1{,}0p}+\frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2}+\frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3}+\ldots.\frac{M_{a+n-1}}{1{,}0p^n}+\frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right).$$

Löst man nun die Reihe in der Klammer nach No. 1) und No. 2) §. 83. auf, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$E_{a,n}=\frac{1}{A_a}\left(\frac{A_a}{1{,}0p}+\frac{A_{a+1}}{1{,}0p^2}+\frac{A_{a+2}}{1{,}0p^3}+\ldots.\frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^n}+\frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right.$$
$$\left.-\frac{A_{a+1}}{1{,}0p}-\frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2}-\ldots.-\frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^{n-1}}-\frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

oder

$$E_{a,n}=\frac{1}{1{,}0p}+\frac{1}{A_a.1{,}0p}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p}+\frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2}+\ldots.\frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^{n-1}}\right)$$
$$-\frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p}+\frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2}+\ldots.\frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^{n-1}}\right).$$

Hieraus entsteht nach No. 2) §. 79.:

$$4)\ E_{a,n} = \frac{1}{1,0p} + \frac{L_{a;1,n-1} - 1,0p \,.\, L_{a;1,n-1}}{1,0p} = \frac{1 - 0,0p \,.\, L_{a;1,n-1}}{1,0p}$$

$$= \frac{100 - p \,.\, L_{a;1,n-1}}{100 + p}.$$

Nun ist nach No. 5) §. 79.:

$$L_{a;1,n-1} = L_a - \frac{A_{a+n-1} \,.\, L_{a+n-1}}{A_a \,.\, 1,0p^{n-1}}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in No. 4) entsteht:

$$5)\qquad E_{a,n} = \frac{1}{1,0p}\left(1 - 0,0p\left(L_a - \frac{A_{a+n-1} \,.\, L_{a+n-1}}{A_a \,.\, 1,0p^{n-1}}\right)\right)$$

$$= \frac{1 - 0,0p \,.\, L_a}{1,0p} + \frac{0,0p \,.\, A_{a+n-1} \,.\, L_{a+n-1}}{A_a \,.\, 1,0p^n}$$

oder

$$6)\qquad E_{a,n} = \frac{100 - pL_a}{100 + p} + \frac{0,0p \,.\, A_{a+n-1} \,.\, L_{a+n-1}}{A_a \,.\, 1,0p^n}$$

$$= \frac{100 - p\left(L_a - \frac{A_{a+n-1} \,.\, L_{a+n-1}}{A_a \,.\, 1,0p^{n-1}}\right)}{100 + p}.$$

Bei der Anwendung gewährt bald die eine, bald die andere von den in No. 3), 5) und 6) gegebenen Formeln besondern Vortheil.

Zweite Methode. Zu demselben Resultate gelangt man auf folgende Weise. Will eine $a$jährige Person unter den genannten Bedingungen eine auf n Jahre dauernde Versicherung kaufen, so können folgende Fälle eintreten: die $a$jährige Person stirbt im Laufe des 1sten, 2ten, 3ten, ... $n$ten Jahres oder sie lebt noch am Schlusse des letzten. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der angedeuteten Ereignisse sind der Reihe nach:

$$\frac{M_a}{A_a},\ \frac{M_{a+1}}{A_a},\ \frac{M_{a+2}}{A_a}, \ldots\ \frac{M_{a+n-1}}{A_a},\ \frac{A_{a+n}}{A_a}.$$

Einer dieser Fälle muss eintreten. In jedem derselben wird die Versicherungssumme 1 ausgezahlt. Werden nun diese Glieder der Zeit entsprechend bei dem Zinsfuss p rabattirt, so ist der Werth der sofort zu zahlenden Kaufsumme:

$$7)\ E_{a,n} = \frac{1}{A_a}\left(\frac{M_a}{1,0p} + \frac{M_{a+1}}{1,0p^2} + \frac{M_{a+2}}{1,0p^3} + \ldots \frac{M_{a+n-1}}{1,0p^n} + \frac{A_{a+n}}{1,0p^n}\right).$$

Diese Reihe fällt mit No. 3) zusammen.

Nach diesen Gleichungen sind die Werthe der einmaligen Einkaufssummen für Versicherungen in Gesellschaften, von welchen jene am Schlusse eines bestimmten Jahres (von der Gothaer Bank am Schlusse des 90sten) ausgezahlt werden, zu berechnen.

So ist die einmalige Kaufsumme für eine Versicherungssumme 1 für einen 30jährigen Mann, die spätestens am Schlusse des 90sten Jahres gezahlt wird, nach No. 6):

$$E_{30,60} = \frac{100-3.L_{30}}{103} + \frac{0{,}03.A_{89}.L_{89}}{A_{30}.1{,}03^{60}}$$

$$= 0{,}41609652 + \frac{0{,}03.17.1{,}43920115}{732.1{,}03^{60}}$$

$$= 0{,}41609652 + \frac{0{,}00100272211}{1{,}03^{60}} = 0{,}4160965 + 0{,}000170196$$

$$= 0{,}4162667.$$

Hiernach hat ein 30jähriger Mann für eine Versicherung von 100 bei lebenslänglicher Dauer nach Finlaison (§. 82.):

$$100.E_{30} = 41{,}609652,$$

wenn sie spätestens im 90sten Jahre ausgezahlt wird:

$$100.E_{30,60} = 41{,}62667,$$

und wenn sie nur vom 30sten bis 90sten Jahre dauert (§. 83):

$$100.E_{30;1,60} = 41{,}371608$$

zu zahlen. Diese Werthe differiren sehr unbedeutend.

§. 85.

Werthbestimmung jährlicher Beiträge (Prämien) für lebenslängliche Versicherungen.

Die einmaligen Einkaufssummen, welche zur Erwerbung einer nur einigermaassen bedeutenderen Versicherungssumme erfordert werden, sind, wie man sieht, und namentlich im Falle des Eintritts in einem vorgerückteren Lebensalter, nicht ohne Belang, und würden aus diesem Grunde Personen, welche nicht über die nöthigen Mittel hiezu verfügen, dagegen jährlich kleinere Ersparnisse machen können, von dem Eintritt in die Gesellschaft abhalten.

Um nun die Theilnahme zu erleichtern, haben die Banken die sachgemässe Einrichtung getroffen, gleiche jährliche, am Anfange



des Jahres zu zahlende Beiträge statt einmaliger Einlagen zu gestatten.

Soll nun das Bedürfniss der Casse durch jährliche gleiche Beiträge statt der Auszahlung einer einmaligen Einkaufssumme gedeckt werden, und bezeichnet man die Grösse dieser Beiträge für eine $a$jährige Person durch B_a, so hat jede von den am Anfange des $a$ten Jahres lebenden Personen (A_a) diesen Beitrag, eben so die am Anfange des $(a+1)$ten lebenden (A_{a+1}), die am Anfange des $(a+2)$ten Jahres Lebenden (A_{a+2}) den gleichen Beitrag zu zahlen u. s. f. Die Gesellschaftscasse erhält daher zu Anfang der nachfolgenden Jahre folgende Summen:

$$1)\qquad B_a . A_a,\quad B_a . A_{a+1},\quad B_a . A_{a+2}, \ldots . B_a . A_{a+u}.$$

Werden diese Summen der Zeit entsprechend bei dem Zinsfuss p rabattirt, so ist der gegenwärtige Werth der in die Gesellschaftscasse fliessenden Summen:

$$2)\qquad R = B_a . A_a + \frac{B_a . A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{B_a . A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \ldots . \frac{B_a . A_{a+u}}{1{,}0p^u}.$$

Dieser Werth kommt dem in §. 82. No. 1) angegebenen, welcher das Bedürfniss der Casse bezeichnet, gleich, wenn dort $K=1$ gesetzt wird. Er ist von den A_a jetzt lebenden Personen zu decken. Daher hat jede Person den sie treffenden Antheil hiervon zu tragen, der sich auf folgende Weise bestimmt:

$$3)\qquad S = B_a\left(1 + \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right)\right) = B_a(1 + L_a),$$

nach §. 78. No. 4). Diese Summe fällt aber offenbar mit dem einmaligen Einkaufspreise für eine lebenslängliche Versicherung E_a §. 82. No. 4)—7) (für $K=1$) zusammen, denn die einmalige Einkaufssumme soll durch jährliche gleiche Beiträge ersetzt werden. Daher ist:

$$4)\qquad E_a = B_a(1 + L_a).$$

Hieraus bestimmt sich nun der jährliche Beitrag für eine lebenslängliche Versicherungssumme 1 durch:

$$5)\qquad B_a = \frac{E_a}{1 + L_a},$$

oder wenn der Werth aus No. 7) §. 82. für E_a gesetzt wird:

$$6)\qquad B_a = \frac{100 - pL_a}{(100+p)(1+L_a)} = \frac{1 - 0{,}0p . L_a}{1{,}0p(1+L_a)}.$$

Hiernach ist der jährliche Beitrag eines 30jährigen Mannes für eine lebenslängliche Versicherungssumme 1 nach Finlaison:

$$B_{30}=\frac{100-3.19{,}047352}{103(1+19{,}047352)}=\frac{0{,}4160965}{20{,}04735}=0{,}020756,$$

für eine Versicherungssumme von 100 müsste daher ein jährlicher Beitrag von 2,075 gezahlt werden. Die Banken fordern höhere Beiträge.

§. 86.

Werthbestimmung des jährlichen Beitrags für kurze Versicherungen.

Soll die Versicherung nur eine beschränkte Zahl von Jahren (n) umfassen, so bestimmt sich der jährliche Beitrag auf gleiche Weise wie in §. 85., und man hat nur n Glieder in den Reihen No. 1) — 3) in Calcul zu nehmen. Bezeichnet man den jährlichen Beitrag in Uebereinstimmung mit dem frühern durch $B_{a;1,n}$, so ergibt sich aus No. 3) §. 85. hiefür:

1)

$$S=B_{a;1,n}\left(1+\frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p}+\frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2}+\frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^{n-1}}\right)\right)$$

$$=B_{a;1,n}(1+L_{a;1,n-1})=B_{a;1,n}\left(1+L_a-\frac{A_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}.L_{a+n-1}\right),$$

nach No. 5) §. 79.

Dieser Werth fällt mit dem einer einmaligen Einkaufssumme für eine kurze Versicherung $E_{a;1,n}$ nach §. 83. No. 1) und 2), der in jährliche Beiträge umgewandelt werden soll, zusammen. Es ist daher:

2) $$E_{a;1,n}=B_{a;1,n}(1+L_{a;1,n-1}),$$

also:

3) $$B_{a;1,n}=\frac{E_{a;1,n}}{1+L_{a;1,n-1}}=\frac{E_{a;1,n}}{1+L_a-\dfrac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}}.$$

Wird nun der Werth aus No. 4) oder 5) §. 83. für $E_{a;1,n}$ eingeführt, so entsteht:

4) $$B_{a;1,n}=\frac{\dfrac{100-pL_a}{100+p}-\dfrac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}-A_{a+n}.L_{a+n}}{A_a.1{,}0p^n}}{1+L_a-\dfrac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}}.$$

Ist die Zahl der Jahre für eine kurze Versicherung nicht gross, so kann man mit Vortheil die ursprünglichen Reihen, woraus die vorstehenden Formeln abgeleitet wurden, statt letzterer setzen. Dann ist:

5)

$$B_{a;1,n}=\frac{M_a.1{,}0p^{-1}+M_{a+1}.1{,}0p^{-2}+M_{a+2}.1{,}0p^{-3}\ldots M_{a+n-1}.1{,}0p^{-n}}{A_a+A_{a+1}.1{,}0p^{-1}+A_{a+2}.1{,}0p^{-2}\ldots A_{a+n-1}.1{,}0p^{-n+1}}.$$

Soll hiernach für einen 30jährigen Mann der Werth einer Versicherung auf 5 Jahre nach Finlaison bestimmt werden, so ist aus No. 3) und aus No. 7) §. 83.:

$$B_{30;1,5}=\frac{E_{30;1,5}}{1+L_{30;1,4}}=\frac{0{,}0563078}{4{,}60481}=0{,}012228,$$

und aus No. 5):

$$B_{30;1,5}=\frac{9.1{,}03^{-1}+9.1{,}03^{-2}+9.1{,}03^{-3}+9.1{,}03^{-4}+9.1{,}03^{-5}}{732+723.1{,}03^{-1}+714.1{,}03^{-2}+705.1{,}03^{-3}+696.1{,}03^{-4}}$$

$$=\frac{41{,}217364}{3370{,}726}=0{,}012228.$$

Für die Versicherungssumme von 100 bei 5jähriger Dauer ist daher jährlich 1,2228 statt der einmaligen Kaufsumme 5,630 zu zahlen. In der Gothaer Bank beträgt dieser Beitrag 1,45.

§. 87.

Werthbestimmung des jährlichen Beitrags für eine Versicherung von beschränkter Dauer (auf n Jahre), wenn die Versicherungssumme spätestens am Schlusse des $n$ten Jahres ausgezahlt wird.

Wie in §. 86. wird auch bei dieser Art von Versicherungen der Beitrag nur während n Jahre erhoben. Nennt man den jährlichen Beitrag $B_{a,n}$, so ist der gegenwärtige Werth sämmtlicher Beiträge für einen Theilnehmer nach No. 1) §. 86.:

$$1)\quad S=B_{a,n}(1+L_{a;1,n-1})=B_{a,n}\left(1+L_a-\frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}\right).$$

Dieser Werth fällt mit der in §. 84. ermittelten einmaligen Einkaufssumme $E_{a,n}$ zusammen. Es ist daher:

2)

$$E_{a,n}=B_{a,n}(1+L_{a;1,n-1})=B_{a,n}\left(1+L_a-\frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}\right),$$

also

$$3)\qquad B_{a,n}=\frac{E_{a,n}}{1+L_{a;\,1,n-1}}=\frac{E_{a,n}}{1+L_a-\frac{A_{a+n-1}\,.\,L_{a+n-1}}{A_a\,.\,1{,}0p^{n-1}}},$$

und hieraus, wenn der Werth für $E_{a,n}$ aus §. 84. eingeführt wird:

$$4)\qquad B_{a,n}=\frac{\frac{100-pL_a}{100+p}+\frac{0{,}0p\,.\,A_{a+n-1}\,.\,L_{a+n-1}}{A_a\,.\,1{,}0p^n}}{1+L_a-\frac{A_{a+n-1}\,.\,L_{a+n-1}}{A_a\,.\,1{,}0p^{n-1}}}$$

oder

$$5)\qquad B_{a,n}=\frac{100-p\left(L_a-\frac{A_{a+n-1}\,.\,L_{a+n-1}}{A_a\,.\,1{,}0p^{n-1}}\right)}{(100+p)\left(1+L_a-\frac{A_{a+n-1}\,.\,L_{a+n-1}}{A_a\,.\,1{,}0p^{n-1}}\right)}.$$

Die beiden Formeln in 4) und 5) eignen sich zur bequemen Berechnung. Die zweite hat den Vortheil vor der ersten, dass zwei gleiche Glieder im Zähler und Nenner vorkommen und daher nur eine Rechnung erfordern.

Nach diesen Gleichungen sind die Beiträge (Prämien) derjenigen Gesellschaften zu berechnen, welche ihre Mitglieder von einem bestimmten Jahre an von der Zahlung derselben befreien und spätestens am Schlusse desselben die Versicherungssumme auszahlen. Für die Gothaer Bank findet diess im 90sten Jahre statt. Daher findet folgende Formel ihre Anwendung:

$$6)\qquad B_{a,n}=\frac{\frac{100-pL_a}{100+p}+\frac{0{,}0p\,.\,A_{89}\,.\,L_{89}}{A_a\,.\,1{,}0p^{90-a}}}{1+L_a-\frac{A_{89}\,.\,L_{89}}{A_a\,.\,1{,}0p^{90-a-1}}},$$

oder:

$$7)\qquad B_{a,n}=\frac{100-p\left(L_a-\frac{A_{89}\,.\,L_{89}}{A_a\,.\,1{,}0p^{90-a-1}}\right)}{(100+p)\left(1+L_a-\frac{A_{89}\,.\,L_{89}}{A_a\,.\,1{,}0p^{90-a-1}}\right)}.$$

Hierin bleibt $A_{89}\,.\,L_{89}$ unverändert für jedes a. Für die Sterblichkeitstafel von Finlaison ist:

$$A_{89}\,.\,L_{89}=17\,.\,1{,}4320115=24{,}46641955.$$

Hiernach ist der jährliche Beitrag für eine Versicherung vom Werthe 1 für einen 30jährigen Mann:



$$8)\qquad B_{80,60}=\frac{100-3\left(19{,}0473528-\frac{24{,}46641955}{732.1{,}03^{59}}\right)}{103\left(1+19{,}0473528-\frac{24{,}46641955}{732.1{,}03^{59}}\right)}$$

$$=\frac{100-3(19{,}0473528-0{,}005843398)}{103(20{,}0473528-0{,}005843398)},$$

$$B_{80,60}=\frac{100-57{,}1245282}{103.20{,}0415095}=\frac{42{,}8754718}{103.20{,}0415095}=\frac{0{,}41626671}{20{,}0415095}=0{,}02077126.$$

Es ist also für eine Versicherungssumme von 100 statt einer einmaligen Einlage von 41,62667 ein jährlicher Beitrag von 2,0771 zu zahlen. Die jährliche Prämie der Gothaer Bank beträgt 2,633...., die der Lübecker 2,35, die der Wiener 2,3833....

Umfasst n keinen grossen Zeitraum, so kann man auch folgende Formel benutzen:

$$9)\qquad B_{a,n}=\frac{\frac{M_a}{1{,}0p}+\frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2}+\frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{M_{a+n-2}}{1{,}0p^{n-1}}+\frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^n}}{A_a+\frac{A_{a+1}}{1{,}0p}+\frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2}+\ldots\frac{A_{a+n-1}}{1{,}0p^{n-1}}},$$

die sich aus der Verbindung von No. 2) §. 84. und den n ersten Gliedern in No. 2) §. 85. ergibt, wenn man beachtet, dass

$$M_{a+n-1}+A_{a+n}=A_{a+n-1}$$

ist.

Da hievon später eine Anwendung gemacht werden wird, so mag, um sichere Zahlen zu erhalten, hiernach der jährliche Beitrag für einen 80jährigen Mann nach der Tafel von Northampton, bestimmt werden, wenn die Versicherung spätestens im 90sten Jahre ausgezahlt wird. Durch Einführung der angezeigten Werthe entsteht:

$$B_{80,10}$$

$$=\frac{\frac{5}{1{,}03}+\frac{5}{1{,}03^2}+\frac{5}{1{,}03^3}+\frac{5}{1{,}03^4}+\frac{4}{1{,}03^5}+\frac{4}{1{,}03^6}+\frac{3}{1{,}03^7}+\frac{2}{1{,}03^8}+\frac{2}{1{,}03^9}+\frac{5}{1{,}03^{10}}}{40+\frac{35}{1{,}03}+\frac{30}{1{,}03^2}+\frac{25}{1{,}03^3}+\frac{20}{1{,}03^4}+\frac{16}{1{,}03^5}+\frac{12}{1{,}03^6}+\frac{9}{1{,}03^7}+\frac{7}{1{,}03^8}+\frac{5}{1{,}03^9}}.$$

Es ist:

$5.1{,}03^{-1}=4{,}8543690$	$40 \quad =40$
$5.1{,}03^{-2}=4{,}7129795$	$35.1{,}03^{-1}=33{,}9805830$
$5.1{,}03^{-3}=4{,}5757085$	$30.1{,}03^{-2}=28{,}2778770$
$5.1{,}03^{-4}=4{,}4424350$	$25.1{,}03^{-3}=22{,}8785425$
$4.1{,}03^{-5}=3{,}4504352$	$20.1{,}03^{-4}=17{,}7697400$
$4.1{,}03^{-6}=3{,}3499372$	$16.1{,}03^{-5}=13{,}8017408$
$3.1{,}03^{-7}=2{,}4392745$	$12.1{,}03^{-6}=10{,}0498116$
$2.1{,}03^{-8}=1{,}5788184$	$9.1{,}03^{-7}=7{,}3178235$
$2.1{,}05^{-9}=1{,}5328334$	$7.1{,}05^{-8}=5{,}5258644$
$5.1{,}03^{-10}=3{,}7204695$	$5.1{,}03^{-9}=3{,}8320835$
34,6572602	183,4340663

und hieraus:

$$10) \qquad B_{80,10}=\frac{34{,}6572602}{183{,}4340663}=0{,}1889359.$$

Das nämliche Resultat ergibt sich auch aus der Gleichung No. 5). Für eine Versicherung von 100 ist daher der jährliche Beitrag 18,8935.

Bei dieser Rechnung habe ich, der bequemern Rechnung wegen, die Zahlen der Sterblichkeitstafel von Northampton entnommen, wenn die Zahl der Geborenen auf 1000 reducirt wird. (S. Baily, Theorie der Leibrenten, pag. 298. u. ff.)

§. 88.

Bestimmung des Werthes einer Zusatzprämie.

Die Gesellschaften gestatten, dass der Besitzer einer lebenslänglichen Versicherung nach §. 84. sein Leben auf eine beschränkte Zeit versichere, so dass die von ihm versicherte Summe spätestens am Schlusse des festgesetzten Zeitraums ausgezahlt wird. Will nun Jemand eine lebenslängliche Versicherung unter den in §. 84. angegebenen Bedingungen in eine solche umwandeln, die nur n Jahre dauert, so ist klar, dass in Folge dieser Umwandlung jährlich ein grösserer Beitrag (Zusatz-Prämie genannt) gezahlt werden muss. Der Werth einer Zusatz-Prämie bestimmt sich nach den bisherigen Mittheilungen sehr leicht.

Versichert Jemand auf diese Art sein Leben auf n Jahre, so hat er nach No. 4) oder 5) §. 87. n Jahre lang jährlich $B_{a,n}$ zu zahlen. Er bezahlt bis jetzt für eine lebenslängliche Versicherung jährlich B_a nach §. 85. No. 5) oder 6), oder richtiger $B_{a,u-a}$



nach §. 87., wenn u die Zeit ausdrückt, wo der jährliche Beitrag aufhört. Er hat daher n Jahre lang ausser der gewöhnlichen Prämie den Ueberschuss beider jährlich zu zahlen. Nennt man nun die Zusatz-Prämie für eine $a$jährige Person auf eine Dauer von n Jahren $Z_{a,n}$, so erhält man folgende Bestimmung:

1) $$Z_{a,n} = B_{a,n} - B_a$$

oder

2) $$Z_{a,n} = B_{a,n} - B_{a,u-a}.$$

Werden die entsprechenden Werthe aus §. 87. und §. 86. eingeführt, so erhält man aus No. 1) und 2):

3)

$$Z_{a,n} = \frac{100 - p\left(L_a - \frac{A_{a+n-1} \cdot L_{a+n-1}}{A_a \cdot 1{,}0p^{n-1}}\right)}{(100+p)\left(1 + L_a - \frac{A_{a+n-1} \cdot L_{a+n-1}}{A_a \cdot 1{,}0p^{n-1}}\right)} - \frac{100 - pL_a}{(100+p)(1+L_a)},$$

4) $$Z_{a,n} = \frac{100 - p\left(L_a - \frac{A_{a+n-1} \cdot L_{a+n-1}}{A_a \cdot 1{,}0p^{n-1}}\right)}{(100+p)\left(1 + L_a - \frac{A_{a+n-1} \cdot L_{a+n-1}}{A_a \cdot 1{,}0p^{n-1}}\right)} - \frac{100 - p\left(L_a - \frac{A_{a+u-1} \cdot L_{a+u-1}}{A_a \cdot 1{,}0p^{u-1}}\right)}{(100+p)\left(1 + L_a - \frac{A_{a+u-1} \cdot L_{a+u-1}}{A_a \cdot 1{,}0p^{u-1}}\right)}.$$

Für die Bestimmungen der Gothaer Bank hat man $u = 90$ in No. 4) zu setzen.

Will ein 30jähriger Mann eine Versicherung kaufen, die spätestens am Ende des 60sten Jahres ausgezahlt wird, so ist der Werth der Zusatz-Prämie nach Finlaison für $a=30$, $n=30$, $u=90$ nach No. 4):

5)

$$Z_{30,30} = \frac{100 - 3\left(L_{30} - \frac{A_{59} \cdot L_{59}}{A_{30} \cdot 1{,}03^{29}}\right)}{103\left(1 + L_{30} - \frac{A_{59} \cdot L_{59}}{A_{30} \cdot 1{,}03^{29}}\right)} - \frac{100 - 3\left(L_{30} - \frac{A_{89} \cdot L_{89}}{A_{30} \cdot 1{,}03^{59}}\right)}{103\left(1 + L_{30} - \frac{A_{89} \cdot L_{89}}{A_{30} \cdot 1{,}03^{59}}\right)}.$$

Der Werth des zweiten negativen Gliedes ist nach No. 7) und No. 8) §. 87.: 0,02077126. Der des ersten ist, wenn die angezeigten Werthe eingeführt werden:

$$B_{30,30} = \frac{100 - 3\left(19{,}0473528 - \frac{454.10{,}8731470}{732.1{,}03^{29}}\right)}{103\left(1 + 19{,}0473528 - \frac{454.10{,}8731470}{732.1{,}03^{29}}\right)}$$

$$= \frac{100-3(19{,}0473528 - 2{,}86167634)}{103(20{,}0473528-2{,}86167634)} = \frac{100-48{,}5570296}{103.18{,}1856765} = \frac{0{,}49946631}{18{,}1856764}$$

$$= 0{,}02746482.$$

Die Zusatz-Prämie ist hiernach aus No. 5):

6) $\qquad Z_{30,30} = 0{,}02746482 - 0{,}02077126 = 0{,}00669354.$

Für eine 30jährige Versicherung von 100 ist daher von einem 30jährigen Mann jährlich 0,66935, oder in Thalern ausgedrückt 20 Sgr. 1 Pf. zu zahlen. Der Werth einer Zusatz-Prämie ist von der Gothaer Bank in diesem Falle zu 25 Sgr. 7 Pf. bestimmt. Die einmalige Einkaufssumme im fraglichen Falle ist 49,94663 und der dieser Summe entsprechende 30jährige Beitrag 2,74648.

§. 89.

Werthbestimmung der einmaligen Kaufsummen oder jährlichen Beiträge für Leibrenten und Lebensversicherungen mit Rücksicht auf Verwaltungskosten.

Die Frage, in welchem Verhältnisse die Verwaltungskosten einer Gesellschaft zu dem von ihr verwalteten Vermögen stehen, kann nicht wohl zum Voraus festgestellt werden. Die von den betreffenden Gesellschaften gemachten oder zu machenden Erfahrungen können allein die Vorbedingungen zu Beantwortung dieser Frage abgeben. Manche Arbeiten werden von einer solchen Gesellschaft ohne Rücksicht darauf ausgeführt werden müssen, ob eine grössere oder kleinere Summe Geldes ihrer Verwaltung anvertraut ist. Im Allgemeinen wird aber wohl die Voraussetzung nicht unrichtig sein, dass eine Gesellschaft, welche kleinere Summen verwaltet, bei gleicher Sparsamkeit und Sorglichkeit theuerer verwaltet, als wenn ihr grössere Summen anvertraut sind: gerade weil in beiden Fällen dieselben Geschäfte besorgt werden müssen. Dennoch wird es zulässig sein, die Verwaltungskosten einer Gesellschaft in einem Procentsatze ihrer Einnahmen oder der ihr anvertrauten Summen auszudrücken. Nur die Grösse dieses Procentsatzes wird ein Ergebniss der Erfahrung sein.

Diese Bemerkungen finden ihre Bestätigung durch die folgende Tabelle über Einnahme und Verwaltungs-Aufwand der Gothaer Lebensversicherungs-Bank, in deren Besitz ich durch die Gefäl-



ligkeit des Verwaltungsrathes der badischen allgemeinen Versorgungs-Anstalt erst kam, als das Gesagte längst niedergeschrieben war, und die ich deswegen nachträglich mittheile. Es zeigt sich hieraus deutlich, dass sich der Verwaltungs-Aufwand mit dem Wachsen der Einnahmen wahrscheinlich innerhalb bestimmter Grenze vermindert.

Jahr.	Jahres-Einnahme.	Jährlicher Verwaltungs-Aufwand.	Verwaltungs-Aufwand in Procenten.	Betrag der Dividende in Procenten.
1829	116061	8418	7,2531	
1830	144584	11843	8,1913	
1831	223484	13835	6,0564	
1832	276396	18293	6,6338	
1833	331745	25567	7,7069	
1834	378821	23288	6,1475	22
1835	429153	27622	6,4364	17
1836	488691	29954	6,1294	21
1837	544884	31291	5,7427	22
1838	601452	35102	5,8362	23
1839	661981	36410	5,5001	23
1840	702919	38079	5,4173	18
1841	750434	39705	5,2909	20
1842	795495	41563	5,2251	20
1843	835157	40843	4,8905	25
1844	881393	42756	4,8509	25
1845	929398	42780	4,6030	24
1846	974876	44983	4,6142	25
1847	1033177	46231	4,4749	25
1848	1063463	45212	4,2498	26
1849	1108589	47235	4,2609	26
1850	1139238	47444	4,1646	28
1851	1203144	49823	4,1411	28
1852	1263507	50579	4,0031	23
1853	1315379	51778	3,9364	24
1854	1358971	53037	3,9027	25
1855	1411191	54714	3,8771	30
1856	1468448	60154	4,0964	33
Summe	22432031	1058539	147,6327	553
Mittel	801144	37805	5,27259	24,043

Fasst man die Ausgaben, welche eine Gesellschaft zur Durchführung ihrer Verwaltung und ihres Bestehens nöthig hat, in diesem Sinne auf, so werden ihre Ausgaben einerseits in Auszahlung der an ihre Mitglieder abzugebenden Summen und andererseits in den Kosten bestehen, welche sie zur Verwaltung des ihr anvertrauten Vermögens bedarf. Diese Ausgaben müssen von ihren Mitgliedern durch Einzahlung einmaliger Summen oder jährlicher Beiträge erhoben werden, wenn zwischen Einnahmen und Ausgaben der Gesellschaft Gleichgewicht bestehen soll.

Bisher wurde bei Werthbestimmung der Einkaufssummen und Prämien auf die Verwaltungskosten keine Rücksicht genommen. Geschieht diess und drückt man die Grösse der Verwaltungskosten durch einen Procentsatz des von der Gesellschaft zu verwaltenden Vermögens oder, was dasselbe ist, der ihr zufliessenden Einnahmen aus, so kann man hiebei folgende Methoden dem Calcul zu Grunde legen.

Erste Methode. Ist der Werth der einmaligen Einkaufssumme oder jährlichen Prämie ohne Rücksicht auf Verwaltungskosten festgestellt, so ergibt sich derselbe mit Rücksicht auf dieselben einfach dadurch, dass man ihren Werth um den angenommenen Procentsatz q erhöht, also mit $1{,}0q$ multiplicirt, denn die einlaufenden Kaufsummen und Prämien bilden das zu verwaltende Vermögen der Gesellschaft.

Deutet man die hiedurch bedingte Werthänderung dadurch an, dass man den bisher gebrauchten Zeichen oben rechts einen Strich beisetzt, so ergibt sich aus den in §§. 78.—88. aufgefundenen Gleichungen zur Werthbestimmung der Leibrenten und Versicherungen Folgendes, und zwar aus §. 78. und §. 81.:

1) $$L_a' = 1{,}0q\,.\,L_a,$$

2) $$L_{ab}' = 1{,}0q\,.\,L_{ab}.$$

Dasselbe gilt von aufhörenden, aufgeschobenen und temporären Leibrenten, §. 79.

Aus §. 82. und §. 85. ergibt sich zur Werthbestimmung einer einmaligen Einkaufssumme oder jährlichen Prämie mit Rücksicht auf Verwaltungskosten:

3) $$E_a' = 1{,}0q\,.\,E_a = 1{,}0q\,.\,\frac{100 - pL_a}{100 + p},$$

4) $$B_a' = 1{,}0q\,.\,\frac{E_a}{1 + L_a} = 1{,}0q\,.\,\frac{100 - pL_a}{(100 + p)(1 + L_a)}.$$



Auf gleiche Weise ergeben sich aus den §§. 83., 84., 86., 87. und 88. die fraglichen Werthe für kurze und beschränkte Versicherungen und Zusatzprämien.

Zweite Methode. Erhebt eine Gesellschaft die einmalige Kaufsumme mit Rücksicht auf Verwaltungskosten für eine lebenslängliche Versicherung (E_a') von einer $a$jährigen Person, so betragen ihre Einnahmen im Ganzen:

$$5) \qquad S = E_a' A_a.$$

Die Ausgaben bestehen theils in den an die Theilnehmer auszuzahlenden Versicherungen, deren gegenwärtiger Werth

$$6) \qquad R = \frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{M_{a+u}}{1{,}0p^{u+1}}$$

ist, theils in q Procent bestehenden Verwaltungskosten:

$$7) \qquad W = E_a'.A_a.0{,}0q.$$

Aus No. 5)—7) folgt die Gleichung

$$E_a'.A_a = \frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{M_{a+u}}{1{,}0p^{u+1}} + E_a'.A_a.0{,}0q$$

oder

$$E_a'(1-0{,}0q) = \frac{1}{A_a}\left(\frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{M_{a+u}}{1{,}0p^{u+1}}\right),$$

und hieraus in Rücksicht auf No. 5) und No. 7) §. 82.:

$$8) \qquad E_a' = \frac{E_a}{1-0{,}0q} = \frac{100-pL_a}{(100+p)(1-0{,}0q)}.$$

Eben so bestimmt sich die Grösse des jährlichen Beitrags (B_a') mit Rücksicht auf Verwaltungskosten nach §. 85.:

$$9) \qquad B_a' = \frac{E_a}{(1+L_a)(1-0{,}0q)} = \frac{100-pL_a}{(100+p)(1-0{,}0q)(1+L_a)}.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich die Werthe der einmaligen Einkaufssummen und Prämien für kurze und beschränkte Versicherungen aus §§. 83. und 84., §§. 86. und 87.; für Zusatzprämien §. 88.; für Leibrenten §§. 78 , 79. und 81., wenn man die dort aufgestellten Gleichungen mit $(1-0{,}0q)$ theilt.

Die hier angegebenen Werthbestimmungen gehen von der Voraussetzung aus, dass die Verwaltungskosten zu Anfang der Jahre fällig sind.



§. 90.

Fortsetzung.

Dritte Methode. Geht man aber von der Voraussetzung aus, dass die Verwaltungskosten am Ende des Jahres fällig sind, so führt dieselbe Schlussreihe zum Ziele. Die Einnahmen der Gesellschaft bestehen wie vorher mit Rücksicht auf Verwaltungskosten in der Summe:

$$1) \qquad S = E_a'.A_a.$$

Die Ausgaben der Gesellschaft begreifen dann in sich die auszuzahlenden Versicherungen im gegenwärtigen Werth:

$$2) \qquad R = \frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{M_{a+n}}{1{,}0p^{n+1}},$$

ferner die am Ende des Jahres fälligen Verwaltungskosten, deren gegenwärtiger Werth

$$3) \qquad W = \frac{E_a'.A_a.0{,}0q}{1{,}0p}$$

ist. Aus No. 1)—3) folgt die Gleichung:

$$4) \qquad E_a'A_a = \frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{M_{a+n}}{1{,}0p^{n+1}} + \frac{E_a'A_a.0{,}0q}{1{,}0p},$$

oder:

$$E_a' - \frac{E_a'.0{,}0q}{1{,}0p} = \frac{1}{A_a}\left(\frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{M_{a+n}}{1{,}0p^{n+1}}\right),$$

und hieraus nach No. 5) §. 82.:

$$\frac{E_a'(1{,}0p - 0{,}0q)}{1{,}0p} = E_a,$$

also:

$$5) \qquad E_a' = \frac{E_a.1{,}0p}{1{,}0p - 0{,}0q} = \frac{E_a(100+p)}{100+p-q}.$$

Wird der Werth für E_a aus No. 7) §. 82. eingeführt, so ergibt sich:

$$6) \qquad E_a' = \frac{100 - pL_a}{100+p-q} = \frac{1 - 0{,}0pL_a}{1{,}0p - 0{,}0q}.$$

Der jährliche Beitrag bestimmt sich auf gleiche Weise mit Rücksicht auf Verwaltungskosten aus §. 85.:



7)

$$B_a' = \frac{E_a'}{1+L_a} = \frac{E_a(100+p)}{(100+p-q)(1+L_a)} = \frac{100-pL_a}{(100+p-q)(1+L_a)}.$$

Eben so ergibt sich für beschränkte Versicherung die einmalige Einkaufssumme aus §. 84.:

8) $$E'_{a,n} = \frac{100-p\left(L_a - \frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}\right)}{100+p-q}.$$

Der jährliche Beitrag wird dann aus §. 87.:

9) $$B'_{a,n} = \frac{100-p\left(L_a - \frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}\right)}{(100+p-q)\left(1+L_a - \frac{A_{a+n-1}.L_{a+n-1}}{A_a.1{,}0p^{n-1}}\right)}.$$

In gleicher Weise findet man die fraglichen Werthe für kurze Versicherungen, Zusatz-Prämien und Leibrenten, wenn man die hiefür aufgestellten Gleichungen mit

$$\frac{1{,}0p-0{,}0q}{1{,}0p} = \frac{100+p-q}{100+p}$$

dividirt.

Sind die einmaligen Kaufsummen oder jährlichen Beiträge schon bekannt, so wird die Berechnung der entsprechenden Werthe mit Rücksicht auf Verwaltungskosten sehr leicht, denn es kommen dann folgende Formeln in Anwendung:

10) $E_a' = 1{,}0q.E_a$, 13) $B_a' = 1{,}0q.B_a$,

11) $E_a' = \frac{E_a}{1-0{,}0q}$, 14) $B_a' = \frac{B_a}{1-0{,}0q}$,

12) $E_a' = \frac{E_a(100+p)}{100+p-q}$, 15) $B_a' = \frac{B_a(100+p)}{100+p-q}$.

Da die Entwickelung der gefundenen Formeln auf verschiedenen Ansichten beruht, so werden sie nicht auf gleiche Resultate führen. Es lässt sich leicht nachweisen, dass

16) $E_a.\frac{1}{1-0{,}0q} > E_a.\frac{100+p}{100+p-q}$ und $E_a.\frac{1}{1-0{,}0q} > 1{,}0q.E_a$

und dass

17) $$\frac{E_a(100+p)}{100+p-q} > 1{,}0q.E_a$$

ist, wenn $q > p$, und dagegen

$$18)\qquad \frac{E_a(100+p)}{100+p-q} < 1{,}0q \, . \, E_a$$

ist, wenn $p > q$ ist. Die Resultate der Formeln werden aber nur um Weniges differiren.

Wendet man diese Gleichungen auf Bestimmung des jährlichen Beitrags eines 30jährigen Mannes bei 4 Procent für eine Versicherungssumme von 100, und nimmt die Verwaltungskosten zu dem sehr hohen Procentsatze von 10 an, so erhält man aus den Gleichungen No. 13)—15) die Werthe:

$$B_{30}' = 1{,}1 \, . \, 1{,}8255 = 2{,}00805,$$

$$B_{30}' = \frac{1{,}8255 \, . \, 100}{100-10} = 2{,}0283,$$

$$B_{30}' = \frac{1{,}8255 \, . \, 104}{104-10} = 2{,}01970.$$

Diese Gleichungen geben auch bei dem hohen Procentsatz noch einen niederern Werth als der jährliche Beitrag 2,0433 bei 3 Procent ohne Verwaltungskosten nach Brune besagt. Der jährliche Beitrag in der Gothaer Bank ist nach §. 87. zu 2,633, in der Lübecker zu 2,35, in der Wiener zu 2,3833 normirt. Dieser höhere Beitrag wird allerdings durch spätere Dividendenzahlung wieder ausgeglichen. Es fragt sich aber, ob bei einer schon consolidirten Bank nicht die Geschäfte einfacher würden, wenn niedere Prämien gefordert und dadurch der Eintritt erleichtert würde, da auf dem bezeichneten Wege das Bestehen der Gesellschaft in keiner Weise gefährdet würde.

§. 91.

Werthbestimmung einer Ueberlebens-Versicherung.

Die Versicherungsbanken gestatten auch ausser den genannten Versicherungen noch solche auf zwei verbundene Leben unter der Bedingung, dass die versicherte Summe nur dann ausgezahlt wird, wenn von den beiden fraglichen Personen die zum Voraus bezeichnete ($b$jährige) die andere ($a$jährige) Person überlebt. Man nennt diese Art von Versicherung „Ueberlebens-Versicherung." Sie werden nur auf das ganze Leben abgeschlossen. Der Vertrag ist erloschen, wenn die versicherte ($b$jährige) Person vor der andern ($a$jährigen) stirbt. In diesem Falle wird



keine Vergütung ausgezahlt und die eingezahlten Prämiengelder sind zum Vortheil der Bank verfallen. Nur die noch rückständigen Dividenden werden an die bezügliche Person zurück gezahlt.

Da die Versicherungssumme, die hier als die Einheit angenommen wird, nur dann ausgezahlt wird, wenn die $a$jährige Person von der $b$jährigen überlebt wird, so hängt die Auszahlung davon ab, dass in irgend einem Jahre (dem $(r+1)$ten) dieses Ereigniss eintritt. Es sind nun folgende Fälle möglich:

a) Die $a$jährige Person stirbt während desselben und die $b$jährige lebt noch am Schlusse desselben. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$W_1 = \frac{M_{a+r} \cdot A_{b+r+1}}{A_a \cdot A_b}.$$

b) Beide Personen, die a- und $b$jährige, starben im Laufe dieses Jahres, die $a$jährige aber vor der $b$jährigen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen gerade im Laufe dieses Jahres sterben, ist im Allgemeinen:

$$W_2 = \frac{M_{a+r} \cdot M_{b+r}}{A_a \cdot A_b},$$

und in diesem Falle kann die $a$jährige zuerst, die $b$jährige später sterben. Eben so umgekehrt. Unter der Voraussetzung, dass das Eintreffen beider Ereignisse gleich möglich ist, lässt sich das Eintreffen des hier in Frage stehenden Ereignisses durch

$$W_3 = \frac{M_{a+r} \cdot M_{b+r}}{2 \cdot A_a \cdot A_b}$$

bezeichnen. Das Eintreffen des einen oder andern in a) und b) genannten Falls bedingt die Auszahlung der Versicherungssumme am Ende des genannten Jahres. Der gegenwärtige Werth dieser Summe ist bei dem Zinsfuss p:

$$1) \qquad R_{r+1} = \frac{M_{a+r} \cdot A_{b+r+1}}{A_a \cdot A_b \cdot 1{,}0p^{r+1}} + \frac{M_{a+r} \cdot M_{b+r}}{2 \cdot A_a \cdot A_b \cdot 1{,}0p^{r+1}}.$$

Jedes dieser Ereignisse kann in jedem Jahre eintreten; setzt man daher der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3.... bis zur Lebensgrenze statt r, so erhält man zur Werthbestimmung der einmaligen Einkaufssumme E_{ab} für eine Ueberlebens-Versicherung

$$2) \quad E_{ab} = \frac{1}{A_a \cdot A_b}\left(\frac{M_a \cdot A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1} \cdot A_{b+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{M_{a+u-1} \cdot A_{b+u}}{1{,}0p^u}\right)$$
$$+ \frac{1}{2A_a \, A_b}\left(\frac{M_a \cdot M_b}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1} \cdot M_{b+1}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{M_{a+u-1} \cdot M_{b+u-1}}{1{,}0p^u}\right).$$



Setzt man nun $M_{a+r} = A_{a+r} - A_{a+r+1}$, $M_{b+r} = A_{b+r} - A_{b+r+1}$ und sieht von dem Divisor $A_a . A_b$ ab, so ist:

$$M_{a+r} . A_{b+r+1} + \tfrac{1}{2} M_{a+r} . M_{b+r}$$
$$= (A_{a+r} - A_{a+r+1}) A_{a+r+1} + \tfrac{1}{2}(A_{a+r} - A_{a+r+1})(A_{b+r} - A_{b+r+1})$$
$$= \tfrac{1}{2}(A_{a+r} . A_{b+r} - A_{a+r+1} . A_{b+r+1} + A_{a+r} . A_{b+r+1} - A_{a+r+1} . A_{b+r}).$$

Führt man diese Werthe in No. 2) ein, indem man allmälig 0, 1, 2,.... statt r setzt, so erhält man eine Darstellung, die vier Reihen umfasst:

3)

$$E_{ab} = \frac{1}{2A_a . A_b}\left(\frac{A_a . A_b}{1{,}0p} + \frac{A_{a+1} . A_{b+1}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+2} . A_{b+2}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{A_{a+n} . A_{b+n}}{1{,}0p^{n+1}}\right)$$
$$- \frac{1}{2A_a . A_b}\left(\frac{A_{a+1} . A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2} . A_{b+2}}{1{,}0p^2} + \dots\dots\dots \frac{A_{a+n} . A_{b+n}}{1{,}0p^n}\right)$$
$$+ \frac{1}{2A_a . A_b}\left(\frac{A_a . A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+1} . A_{b+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+2} . A_{b+3}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{A_{a+n-1} . A_{b+n}}{1{,}0p^n}\right)$$
$$- \frac{1}{2A_a . A_b}\left(\frac{A_{a+1} . A_b}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2} . A_{b+1}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3} . A_{b+2}}{1{,}0p^3} + \dots \frac{A_{a+n} . A_{b+n-1}}{1{,}0p^n}\right).$$

Diese Reihen lassen sich auf verschiedene Weise auf Leibrenten von zwei zusammenlebenden Personen nach §. 81. zurückführen. Die zweite Reihe fällt mit einer solchen nach No. 1) §. 81. zusammen. Die erste Reihe ändert sich auf folgende Weise in eine solche um:

$$\frac{1}{2.1{,}0p} + \frac{1}{2.1{,}0p . A_a . A_b}\left(\frac{A_{a+1} . A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2} . A_{b+2}}{1{,}0p^2} + \dots \frac{A_{a+n} . A_{b+n}}{1{,}0p^n}\right)$$
$$= \frac{1}{2.1{,}0p}(1 + L_{ab}),$$

und vereinigt sich mit der zweiten in folgenden Ausdruck:

$$4) \quad \frac{1}{2.1{,}0p}(1 + L_{ab}) - \tfrac{1}{2} L_{ab} = \frac{1}{2.1{,}0p}(1 + L_{ab} - 1{,}0p L_{ab})$$
$$= \frac{1 - 0{,}0p . L_{ab}}{2.1{,}0p}.$$

Scheidet man das Glied $A_a . A_{b+1}$ aus der dritten Reihe aus, so entsteht:

$$\frac{A_a . A_{b+1}}{2A_a . A_b . 1{,}0p}\left(1 + \frac{1}{A_a . A_{b+1}}\left(\frac{A_{a+1} . A_{b+2}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2} . A_{b+3}}{1{,}0p^2} + \dots\right)\right)$$
$$= \frac{A_{b+1}}{2.1{,}0p . A_b}(1 + L_a(b+1)).$$



Die vierte Reihe führt auf folgenden Ausdruck, wenn $A_{a+1}.A_b$ ausgeschieden wird:

$$\frac{A_{a+1}.A_b}{2.1,0p.A_a.A_b}\left(1+\frac{1}{A_{a+1}.A_b}\left(\frac{A_{a+2}.A_{b+1}}{1,0p}+\frac{A_{a+3}.A_{b+2}}{1,0p^2}+\ldots\right)\right)$$
$$=\frac{A_{a+1}}{2.1,0p.A_a}(1+L(a+1)b).$$

Durch Einführung dieser Werthe geht No. 3) über in:

5)

$$E_{ab}=\frac{1}{2.1,0p}\left[(1-0,0p.L_{ab}+\frac{A_{b+1}}{A_b}(1+L_a(b+1)-\frac{A_{a+1}}{A_a}(1+L_{(a+1)}b)\right].$$

Man kann aber auch die dritte Reihe dadurch umformen, dass man mit $A_{a-1}.A_b$ multiplicirt und dividirt. Dann ist:

$$\frac{A_{a-1}.A_b}{2A_a.A_b}.\frac{1}{A_{a-1}.A_b}\left(\frac{A_a.A_{b+1}}{1,0p}+\frac{A_{a+1}.A_{b+2}}{1,0p^2}+\ldots\frac{A_{a+u-1}.A_{b+u}}{1,0p^u}\right)$$
$$=\frac{A_{a-1}}{2A_a}.L_{(a-1)}b.$$

Für die vierte erhält man durch Multiplikation und Division mit $A_a.A_{b-1}$:

$$\frac{A_a.A_{b-1}}{2.A_a.A_b}.\frac{1}{A_a.A_{b-1}}\left(\frac{A_{a+1}.A_b}{1,0p}+\frac{A_{a+2}.A_{b+1}}{1,0p}+\ldots\frac{A_{a+u}.A_{b+u-1}}{1,0p^u}\right)$$
$$=\frac{A_{b-1}}{2A_b}.L_a(b-1).$$

Durch Einführung von No. 4) und der eben angegebenen Werthe in No. 3) entsteht:

$$6)\quad E_{ab}=\frac{1-0,0p.L_{ab}}{2.1,0p}+\frac{A_{a-1}}{2A_a}.L_{(a-1)}b-\frac{A_{b-1}}{2A_b}.L_a(b-1).$$

Man kann noch verschiedene Combinationen zur Werthbestimmung von E_{ab} aufstellen. Die in 5) und 6) gegebenen sind jedenfalls sehr praktisch.

Ist die $a$jährige Person der Versicherer und soll der jährliche Beitrag aus der einmaligen Kaufsumme abgeleitet werden, so ergibt sich derselbe einfach aus der Gleichung No. 5) §. 85, und es ist:

$$7)\qquad B_a=\frac{E_{ab}}{1+L_a}$$
$$=\frac{1}{2.1,0p(1+L_a)}.\left[1-0,0p.L_{ab}+\frac{A_{b+1}}{A_b}(1+L_a(b+1))-\frac{A_{a+1}}{A_a}(1+L_{(a+1)}b)\right].$$



Oder man kann zu der Werthbestimmung von B_a auch den Werth aus No. 6) für E_{ab} einführen.

Soll nun umgekehrt die einmalige Einkaufssumme oder der jährliche Beitrag bestimmt werden, wenn die $b$jährige Person von der $a$jährigen überlebt wird, so ergibt sich der Werth hiefür, wenn in No. 5) oder in No. 6) b statt a und a statt b gesetzt wird. Man erhält:

$$7) \qquad E_{ba}$$

$$= \frac{1}{2.1{,}0p}\left[1 - 0{,}0p . L_{ba} + \frac{A_{a+1}}{A_a}(1 + L_b(a+1)) - \frac{A_{b+1}}{A_b}(1 + L_a(b+1))\right]$$

$$= \frac{1 - 0{,}0p . L_{ab}}{2.1{,}0p} + \frac{A_{b-1}}{2A_b} L_{(b-1)\,a} - \frac{A_{a-1}}{2A_a} . L_b(a-1).$$

Auf gleiche Weise erhält man den jährlichen Beitrag für diesen Fall aus der Gleichung:

$$8) \qquad B_b = \frac{E_{ba}}{1 + L_b},$$

wenn hierin der Werth aus No. 7) für E_{ba} eingeführt wird.

Soll nun der Werth einer Ueberlebensversicherung für zwei Personen von dem Alter a und b bestimmt werden, die ausgezahlt wird, wenn überhaupt eine von beiden Personen stirbt, so ergibt sich derselbe leicht, wenn man die entsprechenden Werthe aus No. 5), 6) und 7) zusammenzählt. Man erhält dann:

$$9) \qquad E_{ab} = \frac{1 - 0{,}0p . L_{ab}}{1{,}0p}.$$

Da der jährliche Beitrag nur so lange geleistet wird, als die a- und $b$jährige Person zusammen leben, so ergibt sich nach §. 86. der jährliche Beitrag auf folgende Weise:

$$10) \qquad B_{ab} = \frac{E_{ab}}{1 + L_{ab}} = \frac{1 - 0{,}0p . L_{ab}}{1{,}0p(1 + L_{ab})}.$$

Eben so können nun nach dem Vorgange von §. 89. und §. 90. die Verwaltungskosten in Rechnung genommen werden.

Man besitzt Tafeln, worin die hierhergehörigen Werthe bestimmt sind. Da die möglichen Fälle des Verbundenseins zweier Personen sehr mannigfaltig sind, so haben die betreffenden Tafeln eine grosse Ausdehnung. Es mag genügen, die Methode für ihre Berechnung gezeigt zu haben.

§. 92.

Die Reserve.

Die Reserve besteht in dem Betrage, der von den Prämien oder Beitragsgeldern zurückgelegt werden muss, weil alle für das Leben oder auf mehrere Jahre versicherte Personen, deren Prämiengelder gleich bleiben, in den ersten Jahren mehr, in den spätern weniger zahlen, als die Ausgaben betragen, welche nach dem Sterblichkeitsgesetz erfordert werden. Der Ueberschuss in den frühern Jahren dient dazu, den Minderertrag der spätern Jahre auszugleichen und wird als Reserve für die folgenden Jahre zur Disposition angesammelt.

Nach den Statuten der einzelnen Gesellschaften wird der jedesmalige wahre Betrag der Reserve nach den Grundsätzen der Prämienberechnung ermittelt. Auch wird derselbe von Zeit zu Zeit durch besondere Berechnung nach den bei den einzelnen Gesellschaften über die Sterblichkeit gemachten Erfahrungen und Abweichungen von derselben berichtigt.

Zur Bestimmung der Reserve eines Jahres wäre eigentlich keine besondere Berechnung nöthig, wenn die eingehenden Gelder zu dem nämlichen Zinsfuss angelegt würden, in welchem die Prämiensätze bestimmt sind, die Auszahlung der Versicherungssummen genau nach dem zu Grunde gelegten Sterblichkeitsgesetz erfolgte und die Verwaltungskosten des Gesellschafts-Vermögens zum Voraus bestimmt und erlegt wären, denn die Reserve bestände denn einfach aus dem jeweiligen Cassenbestand der Gesellschaft.

Da aber die Prämiensätze gewöhnlich zu einem niederern Zinsfuss (3 Procent) berechnet sind, die eingehenden Gelder aber von der Gesellschaft zu einem höhern Zinsfuss (4 bis 4,5) angelegt werden, die Sterbefälle aber nicht mit Sicherheit nach dem angenommenen Sterblichkeitsgesetz erfolgen, so werden sich hieraus andere Resultate ergeben, als diejenigen sind, worauf der Calcul führt, und die voraus gesetzt werden, wenn die Zahlungen von der Bank eingehalten werden sollen.

Die Gesellschaft muss daher darauf bedacht sein, rechtzeitig über die nöthigen Mittel verfügen und ihre Verbindlichkeiten ohne Schwierigkeit erfüllen zu können. Diess ist nur möglich, wenn sie für den richtigen Bestand der Reserve Vorsorge trifft. Erfolgt der Abgang der versicherten Mitglieder in geringerem Grade, als die angenommene Sterblichkeits-Ordnung es verlangt, so müssen die hiedurch überschüssigen Summen in Reserve gehalten werden,

damit seiner Zeit die erforderlichen Zahlungen gemacht werden können. Es wird daher gut sein, wenn von Zeit zu Zeit die nöthigen Berichtigungen gemacht werden, wie diess auch in den Statuten der bezüglichen Gesellschaften vorgesehen ist.

§. 93.

Berechnung der Reserve.

Da die richtige Berechnung der Reserve für das Bestehen einer Gesellschaft vor Allem von Wichtigkeit ist, so sollen hiefür verschiedene Methoden angegeben werden.

Erste Methode. Bezeichnet man wie früher die Zahl der am Anfange der folgenden Jahre lebenden Personen vom $a$ten Jahre an durch A_a, A_{a+1}, A_{a+2},.... und die der mit Tode abgehenden durch M_a, M_{a+1}, M_{a+2},...., die Grösse des jährlichen Beitrags für die Versicherungssumme 1 oder 100 durch B_a, so bestimmt sich der Bestand der Reserve für ein bestimmtes Jahr ($n$te) für sich sehr einfach, wenn man die Summe der am Anfange dieses Jahres fälligen Beiträge bestimmt, biezu den einjährigen Zins bei p Procent zählt und davon die am Ende des Jahres fälligen Versicherungssummen für die gestorbenen Mitglieder abzieht. Hiernach ergibt sich der Bestand der Reserve für das $n$te Jahr (R_n) durch

$$1)\qquad R_n = B_a . A_{a+n-1} . 1{,}0p - M_{a+n-1},$$

oder für die Versicherungssumme K:

$$2)\qquad R_n = B_a . A_{a+n-1} . 1{,}0p - M_{a+n-1} . K,$$

wenn der Werth von B_a im Verhältnisse von K bestimmt ist.

Diess lässt sich auch so ausdrücken, wenn die Summe sämmtlicher zu Anfange des $n$ten Jahres fälliger Beiträge durch $B_n = B_a . A_{a+n-1}$ und die Summe der Versicherungen durch V_n bezeichnet wird:

$$3)\qquad R_n = B_n . 1{,}0p - V_n.$$

Hieraus ergibt sich für den Bestand der Reserve am Ende des ersten, zweiten, dritten Jahres u. s. w.:

$$4)\qquad \begin{cases} R_1 = B_1 . 1{,}0p - V_1, \\ R_2 = B_2 . 1{,}0p - V_2, \\ R_3 = B_3 . 1{,}0p - V_3, \end{cases}$$



u. s. w., worin auch die Werthe aus No. 1) oder No. 2) substituirt werden können.

Sämmtliche Werthe in No. 4) bleiben als Vorrath in der Casse zur Deckung später fällig werdender Bedürfnisse und sind in die spätern Jahre überzutragen.

Soll nun der Bestand der Reserve am Ende des $n$ten Jahres für sämmtliche Jahre bestimmt werden, so wird er sich leicht ergeben, wenn man bemerkt, dass die Reserve des ersten Jahres $(n-1)$ Jahre lang Zins trägt, die des zweiten $(n-2)$, die des dritten $(n-3)$ Jahre lang u. s. w. Werden nun die Beträge in No. 4) der Reihe nach mit $1{,}0p^{n-1}$, $1{,}0p^{n-2}, \ldots 1{,}0p$, 1 vervielfacht, so ergibt sich der Bestand der Gesammtreserve für n Jahre, der mit SR_n bezeichnet werden soll:

5)

$$SR_n = R_1 . 1{,}0p^{n-1} + R_2 . 1{,}0p^{n-2} + R_3 . 1{,}0p^{n-3} + \ldots R_{n-1} . 1{,}0p + R_n,$$

oder wenn die Werthe für die R aus No. 4) eingeführt und geordnet werden:

6)

$$SR_n = B_1 . 1{,}0p^n + B_2 . 1{,}0p^{n-1} + \ldots B_{n-1} . 1{,}0p^2 + B_n . 1{,}0p$$
$$-[V_1 . 1{,}0p^{n-1} + V_2 . 1{,}0p^{n-2} + \ldots V_n . 1{,}0p + V_n],$$

oder aus No. 2):

7)

$$SR_n = B_a . 1{,}0p[A_a . 1{,}0p^{n-1} + A_{a+1} . 1{,}0p^{n-2} + \ldots A_{a+n-2} . 1{,}0p + A_{a+n-1}]$$
$$- K[M_a . 1{,}0p^{n-1} + M_{a+1} . 1{,}0p^{n-2} + \ldots M_{a+n-2} . 1{,}0p + M_{a+n-1}].$$

Zweite Methode. Zu dem nämlichen Resultate gelangt man, wenn man die Werthe sämmtlicher, zu Anfang der Jahre fälliger Beiträge B_1, $B_2, \ldots B_n$, ebenso die am Ende der Jahre auszuzahlenden Versicherungssummen V_1, $V_2, \ldots V_n$ auf den Schluss des $n$ten Jahres zurückbringt und letztere von ersteren abzieht. Es ist dann wie vorhin:

8)

$$SR_n = B_1 . 1{,}0p^n + B_2 . 1{,}0p^{n-1} + \ldots B_{n-1} . 1{,}0p^2 + B_n . 1{,}0p$$
$$-[V_1 . 1{,}0p^{n-1} + V_2 . 1{,}0p^{n-2} + \ldots V_{n-1} . 1{,}0p + V_n].$$

§. 94.

Fortsetzung.

Dritte Methode. Diese ergibt sich, wenn man mit dem

Ende eines jeden Jahres die Rechnung der Gesellschaft abschliesst und den Cassenvorrath des Vorjahrs für die Reserve in das nachfolgende überträgt.

Der Bestand der Reserve des ersten Jahres ist hiernach:

$$1)\qquad R_1 = B_1 . 1{,}0p - V_1.$$

Zu diesem Cassenvorrath kommen die Beiträge des zweiten Jahres und erwachsen am Ende des zweiten Jahres sammt Zins zu der Summe $(R_1 + B_2)\,1{,}0p$. Hievon gehen die Versicherungssummen des zweiten Jahres ab. Der Bestand der Reserve ist daher am Ende des zweiten Jahres:

$$2)\qquad R_2 = (R_1 + B_2)\,1{,}0p - V_2.$$

Zu diesem Cassenvorrath kommen die Beiträge des dritten Jahres und erheben sich sammt Zins am Schlusse des dritten zu der Summe $(R_2 + B_3)\,1{,}0p$, von welcher die Versicherungssummen des dritten Jahres abgehen. Hiernach ist:

$$3)\qquad R_3 = (R_2 + B_3)\,1{,}0p - V_3.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergibt sich der Bestand der ganzen Reserve am Ende des $n$ten Jahres, der wie in §. 93. durch SR_n bezeichnet werden soll, in folgender Weise:

$$4)\qquad SR_n = (SR_{n-1} + B_n)\,1{,}0p - V_n.$$

Diese Methode ist eine zurücklaufende. Werden nun die Werthe für die R aus den vorstehenden Gleichungen eingeführt, so entsteht, wenn gehörig geordnet wird, im Anschluss an No. 1):

$$SR_2 = (SR_1 + B_2)\,1{,}0p - V_2$$
$$= B_1 . 1{,}0p^2 + B_2 . 1{,}0p - V_1 . 1{,}0p - V_2,$$

$$SR_3 = (SR_2 + B_3)\,1{,}0p - V_3$$
$$= B_1 . 1{,}0p^3 + B_2 . 1{,}0p^2 + B_3 . 1{,}0p - V_1 . 1{,}0p^2 - V_2 . 1{,}0p - V_3,$$

$$SR_4 = (SR_3 + B_4)\,1{,}0p - V_4$$
$$= B_1 . 1{,}0p^4 + B_2 . 1{,}0p^3 + B_3 . 1{,}0p^2 + B_4 . 1{,}0p$$
$$- [V_1 . 1{,}0p^3 + V_2 . 1{,}0p^2 + V_3 . 1{,}0p + V_4]$$

u. s. w. Das Ableitungsgesetz tritt deutlich hervor und es ist allgemein:

$$5)\qquad SR_n = B_1 . 1{,}0p^n + B_2 . 1{,}0p^{n-1} + \ldots . B_{n-1} . 1{,}0p^2 + B_n . 1{,}0p$$
$$- [V_1 . 1{,}0p^{n-1} + V_2 . 1{,}0p^{n-2} + \ldots . V_{n-1} . 1{,}0p + V_n].$$

Diese Gleichung stimmt mit No. 6) §. 93. überein.

Die bisher entwickelten Gleichungen gehen von der Voraussetzung aus, dass jährliche Beiträge eingezahlt werden. Werden aber einmalige Einkaufssummen angenommen, so ergibt sich hiefür folgende

Vierte Methode. Man bringe den Betrag sämmtlicher Einkaufssummen, welche durch $E = A_a . E_a$ bezeichnet werden sollen, auf den Schluss des $n$ten Jahres und ebenso sämmtliche Versicherungssummen V_1, V_2, V_3,.... V_n auf den gleichen Zeitpunkt zurück. Geschieht diess, so ergibt sich für den Bestand der Gesammtreserve am Ende des $n$ten Jahres folgende Bestimmung:

6)

$$SR_n = E . 1{,}0p^n - [V_1 . 1{,}0p^{n-1} + V_2 . 1{,}0p^{n-2} + \dots V_{n-1} . 1{,}0p + V_n].$$

§. 95.

Berechnung der Reserve bei vierteljährlichen Auszahlungen.

Die Statuten der verschiedenen Gesellschaften enthalten gewöhnlich die Bestimmung, dass die Versicherungssummen drei Monate nach Einlauf der gültig anerkannten Sterbepapiere ausgezahlt werden.

Hiernach müssen vierteljährliche Auszahlungen in Rechnung gebracht werden. Geht man von der Voraussetzung des gleichen Absterbens binnen Jahresfrist aus, so ist in den verschiedenen Vierteljahren der einzelnen Jahre

$$\tfrac{1}{4} M_{a+r-1} K = \tfrac{1}{4} V_r$$

auszuzahlen. Diese Art der Auszahlung setzt vierteljährliche Verzinsung voraus, und diese ist dann der Harmonie wegen auf Einnahmen und Ausgaben anzuwenden. In diesem Falle stellt sich der Calcul anders und in folgender Weise fest, wenn man der Kürze wegen den vierteljährlichen Zins durch $\tfrac{1}{4} . \frac{p}{100} = p_1$ bezeichnet.

Die Beiträge des $r$ten Jahres erwachsen bei vierteljähriger Verzinsung zu der Summe $B_r . 1{,}0p_1{}^4$. Die vierteljährige Auszahlung der Versicherungssummen desselben Jahres führt dann auf folgenden Werth:

$$\tfrac{1}{4} V_r . 1{,}0p_1{}^3 + \tfrac{1}{4} V_r . 1{,}0p_1{}^2 + \tfrac{1}{4} V_r . 1{,}0p_1 + V_r = \tfrac{1}{4} V_r . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1}.$$

Der Bestand der Reserve des *r*ten Jahres für sich ist daher nach §. 93. erste Methode:

$$1)\qquad R_r = B_r . 1{,}0p_1{}^4 - \tfrac{1}{4} V_r . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1}.$$

Man kann nun nach einer der in §. 93. und §. 94. angegebenen Methoden verfahren und wird dann den Bestand der Gesammtreserve für die verschiedenen Jahre durch folgende Formeln erhalten:

$$2)\qquad R_1 = B_1 . 1{,}0p_1{}^4 - \tfrac{1}{4} V_1 . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1},$$

3)

$$SR_2 = (R_1 + B_2) . 1{,}0p_1{}^4 - \tfrac{1}{4} V_2 . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1} = B_1 . 1{,}0p_1{}^8 + B_2 . 1{,}0p_1{}^4$$

$$- \tfrac{1}{4} V_1 . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p} . 1{,}0p_1{}^4 - \tfrac{1}{4} V_2 . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1},$$

$$4)\qquad SR_3 = (SR_2 + B_3)\, 1{,}0p_1{}^4 - \tfrac{1}{4} V_3 . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1}$$

$$= B_1 . 1{,}0p_1{}^{12} + B_2 . 1{,}0p_1{}^8 + B_3 . 1{,}0p_1{}^4$$

$$- \tfrac{1}{4} . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1} [V_1 . 1{,}0p_1{}^8 + V_2 . 1{,}0p_1{}^4 + V_3].$$

Hiernach ergibt sich der Bestand der Reserve am Ende des *n*ten Jahres auf folgende Weise:

$$5)\qquad SR_n = (SR_{n-1} + B_n)\, 1{,}0p_1{}^4 - \tfrac{1}{4} V_n . \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{0{,}0p_1}$$

$$= B_1 . 1{,}0p_1{}^{4n} + B_2 . 1{,}0p_1{}^{4n-4} + \ldots B_{n-1} . 1{,}0p_1{}^8 + B_n . 1{,}0p_1{}^4$$

$$- \frac{1{,}0p_1{}^4 - 1}{4 . 0{,}0p_1} [V_1 . 1{,}0p_1{}^{4n-4} + V_2 . 1{,}0p_1{}^{4n-8} \ldots V_{n-1} . 1{,}0p_1{}^4 + V_n].$$

§. 96.

Vergütung aus dem Reservefonds.

Die Versicherungsbanken, und namentlich die Gothaer, gestatten ihren Mitgliedern den freiwilligen Austritt aus der Gesellschaft. Bei kurzen Versicherungen hört in diesem Falle der Anspruch auf Vergütung auf. Bei Versicherungen auf die Lebensdauer aber wird dem Inhaber einer Police gegen Rückgabe derselben

eine besondere, nach festgestellten Grundsätzen zu berechnende Vergütung aus dem Reservefonds, unbeschadet seines Anspruchs auf die ihm noch gebührenden Dividenden-Antheile, gewährt.

Es entsteht daher die Frage: wie gross der Betrag dieser Vergütung für die von einem austretenden Mitgliede geleisteten Beiträge zu bemessen ist. Diese Frage wird sich in folgender Weise beantworten lassen.

Eine Anzahl $a$alteriger Personen (A_a) vereinigen sich, um sich gegenseitig eine Summe K zu versichern, welche bei dem eintretenden Todesfall des Einzelnen ausgezahlt wird. Sie bestreiten die hiezu nöthigen Auslagen durch jährliche gleiche Beiträge und lassen das Vermögen der Gesellschaft auf ihre Kosten verwalten. Nach Umfluss von n Jahren, innerhalb welcher die Beiträge und Versicherungssummen ordnungsmässig ein- und ausgezahlt wurden, beschliessen die noch übrigen Mitglieder, die Gesellschaft aufzulösen. Es fragt sich: welche Summe hat jedes der vorhandenen Mitglieder anzusprechen?

Offenbar wird jeder über die Entscheidung Befragte antworten: die in der Casse vorhandene Summe ist Eigenthum der noch vorhandenen Mitglieder und im Auflösungsfalle muss die vorräthige Summe unter sämmtliche noch lebende Mitglieder im Verhältniss ihrer bisher geleisteten Beiträge vertheilt werden. Der in der Casse vorhandene Vorrath ist aber in der That nichts anderes, als die Reserve.

Da nun jedem Mitgliede der Austritt aus der Versicherungs-Gesellschaft zu jeder Zeit freisteht und ihm in diesem Falle eine Vergütung zugesagt ist, so fällt diese Frage mit der obigen zusammen. Sie unterscheidet sich von ihr nur dadurch, dass die Gesellschaft nach dem Austritt des Einzelnen noch fortbesteht und der Rest der Reserve Eigenthum der Gesellschaft bleibt.

Bezeichnet man nun das Verhältniss des Beitrags eines einzelnen Mitgliedes zu der Summe der Beiträge der vorhandenen Mitglieder oder, was dasselbe ist, der versicherten Summe zu der Gesammt-Versicherungssumme durch $\frac{b_1}{B}$, so bestimmt sich die fragliche Rückvergütungssumme durch:

$$1)\qquad G = \frac{b_1 \, . \, SR_n}{B},$$

oder, wenn der Werth für SR_n aus §. 93. oder §. 94. eingeführt wird:

$$2) \quad G = \frac{b_1}{B}[B_1 . 1{,}0p^n + B_2 . 1{,}0p^{n-1} + \ldots B_{n-1} . 1{,}0p^2 + B_n . 1{,}0p]$$

$$- \frac{b_1}{B}[V_1 . 1{,}0p^{n-1} + V_2 . 1{,}0p^{n-2} + \ldots V_{n-1} . 1{,}0p + V_n].$$

Die Statuten der Gothaer Lebensversicherungsbank enthalten über die Berechnung der fraglichen Vergütung folgende Bestimmung:

„Die Höhe dieser Vergütung wird bedingt durch das Verhältniss der nach den Berechnungen der Bank auf die Versicherung treffenden Reserve zur Versicherungssumme. Beträgt die Reserve nicht mehr als 20 Procent der Versicherungssumme, so wird dermalen die Hälfte der Reserve als Abgangs-Entschädigung gewährt. Beträgt sie mehr als 20 Procent, so findet bis auf Weiteres eine progressive Rückvergütung Statt, und zwar dergestalt, dass

wenn die Reserve 20—22 der Versicherungssumme ausmacht, eine Rückvergütung von 51 Proc.
„ „ „ 22—24 „ „ 52 „
„ „ „ 24—26 „ „ 53 „

u. s. f. dieser Reserve geleistet wird, so dass sich mit dem absoluten Werthe der Police auch das Verhältniss ihres Rückkaufspreises erhöht und ein allmäliger Uebergang zu dem Punkte Statt findet, wo bei dem Anwachsen der Reserve zur vollen Versicherungssumme letztere nach §. 63. schon bei Lebzeiten ausbezahlt wird (Vorstands-Beschluss vom 15. Mai 1847). Die Reserve einer Versicherung ist auf ungefähr die Hälfte der für dieselben eingezahlten Prämien anzuschlagen."

Die Grundsätze, woraus die von der Gothaer Lebensversicherungs-Bank gewählte Berechnungsweise abgeleitet ist, sind wie mir scheint nicht deutlich erkennbar. Sie enthält nach meiner Ansicht eine ziemlich willkührliche Bestimmung, wenn auch ihre Resultate mit denen der oben angegebenen, was aber kaum vorauszusetzen ist, zusammentreffen sollten. Auch die im letzten Satze aufgestellte Behauptung scheint nicht zutreffend zu sein. Jede in der Mathematik aufzustellende Methode muss eine durchsichtige, allgemein verständliche und eben deswegen bindende Grundlage haben. Diese Eigenschaft ist in der von der Gothaer Bank angegebenen Berechnungsweise schwer zu erkennen.

§. 97.

Berechnung des Sicherheitsfonds.

Der Sicherheitsfonds wird von den angesammelten jährlichen

reinen Ueberschüssen gebildet. Der reine Ueberschuss eines Jahres ist die Summe, welche nach Abzug der Ausgaben sammt Verwaltungskosten und der Reserve, so wie der sogenannten Ueberträge von der Einnahme übrig bleibt und bildet den Vorrath für die Dividende.

Bei dieser Rechnung muss daher noch ein weiterer Bestandtheil, die Verwaltungskosten, aufgenommen werden. Bezeichnet man die Verwaltungskosten der verschiedenen Jahre durch W_1, W_2, W_3,...., den Sicherheitsfonds durch S_1, S_2, S_3,...., und behält die frühere Bezeichnungsweise bei, so bestimmt sich der Sicherheitsfonds am Ende des ersten Jahres durch

$$1)\qquad S_1 = B_1 . 1{,}0q - (R_1 + V_1 + W_1) = B_1 . 1{,}0q - Q_1,$$

des zweiten Jahres:

$$2)\qquad S_2 = (S_1 + B_2)\, 1{,}0q - Q_2$$
$$= B_1 . 1{,}0q^2 + B_2 . 1{,}0q - Q_1 . 1{,}0q - Q_2$$

u. s. w.; und hieraus allgemein nach Analogie der Gleichungen in §. 93. und §. 94.:

$$3)\qquad S_n = (S_{n-1} + B_n)\, 1{,}0q - Q_n$$
$$= B_1 . 1{,}0q^n + B_2 . 1{,}0q^{n-1} .... B_{n-1} . 1{,}0q^2 + B_n . 1{,}0q$$
$$- (Q_1 . 1{,}0q^{n-1} + Q_2 . 1{,}0q^{n-2} .... Q_{n-1} . 1{,}0q + Q_n),$$

wenn $Q_n = R_n + V_n + W_n$ die Summe sämmtlicher Ausgaben und B_n sämmtliche Einnahmen eines Jahres, q aber den Zinsfuss, worin die Kapitalwerthe der Bank angelegt sind, bezeichnet. Die Reserve (R_n) ist im Zinsfuss p zu bestimmen. Die Auswerthung von No. 3) unterliegt keiner weitern Schwierigkeit. Bei vierteljährlichen Auszahlungen kommen die Bestimmungen des §. 95. zur Anwendung.

§. 98.

Methoden für die Berechnungsweise der Reserve.

Da die Berechnung der Reserve für die Versicherungsbanken von Wichtigkeit ist, so mögen hiefür folgende Methoden angegeben werden.

Erste Methode. Sie ergibt sich aus der Gleichung No. 5) §. 93.:

$$1)\quad SR_n = R_1 . 1{,}0p^{n-1} + R_2 . 1{,}0p^{n-2} + \ldots . R_{n-1} . 1{,}0p + R_n$$

und besteht darin, dass man den Bestand der Reserve eines jeden Jahres für sich nach der Formel

$$2)\quad R_r = B_a . A_{a+r-1} . 1{,}0p - M_{a+r-1} . K$$

für den Werth K oder $K=1$ berechnet und dann jeden einzelnen Werth mit der zugehörigen Potenz von $1{,}0p$ verbindet und sämmtliche Glieder summirt.

Soll der Bestand der Reserve am Schlusse des vierten Jahres nach der Tafel von Northampton bei 3 Procent und $K=100$, wenn man von dem 80sten Jahre ausgeht, berechnet werden, so ist aus No. 1):

$$SR_4 = R_1 . 1{,}03^3 + R_2 . 1{,}03^2 + R_3 . 1{,}03 + R_4 .$$

Aus No. 10) §. 87. hat man $B_{80} = 18{,}893 \ldots . = 18{,}9$, und aus No. 2):

$$R_4 = 40 . 18{,}9 . 1{,}03 - 5 . 100 = 778{,}68 - 500 = 278{,}68,$$

$$R_2 = 35 . 18{,}9 . 1{,}03 - 5 . 100 = 681{,}345 - 500 = 181{,}345,$$

$$R_3 = 30 . 18{,}9 . 1{,}03 - 5 . 100 = 584{,}01 - 500 = 84{,}01,$$

$$R_4 = 25 . 18{,}9 . 1{,}03 - 5 . 100 = 486{,}675 - 500 = -13{,}325,$$

und hieraus nach No. 1):

$$3)\quad SR_4 = 287{,}68 . 1{,}03^3 + 181{,}345 . 1{,}03^2 + 84{,}01 . 1{,}03 - 13{,}325$$

$$= 304{,}521 + 192{,}388 + 86{,}530 - 13{,}325$$

$$= 583{,}439 - 13{,}325 = 570{,}114.$$

Zweite Methode. Sie beruht auf der Durchführung der Gleichung No. 7) §. 93.:

$$4)$$

$$SR_n = B_a [A_a . 1{,}0p^n + A_{a+1} . 1{,}0p^{n-1} + \ldots . A_{a+n-2} . 1{,}0p^2 + A_{a+n-1} . 1{,}0p]$$

$$- K [M_a . 1{,}0p^{n-1} + M_{a+1} . 1{,}0p^{n-2} \ldots . M_{a+n-2} . 1{,}0p + M_{a+n-1}].$$

Man hat sofort der Reihe nach die Zahl der Lebenden mit den zugehörigen Potenzen von $1{,}0p$ zu verbinden, die hieraus entstehenden Producte zu summiren und die erhaltene Summe mit dem Jahresbeitrag zu multipliciren. Dasselbe hat mit der Zahl der Sterbenden zu geschehen; die entstehende Summe ist

mit der Versicherungssumme K zu multipliciren und das zuletzt erhaltene Resultat von dem ersten abzuziehen.

Wird das oben gegebene Beispiel hiernach behandelt, so entsteht:

5)

$$\begin{aligned}SR_4 &= 18,9(40.1,03^4+35.1,03^3+30.1,03^2+25.1,03)\\ &\quad -100(5.1,03^3+5.1,03^2+5.1,03+5)\\ &= 18,9(45,020352+38,245445+31,827+25,75)\\ &\quad -5:100.4,1836270\\ &= 2661,9288-2091,8135=570,1153.\end{aligned}$$

Ist nach dieser Methode der Stand der Reserve für das $n$te Jahr festgestellt, so kann man hieraus leicht auf den des $(n+1)$ten Jahres übergehen. Hierzu dient folgende, aus No. 7) §. 93. abgeleitete Formel:

6)

$$\begin{aligned}&SR_{n+1}\\ &= B_a[(A_a.1,0p^n+A_{a+1}.1,0p^{n-1}\ldots\ldots A_{a+n-1}.1,0p).1,0p+A_{a+n}.1,0p]\\ &\quad -K[(M_a.1,0p^{n-1}+M_{a+1}.1,0p^{n-2}\ldots\ldots M_{a+n-1}).1,0p+M_{a+n}].\end{aligned}$$

Hiernach hat man den nach No. 4) für die beiden Reihen erhaltenen Werth mit $1,0p$ zu multipliciren, dann $B_a.A_{a+n}.1,0p$ zu- und $K.M_{a+n}$ abzuzählen.

Hat man es in den zwei angegebenen Methoden nicht mit ungleichen Beiträgen und Versicherungssummen von einzelnen Mitgliedern zu thun, so wird es am besten sein, die Gleichungen No. 5) und No. 6) §. 93. dem Calcul zu Grunde zu legen. Man kann aber auch, da alle Beiträge und Versicherungssummen auf Vielfachen von 100 beruhen, den Bestand der Reserve auf 100 reduciren und von dem so erhaltenen Werthe auf die Gesammt-Versicherungssumme übergehen.

Dritte Methode. Sie gründet sich darauf, dass man die Glieder der negativen Reihe in No. 4) nach der Formel

$$M_{a+r}=A_{a+r}-A_{a+r+1}$$

in zwei zerlegt. Dadurch entsteht:

$$\begin{aligned}SR_n &= B_a(A_a.1,0p^n+A_{a+1}.1,0p^{n-1}\ldots\ldots+A_{a+n-2}.1,0p^2+A_{a+n-1}.1,0p)\\ &\quad -K(A_a.1,0p^{n-1}+A_{a+1}.1,0p^{n-2}\ldots\ldots A_{a+n-2}.1,0p+A_{a+n-1})\\ &\quad +K(A_{a+1}.1,0p^{n-1}+A_{a+2}.1,0p^{n-2}\ldots\ldots A_{a+n-1}.1,0p+A_{a+n}).\end{aligned}$$

In der dritten Reihe fehlt das erste Glied $K.A_a.1,0p^n$. Zählt man dieses der Vervollständigung wegen zu und ab und scheidet

das Schlussglied der dritten, $K.A_{a+n}$, aus, so kann man die dritte und erste Reihe in eine vereinigen und man erhält:

$$SR_n$$
$$= (B_a+K)[A_a.1{,}0p^n+A_{a+1}.1{,}0p^{n-1}+\ldots A_{a+n-2}.1{,}0p^2+A_{a+n-1}.1{,}0p]$$
$$-K[A_a.1{,}0p^{n-1}+A_{a+1}.1{,}0p^{n-2}\ldots A_{a+n-2}.1{,}0p+A_{a+n-2}]$$
$$-K.A_a.1{,}0p^n+K.A_{a+n}.$$

Scheidet man nun den Factor $1{,}0p$ aus der ersten Reihe, so vereinigen sich beide Reihen und es entsteht:

$$SR_n = [(B_a+K)1{,}0p-K]$$
$$\times[A_a.1{,}0p^{n-1}+A_{a+1}.1{,}0p^{n-2}+\ldots A_{a+n-2}.1{,}0p+A_{a+n-1}]$$
$$-K(A_a.1{,}0p^n-A_{a+n}).$$

Da nun

$$(B_a+K)1{,}0p-K=B_a.1{,}0p-0{,}0p.K=\frac{B_a(100+p)+pK}{100}$$

ist, so ergibt sich hieraus für die Berechnung des Standes der Reserve am Ende des $n$ten Jahres folgende sehr praktische Formel:

$$7)\qquad SR_n=\frac{B_a(100+p)+pK}{100}$$
$$\times[A_a.1{,}0p^{n-1}+A_{a+1}.1{,}0p^{n-2}+\ldots A_{a+n-2}.1{,}0p+A_{a+n-1}]$$
$$-K[A_a.1{,}0p^n-A_{a+n}].$$

Zugleich hat man hieraus für den Stand der Reserve am Ende des $(n+1)$ten Jahres:

$$8)\qquad SR_{n+1}=\frac{(B_a(100+p)+pK)}{100}$$
$$\times[(A_a.1{,}0p^{n-1}+A_{a+1}.1{,}0p^{n-2}\ldots+A_{a+n-1}).1{,}0p+A_{a+n}]$$
$$-K.[A_a.1{,}0p^{n+1}-A_{a+n+1}],$$

und man kann, wie aus der Vergleichung von No. 8) hervorgeht, den in der Reihe von No. 7) gefundenen Werth benutzen, ihn mit $1{,}0p$ multipliciren, hiezu A_{a+n} zahlen, dann mit dem vorgeschriebenen Factor verbinden und leicht durch Anschluss des negativen Gliedes in No. 8) von der Reserve des Vorjahres auf die des folgenden übergehen.

Benutzt man nun die Gleichung zur Berechnung des oben angegebenen Falles, so ist der Bestand der Reserve am Ende des vierten Jahres für ein Alter von 80 Jahren nach der Sterblichkeitstafel von Northampton:

$$9)\quad SR_4 = \frac{18{,}9.1{,}03+3.100}{100}(40.1{,}03^3+35.1{,}03^2+300.1{,}03+25)$$
$$-100(40.1{,}03^4-20)$$
$$=22{,}467(43{,}70908+37{,}1315+30{,}9+25)-100(45{,}020352-20)$$
$$=3072{,}15061-2502{,}0352=570{,}1154.$$

Man kann übrigens auch diese Methode ganz allgemein benutzen, wenn man die oben zur zweiten Methode gemachte Bemerkung berücksichtigt.

§. 99.

Fortsetzung.

Vierte Methode. Diese Methode beruht auf der Gleichung No. 1) §. 94. und dient zugleich dazu, die Richtigkeit der bisher aufgefundenen Methoden, so wie das über die Berechnung der Vergütung aus dem Reservefonds, §. 96., Gesagte zu bestätigen.

Sie besteht darin, dass man von dem Bestand der Reserve des Vorjahrs allmälig auf die der folgenden Jahre übergeht, wie die Formel

$$1)\qquad SR_n = (SR_{n-1} + B_n)\,1{,}0p - V_n$$

verlangt, und ist der Anlage nach ganz allgemein, wie aus dem Inhalt dieser Gleichung hervorgeht. Man erhält durch ihre Anwendung die Bestände der Reserve auf mehrere Jahre.

Soll hiernach die Reserve für das Alter von 80 Jahren nach der Tafel von Northampton auf die folgenden zehn Jahre, also bis zum 90sten Jahre, wo die Versicherung von 100 spätestens gezahlt wird, berechnet werden, so ergibt sich hieraus folgende Zusammenstellung:

80stes Jahr.	Summe der Beiträge: 40.18,9	756
	Zins zu 3 Procent hinzu	22,68
		778,68
	5 Versicherungen zu 100 ab	500
81 „ „	Reserve des ersten Jahres	278,68
	Summe der Beiträge: 35.18,9	661,5
		940,18
	Zins hinzu	28,21
		968,39
	5 Versicherungen ab	500
82 „ „	Reserve des zweiten Jahres	468,39
	Summe der Beiträge: 30.18,9	567
		1035,39
	Zins hinzu	31,06
		1066,45
	5 Versicherungen ab	500
83 „ „	Reserve des dritten Jahres	566,45

83stes Jahr.	Reserve des dritten Jahres	566,45
	Summe der Beiträge: 25.18,9	472,5
		1038,95
	Zins hinzu	31,16
		1070,11
	5 Versicherungen ab	500
84 „ „	Reserve des vierten Jahres	570,11
	Summe der Beiträge: 20.18,9	378
		948,11
	Zins hinzu	28,44
		976,55
	4 Versicherungen ab	400
85 „ „	Reserve des fünften Jahres	576,55
	Summe der Beiträge: 16.18,9	302,4
		878,95
	Zins hinzu	26,37
		905,32
	4 Versicherungen ab	400
86 „ „	Reserve des sechsten Jahres	505,32
	Summe der Beiträge: 12.18,9	226,8
		732,12
	Zins hinzu	21,96
		754,08
	3 Versicherungen ab	300
87 „ „	Reserve des siebenten Jahres	454,08
	Summe der Beiträge: 9.18,9	170,1
		624,18
	Zins hinzu	18,73
		642,91
	2 Versicherungen ab	200
88 „ „	Reserve des achten Jahres	442,91
	Summe der Beiträge: 7.18,9	132,3
		575,21
	Zins hinzu	17,26
		592,47
	2 Versicherungen ab	200
89 „ „	Reserve des neunten Jahres	392,47
	Summe der Beiträge: 5.18,9	94,5
		486,97
	Zins hinzu	14,61
		501,58
	5 Versicherungen ab	500
90 „ „	Reserve des zehnten Jahres	1,58

Von hier an ist die Gesellschaft geschlossen. Der Ueberschuss in dem kleinen Betrage von 1,58 rührt davon her, dass die Beiträge mit 18,9 statt 18,89.... der Kürze wegen in Rechnung genommen wurden.

Diese Rechnung geht von der Voraussetzung aus, dass alle eingetretenen Mitglieder sich mit gleichen Summen betheiligen. Diese Beschränkung ist jedoch leicht zu entfernen. Man kann nämlich nach dieser Rechnung auf jede beliebige Versicherungssumme für das einzelne Mitglied übergehen, wenn man die Reserve eines bestimmten Jahres auf die Versicherungssumme 100 zurückführt und von der so erhaltenen Quote auf die entsprechende Grösse in der Reserve übergeht, was leicht geschehen kann, da die Versicherungssummen zu einander in demselben Verhältnisse, wie die Beiträge stehen.

Soll hiernach der Bestand der Reserve des vierten Jahres, worin noch 20 Mitglieder, also auch 20 Versicherungssummen zu je 100 vorhanden sind, bestimmt werden, wenn ein Mitglied mit 500, ein zweites mit 300 und die übrigen mit je 100 versichert sind, so beträgt die Reserve für je 100:

$$\frac{570,11}{20} = 28,5055,$$

folglich für eine Versicherung von 500:	142,5275,
„ „ „ „ 300:	85,5165,
18 Versicherungen von 100:	513,099
	741,143.

Dasselbe Resultat erhält man auch auf folgende Weise. In der Bank sind 26 Hundert statt 20 unter den angegebenen Bedingungen versichert. Die Reserve muss sich daher in gleichem Verhältniss höher stellen. Die Reserve des vierten Jahres beträgt daher in diesem Falle:

$$R_4 = \frac{26}{20} . 570,11 = 741,143.$$

Werden in dieser Weise Reservetabellen für die verschiedenen Altersklassen von den Gesellschaften angefertigt und angelegt, so wird hiedurch die Berechnung der Reserve ungemein erleichtert werden.

Die Berechnung des Standes der Reserve für die Einzahlung einmaliger Einkaufssummen ergibt sich nach der vierten Methode §. 94. noch einfacher, weswegen sie nicht besonders hier durchgeführt wird.

§. 100.

Berechnung der Vergütung im Falle des Austritts.

Diese Vergütung berechnet sich nach §. 96. leicht, indem der so vielte Theil der Reserve zu vergüten ist, als die versicherte Summe des austretenden Mitgliedes von der Gesammt-Versicherungssumme beträgt. Hiernach berechnet sich die zu gewährende Vergütung aus dem Reservefonds für 100 nach §. 99. im vorliegenden Falle für den Schluss

des 4ten Jahres auf $\frac{570,11}{20} = 28,505 \ldots,$

„ 5ten „ „ $\frac{576,55}{16} = 36,03,$

„ 6ten „ „ $\frac{505,32}{12} = 42,11,$

„ 7ten „ „ $\frac{454,08}{9} = 50,49,$

u. s. w.

Nach der von der Gothaer Bank angenommenen Methode beträgt die Reserve des 4ten Jahres 28,505 Procent von der Versicherungssumme. Es würden also nach dem Wortlaut der in §. 96 gegebenen Vorschrift 55 Procent von der auf die Versicherung treffenden Summe, also:

$$\frac{28,5 . 55}{100} = 15,675,$$

im fünften Jahre

$$\frac{36,03 . 58}{100} = 20,897$$

u. s. w. ausgezahlt werden.

Es ist einleuchtend, dass die Bank sich gegen mögliche Ausfälle zu decken sucht, diese Absicht könnte aber sachgemässer durch Abzug bestimmter Procente erreicht werden. Da aber die Gesellschaft durch den Sicherheitsfonds gegen mögliche Ausfälle schon gedeckt ist, so dürfte auch hiefür keine besondere Befürchtung vorliegen, denn eine Gesellschaft gewinnt gerade dadurch an Vertrauen, dass sie die Ansprüche ihrer Mitglieder, auch im Falle des Austritts, in vollem Maasse anerkennt und befriedigt.

Dass aber der Austritt eines Mitgliedes nicht nothwendig auf

Verlust für die Casse führt, lässt sich nach der hier aufgestellten Rechnungsweise dadurch zeigen, dass man im Falle des Austritts einer Person die volle Vergütung in Ausgabe nimmt und dann für die noch übrig bleibenden Mitglieder die Rechnung fortsetzt. Nur bei ungünstigen Annahmen wird sich ein Ausfall, jedoch kein bedeutender, herausstellen, wie sich diess bei Durchführung der Rechnung und bei Annahme verschiedener Möglichkeiten leicht zeigen wird.

§. 101.

Werthbestimmung halbjährlicher und vierteljährlicher Beiträge.

Einzelne Versicherungsgesellschaften gestatten halbjährliche und vierteljährliche Beiträge, und zwar entweder in der Weise, dass der jährliche Beitrag den Zeitfristen entsprechend in gleiche Theile getheilt, die erste Zahlung ohne Zins, die folgenden aber mit Zinszuschlag gemacht werden; oder dass statt des jährlichen Beitrags gleiche halbjährliche oder vierteljährliche erhoben werden.

Im ersten Falle ist die Sache ganz einfach. Im zweiten Falle ergibt sich der halbjährliche Beitrag auf folgende Weise. Nennt man den halbjährlichen Beitrag B_2, den ganzjährigen B_a, den Zinsfuss p, also den halbjährlichen $\frac{1}{2}p = p_1$, so hat man, da die halbjährlichen Beiträge gleich sind:

$$B_a = B_2 + \frac{B_2}{1{,}0p_1} = 1{,}0p_1\left(\frac{B_2}{1{,}0p_1} + \frac{B_2}{1{,}0p_1^{\,2}}\right) = B_2 . 1{,}0p_1 . \frac{1-1{,}0p_1^{\,-2}}{0{,}0p_1},$$

und hieraus:

$$1)\qquad B_2 = \frac{B_a}{1{,}0p_1} . \frac{0{,}0p_1}{1-1{,}0p_1^{\,-2}}.$$

Wird der vierteljährliche Beitrag B_4 und der vierteljährliche Zins $\frac{1}{4}p = p_1$ gesetzt, so ergibt sich in gleicher Weise:

$$B_a = B_4 + \frac{B_4}{1{,}0p_1} + \frac{B_4}{1{,}0p_1^{\,2}} + \frac{B_4}{1{,}0p_1^{\,3}}$$

$$= B_4 . 1{,}0p_1\left(\frac{1}{1{,}0p_1} + \frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} + \frac{1}{1{,}0p_1^{\,3}} + \frac{1}{1{,}0p_1^{\,4}}\right) = B_4 . 1{,}0p_1 . \frac{1-1{,}0p_1^{\,-4}}{0{,}0p_1},$$

und hieraus:

$$2)\qquad B_4 = \frac{B_a}{1{,}0p_1} . \frac{0{,}0p_1}{1-1{,}0p_1^{\,-4}}.$$

Man kann zwar, wie diess in Lehrbüchern geschieht, den

vierteljährlichen Beitrag durch die Rechnung mit einfachen Zinsen bestimmen. Dann entsteht für $p_1 = \frac{1}{4}p$:

$$B_a = B_4 + \frac{B_4}{1{,}0p_1} + \frac{B_4}{1{,}02p_1} + \frac{B_4}{1{,}03p_1},$$

und hieraus:

$$3) \qquad B_4 = \frac{B_a}{1 + \frac{1}{1{,}0p_1} + \frac{1}{1{,}02p_1} + \frac{1}{1{,}03p_1}}.$$

Nach den im ersten Kapitel aufgestellten Grundsätzen erscheint aber diese Darstellung nicht richtig, obgleich die hieraus sich ergebenden Werthe nur unbedeutend von den aus No. 2) folgenden differiren werden.

Setzt man in den hier gefundenen Formeln $p = 4$, so bestimmt sich der halbjährliche Beitrag bei einer Versicherung von 1000 für einen 40jährigen Mann nach Brune's Tafel, wenn $B_{40} = 28{,}836$ in No. 1) gesetzt wird:

$$4) \qquad B_2 = \frac{28{,}836 \cdot 0{,}02}{1{,}02(1 - 1{,}02^{-2})} = \frac{28{,}836}{1{,}02 \cdot 1{,}9415609} = 14{,}561;$$

der vierteljährliche bestimmt sich nach No. 2) zu:

$$5) \qquad B_4 = \frac{28{,}836 \cdot 0{,}01}{1{,}01(1 - 1{,}01^{-4})} = \frac{28{,}836}{1{,}01 \cdot 3{,}9019656} = 7{,}3171.$$

Aus No. 3) würde man erhalten:

$$6) \qquad B_4 = \frac{28{,}836}{1 + \frac{1}{1{,}01} + \frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}03}} = \frac{28{,}836}{3{,}9419048} = 7{,}3152.$$

Hieraus bestätigt sich die obige Bemerkung, dass der Unterschied, welcher nach den Gleichungen No. 2) und No. 3) hervortreten muss, unbedeutend ist und sich erst in den zwei letzten Decimalstellen zeigt.

Bei grössern Summen, die jedoch nach den Statuten der Gesellschaften bestimmte Grenzen nicht überschreiten dürfen, wird dieser Unterschied bemerkbar hervor treten. Beträgt die Versicherung 20000, die höchste versicherbare Summe in der Wiener Bank, so ist nach No. 2) der vierteljährliche Beitrag bei 4 Procent: $B_4 = 146{,}342$ fl. $= 146$ fl. 21 kr.; nach No. 3) ist derselbe: $B_4 = 146{,}304$ fl. $= 146$ fl. 18 kr., und ist daher erst in den Kreuzern zum Nachtheile der Bank verschieden. Bei höherm Zinsfuss würde der Unterschied etwas stärker hervortreten.

1. **Tafel der Leibrenten und Lebensversicherungen nach der Sterblichkeits-Ordnung von Northampton.**

2. **Tafel der Leibrenten und Lebensversicherungen nach Deparcieux, berechnet von Hattendorf.**

3. **Tafel der Leibrenten nach der Sterblichkeitstafel von Finlaison, berechnet von Martin Kasten in Frankfurt. Für Männer und Frauen.**

4. **Tafel der Leibrenten und Lebensversicherungen nach Brune, berechnet von Hattendorf. Für Männer und Frauen.**

Die einmaligen Einkaufssummen für Lebensversicherungen berechnen sich aus den Leibrenten nach den in den §§. 82.—84. angegebenen Gleichungen; die jährlichen Beiträge (Prämien) für Lebensversicherungen aus den in den §§. 85.—88. angegebenen.

Tafel der Leibrenten und Lebensversicherungen nach der Sterblichkeitstafel von Northampton.

Alter.	Zahl der Lebenden. A_a.	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1. 3 Proc. L_a.	4 Proc. L_a.	Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100. 3 Proc. B_a.
0	11650			
1	8650	16,021	13,465	
2	7283	18,599	15,633	
3	6781	19,575	16,462	
4	6446	20,210	17,010	
5	6249	20,473	17,248	
6	6065	20,727	17,482	
7	5925	20,858	17,611	
8	5815	20,885	17,662	1,879
9	5735	20,812	17,625	1,879
10	5675	20,663	17,523	1,879
11	5623	20,480	17,393	1,879
12	5573	20,288	17,251	1,879
13	5523	20,081	17,103	1,879
14	5473	19,872	16,950	1,879
15	5423	19,657	16,791	1,929
16	5373	19,435	16,625	1,983
17	5320	19,218	16,462	2,033
18	5262	19,013	16,309	2,083
19	5199	18,820	16,167	2,133
20	5132	18,638	16,033	2,179
21	5060	18,470	15,912	2,225
22	4985	18,311	15,797	2,267
23	4910	18,148	15,680	2,312
24	4835	17,983	15,560	2,354
25	4760	17,814	15,438	2,403
26	4685	17,642	15,312	2,450
27	4610	17,467	15,184	2,504
28	4535	17,289	15,053	2,554
29	4460	17,107	14,918	2,612
30	4385	16,922	14,781	2,671

Alter.	Zahl der Lebenden. A_a.	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1. 3 Proc. L_a.	4 Proc. L_a.	Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100. 3 Proc. B_a.
31	4310	16,732	14,639	2,725
32	4235	16,540	14,495	2,787
33	4160	16,343	14,347	2,854
34	4085	16,142	14,195	2,921
35	4010	15,938	14,039	2,992
36	3935	15,729	13,880	3,067
37	3860	15,515	13,716	3,142
38	3785	15,298	13,548	3,225
39	3710	15,075	13,375	3,308
40	3635	14,848	13,197	3,396
41	3559	14,620	13,018	3,487
42	3482	14,391	12,838	3,583
43	3404	14,162	12,657	3,683
44	3326	13,929	12,472	3,787
45	3248	13,692	12,283	3,896
46	3170	13,450	12,089	4,008
47	3092	13,203	11,890	4,129
48	3014	12,951	11,685	4,254
49	2936	12,693	11,475	4,392
50	2857	12,436	11,264	4,533
51	2776	12,183	11,057	4,675
52	2694	11,930	10,849	4,821
53	2612	11,674	10,637	4,979
54	2530	11,414	10,421	5,142
55	2448	11,150	10,201	5,317
56	2366	10,882	9,977	5,504
57	2284	10,611	9,749	5,700
58	2202	10,337	9,516	5,908
59	2120	10,058	9,280	6,133
60	2038	9,777	9,039	6,367
61	1956	9,493	8,795	6,617
62	1874	9,205	8,547	6,887
63	1793	8,910	8,291	7,179
64	1712	8,611	8,030	7,492
65	1632	8,304	7,761	7,837

Alter.	Zahl der Lebenden. A_a.	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1. 3 Proc. L_a.	4 Proc. L_a.	Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100. 3 Proc. B_a.
66	1552	7,994	7,488	8,204
67	1472	7,682	7,211	8,604
68	1392	7,367	6,930	
69	1312	7,051	6,647	
70	1232	6,734	6,361	
71	1152	6,418	6,075	
72	1072	6,103	5,790	
73	992	5,794	5,507	
74	912	5,491	5,230	
75	832	5,199	4,962	
76	752	4,925	4,710	
77	675	4,652	4,457	
78	602	4,372	4,197	
79	534	4,077	3,921	
80	469	3,781	3,643	
81	406	3,499	3,377	
82	346	3,229	3,122	
83	289	2,982	2,887	
84	234	2,793	2,708	
85	186	2,620	2,543	
86	145	2,462	2,393	
87	111	2,312	2,251	
88	83	2,185	2,131	
89	62	2,013	1,967	
90	46	1,794	1,758	
91	34	1,501	1,474	
92	24	1,190	1,171	
93	16	0,839	0,827	
94	9	0,536	0,530	
95	4	0,242	0,240	
96	1	0,000	0,000	
97	0			

Tafel der Leibrenten und Lebensversicherungen nach Deparcieux.

Alter.	Zahl der Lebenden A_a.	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. L_a.	3½ Proc. L_a.	4 Proc. L_a.	3 Proc. B_a.	3½ Proc. B_a.	4 Proc. B_a.
0	10000	15,7777	14,2979	13,0474	3,0477	3,1552	3,2726
1	7450	20,8134	18,8636	17,2138	1,6717	1,6527	1,6442
2	7088	21,5327	19,5209	17,8167	1,5254	1,4914	1,4683
3	6823	22,0401	19,9889	18,2490	1,4276	1,3828	1,3489
4	6618	22,4045	20,3294	18,5669	1,3601	1,3067	1,2645
5	6468	22,6118	20,5288	18,7573	1,3226	1,2633	1,2153
6	6345	22,7417	20,6592	18,8858	1,2994	1,2353	1,1826
7	6243	22,8066	20,7317	18,9621	1,2879	1,2199	1,1633
8	6154	22,8305	20,7676	19,0058	1,2837	1,2123	1,1524
9	6073	22,8291	20,7811	19,0297	1,2839	1,2095	1,1464
10	6004	22,7842	20,7557	19,0183	1,2919	1,2149	1,1493
11	5946	22,6967	20,6917	18,9720	1,3074	1,2284	1,1609
12	5897	22,5718	20,5938	18,8948	1,3297	1,2493	1,1803
13	5854	22,4197	20,4712	18,7949	1,3573	1,2758	1,2056
14	5815	22,2472	20,3298	18,6778	1,3890	1,3066	1,2357
15	5778	22,0613	20,1296	18,5493	1,4236	1,3407	1,2691
16	5740	21,8736	20,0204	18,4190	1,4592	1,3756	1,3034
17	5699	21,6919	19,8702	18,2936	1,4942	1,4099	1,3369
18	5655	21,5165	19,7257	18,1734	1,5286	1,4433	1,3694
19	5608	21,3477	19,5872	18,0587	1,5621	1,4757	1,4008
20	5558	21,1860	19,4551	17,9500	1,5947	1,5071	1,4309
21	5506	21,0276	19,3262	17,8443	1,6271	1,5381	1,4605
22	5453	20,8690	19,1971	17,7384	1,6601	1,5696	1,4905
23	5399	20,7101	19,0677	17,6325	1,6935	1,6015	1,5208
24	5344	20,5509	18,9382	17,5265	1,7276	1,6339	1,5515
25	5288	20,3916	18,8086	17,4206	1,7621	1,6667	1,5825
26	5231	20,2322	18,6790	17,3148	1,7972	1,6999	1,6139
27	5173	20,0728	18,5495	17,2093	1,8328	1,7336	1,6455
28	5116	19,9053	18,4127	17,0971	1,8708	1,7696	1,6796
29	5060	19,7294	18,2680	16,9778	1,9114	1,8083	1,7163
30	5005	19,5446	18,1152	16,8509	1,9548	1,8498	1,7558

Alter.	Zahl der Lebenden A_a.	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. L_a.	3½ Proc. L_a.	4 Proc. L_a.	3 Proc. B_a.	3½ Proc. B_a.	4 Proc. B_a.
31	4951	19,3505	17,9537	16,7161	2,0013	1,8944	1,7984
32	4897	19,1508	17,7870	16,5765	2,0500	1,9412	1,8433
33	4844	18,9412	17,6110	16,4281	2,1021	1,9915	1,8917
34	4792	18,7211	17,4252	16,2707	2,1581	2,0457	1,9440
35	4740	18,4942	17,2329	16,1071	2,2171	2,1030	1,9994
36	4688	18,2604	17,0339	15,9372	2,2794	2,1635	2,0580
37	4637	18,0151	16,8240	15,7570	2,3464	2,2288	2,1215
38	4587	17,7578	16,6026	15,5659	2,4185	2,2993	2,1903
39	4538	17,4880	16,3692	15,3634	2,4963	2,3757	2,2651
40	4490	17,2052	16,1233	15,1487	2,5803	2,4584	2,3463
41	4441	16,9169	15,8717	14,9285	2,6687	2,5454	2,4319
42	4392	16,6188	15,6105	14,6988	2,7631	2,6386	2,5237
43	4342	16,3145	15,3429	14,4628	2,8629	2,7372	2,6210
44	4291	16,0036	15,0687	14,2201	2,9685	2,8416	2,7241
45	4239	15,6859	14,7874	13,9703	3,0805	2,9525	2,8337
46	4186	15,3611	14,4987	13,7131	3,1995	3,0705	2,9505
47	4132	15,0287	14,2023	13,4480	3,3262	3,1963	3,0752
48	4077	14,6884	13,8977	13,1746	3,4615	3,3308	3,2087
49	4021	14,3397	13,5844	12,8924	3,6064	3,4750	3,3520
50	3964	13,9823	13,2621	12,6009	3,7619	3,6300	3,5063
51	3905	13,6193	12,9336	12,3029	3,9276	3,7952	3,6710
52	3843	13,2542	12,6023	12,0015	4,1028	3,9701	3,8453
53	3777	12,8904	12,2713	11,6996	4,2866	4,1534	4,0281
54	3707	12,5279	11,9406	11,3974	4,4795	4,3460	4,2201
55	3631	12,1738	11,6172	11,1014	4,6782	4,5441	4,4174
56	3550	11,8251	11,2981	10,8088	4,8846	4,7497	4,6221
57	3465	11,4786	10,9804	10,5170	5,1011	4,9653	4,8367
58	3377	11,1311	10,6609	10,2226	5,3307	5,1940	5,0644
59	3286	10,7825	10,3396	9,9260	5,5745	5,4370	5,3063
60	3191	10,4366	10,0201	9,6303	5,8312	5,6927	5,5609
61	3092	10,0939	9,7028	9,3362	6,1013	5,9617	5,8285
62	2990	9,7514	9,3850	9,0409	6,3885	6,2476	6,1131
63	2885	9,4095	9,0670	8,7448	6,6940	6,5518	6,4157
64	2778	9,0651	8,7458	8,4448	7,0227	6,8792	6,7416
65	2669	8,7183	8,4216	8,1413	7,3772	7,2323	7,0931

Alter.	Zahl der Leben-den A_a.	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. L_a.	3½ Proc. L_a.	4 Proc. L_a.	3 Proc. B_a.	3½ Proc. B_a.	4 Proc. B_a.
66	2559	8,3659	8,0910	7,8309	7,7644	7,6183	7,4777
67	2448	8,0076	7,7539	7,5135	8,1891	8,0418	7,8999
68	2336	7,6433	7,4101	7,1886	8,6571	8,5089	8,3659
69	2223	7,2727	7,0593	6,8562	9,1753	9,0264	8,8826
70	2109	6,8958	6,7013	6,5159	9,7523	9,6032	9,4590
71	1993	6,5161	6,3395	6,1709	10,3921	10,2433	10,0990
72	1874	6,1378	5,9780	5,8253	11,0973	10,9490	10,8052
73	1749	5,7737	5,6295	5,4913	11,8502	11,7025	11,5591
74	1617	5,4364	5,3060	5,1810	12,6240	12,4762	12,3325
75	1479	5,1182	5,0004	4,8873	13,4321	13,2838	13,1394
76	1337	4,8316	4,7251	4,6227	14,2353	14,0852	13,9390
77	1198	4,5540	4,4597	4,3654	15,0924	14,9403	14,7918
78	1064	4,2814	4,1951	4,1118	16,0219	15,8674	15,7166
79	936	4,0128	3,9356	3,8610	17,0361	16,8791	16,7257
80	812	3,7644	3,6954	3,6286	18,0763	17,9157	17,7584
81	697	3,5171	3,4558	3,3964	19,2256	19,0608	18,8995
82	590	3,2796	3,2255	3,1729	20,4542	20,2844	20,1179
83	492	3,0508	3,0033	2,9571	21,7738	21,5977	21,4249
84	404	2,8268	2,7855	2,7453	23,2189	23,0349	22,8542
85	327	2,5972	2,5619	2,5274	24,8867	24,6935	24,5035
86	261	2,3516	2,3220	2,2931	26,9239	26,7204	26,5200
87	206	2,0688	2,0450	2,0216	29,6731	29,4595	29,2488
88	159	1,7608	1,7422	1,7239	33,3090	33,0857	32,8652
89	117	1,4646	1,4504	1,4365	37,6612	37,4272	37,1960
90	80	1,2063	1,1955	1,1849	42,4120	42,1656	41,9216
91	50	0,9880	0,9798	0,9717	47,3894	47,1284	46,8703
92	28	0,8172	0,8109	0,8047	52,1170	51,8399	51,5657
93	14	0,6834	0,6785	0,6737	56,4896	56,1939	55,9014
94	6	0,6425	0,6387	0,6349	57,9689	57,6432	57,3211
95	3	0,3236	0,3221	0,3206	72,6377	72,2577	71,8820
96	1	0,0000	0,0000	0,0000	97,0874	96,6183	96,1539

Werth der Leibrenten nach der Sterblichkeits-Tafel von Finlaison bei 3 Procent.

Für Männer.			Für Frauen.		
Alter.	Zahl der Lebenden.	Leibrente.	Alter.	Zahl der Lebenden.	Leibrente.
0	1000	23,8867589	0	1000	23,9763044
1	981	24,0299304	1	981	24,1739122
2	963	24,1642083	2	967	24,2595987
3	949	24,2111133	3	955	24,3013643
4	937	24,2136253	4	945	24,2887025
5	927	24,1679633	5	935	24,2917724
6	919	24,0707323	6	926	24,2637066
7	912	23,9452446	7	919	24,1819783
8	906	23,7901158	8	913	24,0711228
9	901	23,6040848	9	908	23,9297833
10	896	23,4121304	10	903	23,7841533
11	891	23,2140368	11	899	23,6066776
12	886	23,0095803	12	895	23,4235478
13	881	22,7985275	13	892	23,2073965
14	876	21,5806368	14	887	23,0383626
15	872	21,3300193	15	883	22,8370078
16	866	21,1221365	16	876	22,7100808
17	860	20,9075853	17	870	22,5527031
18	854	20,6861113	18	863	22,4177025
19	846	20,5081764	19	856	22,2790554
20	837	20,3505551	20	848	22,1639123
21	827	20,2145312	21	841	22,0188438
22	816	20,1016419	22	834	21,8697638
23	804	20,0013716	23	827	21,7165228
24	793	19,9000739	24	820	21,5589651
25	782	19,7853983	25	813	21,3966148
26	771	19,6679728	26	805	21,2578548
27	761	19,5242146	27	798	21,0876570
28	751	19,3777164	28	791	20,9125015
29	742	19,2011388	29	784	20,7321970
30	732	19,0473528	30	777	20,5464276

Für Männer.			Für Frauen.		
Alter.	Zahl der Lebenden.	Leibrente.	Alter.	Zahl der Lebenden.	Leibrente.
31	723	18,8629908	31	770	20,3553295
32	714	18,6737822	32	763	20,1583377
33	705	18,4709536	33	755	19,9830941
34	696	18,2800503	34	748	19,7752046
35	687	18,0751128	35	740	19,5886606
36	679	17,8367168	36	732	19,3968265
37	670	17,6186038	37	724	19,1994907
38	662	17,3664630	38	716	18,9964305
39	653	17,1399169	39	708	18,7874118
40	644	16,8946450	40	700	18,5618994
41	636	16,6203710	41	693	18,3225804
42	627	16,3647089	42	685	18,1205523
43	619	16,0734938	43	677	17,8556556
44	610	15,7999631	44	669	17,6112516
45	602	15,4902281	45	661	17,3591304
46	594	15,1698156	46	654	17,0712792
47	586	14,8382192	47	646	16,8011688
48	578	14,4919001	48	638	16,5521971
49	570	14,1392876	49	631	16,2066657
50	561	13,7971049	50	623	15,9072050
51	552	13,4427194	51	616	15,5726394
52	542	13,1014624	52	608	15,2488763
53	531	12,7740532	53	601	14,8892785
54	520	12,4356020	54	593	14,5428501
55	508	12,1112371	55	585	14,1839786
56	495	11,8021893	56	576	13,8377714
57	482	11,4841208	57	568	13,4536494
58	468	11,1824925	58	559	13,0803636
59	454	10,8731470	59	549	12,7181802
60	440	10,5556843	60	539	12,3427631
61	426	10,2296620	61	529	11,9533683
62	413	9,8682110	62	519	11,5491940
63	399	9,5208979	63	508	11,1532533
64	385	9,1630171	64	496	10,7657830
65	370	8,8206303	65	484	10,3636841

Für Männer.			Für Frauen.		
Alter.	Zahl der Lebenden.	Leibrente.	Alter.	Zahl der Lebenden.	Leibrente.
66	355	8,4691333	66	471	9,9692225
67	339	8,1349217	67	457	9,5828641
68	322	7,8213377	68	443	9,1822800
69	305	7,5049993	69	428	8,7892113
70	288	7,1864428	70	412	8,4044563
71	270	6,8955051	71	395	8,0291519
72	253	6,5796047	72	377	7,6648943
73	235	6,2960819	73	358	7,3138276
74	218	5,9906724	74	339	6,9554595
75	202	5,6591366	75	319	6,6132846
76	185	5,3645404	76	298	6,2917011
77	171	4,9778547	77	277	5,9715542
78	156	4,6201895	78	255	5,6815687
79	141	4.2650499	79	233	5,4045667
80	125	3,9553056	80	210	5,1763903
81	110	3,6295053	81	189	4,9240910
82	95	3,3287368	82	168	4,7057905
83	81	3,0211070	83	149	4,4650334
84	68	2,7066317	84	132	4,1912805
85	56	2,3852228	85	117	3,8704804
86	44	2,1268108	86	103	3,5284623
87	34	1,8349132	87	89	3,2060063
88	24	1,6774441	88	76	2,8670342
89	17	1,4392011	89	64	2,5067412
90	11	1,2909466	90	52	2,1777766
91	7	1,0894892	91	41	1,8449198
92	4	0,9638043	92	30	1,5970320
93	3	0,3236246	93	21	1,3499187
94	1		94	14	1,0856243
95	0		95	8	0,9568378
			96	5	0,5768687
			97	2	0,4854369
			98	1	
			99	0	

Tafel der Leibrenten und Lebensversicherungen nach Brune für Männer.

Alter.	Zahl der Le-ben-den (A_a)	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. (L_a).	3½ Proc. (L_a).	4 Proc. (L_a).	3 Proc. (B_a).	3½ Proc. (B_a).	4 Proc. (B_a).
21	9260	21,3823	19,6899	18,2090	1,5552	1,4516	1,3592
22	9202	21,1626	19,5075	18,0567	1,5995	1,4946	1,4013
23	9144	20,9357	19,3183	17,8981	1,6462	1,5400	1,4454
24	9085	20,7038	19,1243	17,7349	1,6949	1,5875	1,4915
25	9025	20,4667	18,9252	17,5669	1,7458	1,6371	1,5398
26	8964	20,2241	18,7209	17,3939	1,7990	1,6891	1,5904
27	8903	19,9736	18,5089	17,2136	1,8553	1,7442	1,6443
28	8842	19,7147	18,2888	17,0256	1,9149	1,8027	1,7015
29	8780	19,4496	18,0626	16,8317	1,9775	1,8642	1,7618
30	8717	19,1778	17,8299	16,6315	2,0433	1,9291	1,8255
31	8653	18,8993	17,5905	16,4247	2,1127	1,9975	1,8926
32	8587	18,6159	17,3461	16,2130	2,1853	2,0691	1,9634
33	8518	18,3297	17,0986	15,9981	2,2608	2,1436	2,0368
34	8445	18,0427	16,8500	15,7818	2,3387	2,2206	2,1127
35	8369	17,7528	16,5981	15,5621	2,4199	2,3008	2,1917
36	8291	17,4574	16,3407	15,3369	2,5053	2,3851	2,2750
37	8210	17,1585	16,0795	15,1077	2,5944	2,4733	2,3621
38	8125	16,8582	15,8164	14,8764	2,6871	2,5649	2,4525
39	8036	16,5562	15,5512	14,6428	2,7834	2,6602	2,5466
40	7943	16,2526	15,2840	14,4068	2,8836	2,7593	2,6445
41	7847	15,9450	15,0125	14,1664	2,9888	2,8635	2,7474
42	7749	15,6310	14,7344	13,9194	3,1002	2,9739	2,8565
43	7649	15,3104	14,4495	13,6654	3,2184	3,0911	2,9726
44	7546	14,9850	14,1594	13,4060	3,3432	3,2149	3,0964
45	7440	14,6544	13,8637	13,1409	3,4753	3,3461	3,2255
46	7330	14,3206	13,5643	12,8716	3,6146	3,4845	3,3628
47	7216	13,9832	13,2608	12,5980	3,7615	3,6306	3,5079
48	7097	13,6442	12,9551	12,3216	3,9160	3,7842	3,6604
49	6973	13,3035	12,6470	12,0423	4,0787	3,9460	3,8212
50	6845	12,9588	12,3344	11,7582	4,2513	4,1178	3,9919

Alter.	Zahl der Lebenden (A_a)	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. (L_a).	$3\frac{1}{2}$ Proc. (L_a).	4 Proc. (L_a).	3 Proc. (B_a).	$3\frac{1}{2}$ Proc. (B_a).	4 Proc. (B_a).
51	6714	12,6080	12,0152	11,4671	4,4360	4,3017	4,1750
52	6579	12,2527	11,6909	11,1705	4,6330	4,4980	4,3704
53	6440	11,8927	11,3612	10,8681	4,8437	4,7082	4,5798
54	6296	11,5296	11,0278	10,5613	5,0685	4,9324	4,8034
55	6147	11,1634	10,6905	10,2500	5,3088	5,1723	5,0427
56	5992	10,7957	10,3508	9,9358	5,5650	5,4283	5,2981
57	5830	10,4286	10,0108	9,6203	5,8374	5,7003	5,5697
58	5662	10,0601	9,6686	9,3020	6,1288	5,9916	5,8607
59	5487	9,6924	9,3262	8,9826	6,4398	6,3025	6,1713
60	5304	9,3276	8,9856	8,6643	6,7701	6,6327	6,5013
61	5112	8,9683	8,6494	8,3493	7,1192	6,9817	6,8499
62	4910	8,6174	8,3205	8,0405	7,4852	7,3474	7,2153
63	4699	8,2745	7,9984	7,7376	7,8697	7,7315	7,5987
64	4481	7,9373	7,6811	7,4385	8,2764	8,1377	8,0042
65	4258	7,6036	7,3662	7,1412	8,7104	8,5712	8,4370
66	4032	7,2707	7,0514	6,8432	9,1782	9,0386	8,9038
67	3804	6,9377	6,7356	6,5435	9,6855	9,5456	9,4103
68	3573	6,6078	6,4221	6,2452	10,2318	10,0917	9,9561
69	3338	6,2852	6,1148	5,9523	10,8139	10,6736	10,5377
70	3100	5,9708	5,8147	5,6656	11,4330	11,2925	11,1563
71	2859	5,6683	5,5255	5,3889	12,0837	11,9428	11,8059
72	2617	5,3782	5,2478	5,1227	12,7657	12,6240	12,4865
73	2374	5,1066	4,9874	4,8729	13,4631	13,3201	13,1811
74	2132	4,8568	4,7479	4,6431	14,1615	14,0161	13,8746
75	1895	4,6282	4,5286	4,4327	14,8551	14,7059	14,5607
76	1667	4,4190	4,3282	4,2406	15,5409	15,3864	15,2357
77	1457	4,2076	4,1254	4,0459	16,2900	16,1291	15,9721
78	1269	3,9759	3,9023	3,8311	17,1842	17,0169	16,8532
79	1103	3,7115	3,6467	3,5839	18,3120	18,1388	17,9692
80	954	3,4199	3,3639	3,3094	19,7122	19,5337	19,3587
81	817	3,1132	3,0654	3,0190	21,3994	21,2159	21,0359
82	689	2,8023	2,7621	2,7230	23,3873	23,1989	23,0139
83	568	2,5012	2,4678	2,4352	25,6486	25,4548	25,2642
84	454	2,2232	2,1956	2,1686	28,1125	27,9117	27,7140
85	350	1,9703	1,9476	1,9254	30,7538	30,5438	30,3367

Alter.	Zahl der Lebenden (A_a)	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. (L_a).	3½ Proc. (L_a).	4 Proc. (L_a).	3 Proc. (B_a).	3½ Proc. (B_a).	4 Proc. (B_a).
86	261	1,7215	1,7032	1,6853	33,8324	34,3155	33,3939
87	187	1,4748	1,4604	1,4463	37,4954	36,9208	37,0325
88	127	1,2366	1,2256	1,2147	41,7972	41,5502	41,3063
89	80	1,0221	1,0137	1,0055	46,5416	46,2776	46,0166
90	46	0,8308	0,8247	0,8186	51,7071	51,4218	51,1397
91	24	0,6402	0,6360	0,6318	58,0552	57,7429	57,4344
92	11	0,4387	0,4362	0,4337	66,5929	66,2463	65,9034
93	4	0,2427	0,2415	0,2404	77,5562	77,1630	76,7742
94	1	0,0000	0,0000	0,0000	97,0874	96,6184	96,1538
95	0						

Tafel der Leibrenten und Lebensversicherungen nach Brune für Frauen.

Alter.	Zahl der Lebenden (A_a)	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. (L_a).	3½ Proc. (L_a).	4 Proc. (L_a).	3 Proc. (B_a).	3½ Proc. (B_a).	4 Proc. (B_a).
16	10000	20,8298	19,0871	17,5791	1,6683	1,5967	1,5362
17	9838	20,8080	19,0804	17,5833	1,6729	1,5983	1,5350
18	9682	20,7775	19,0664	17,5813	1,6793	1,6018	1,5356
19	9533	20,7354	19,0422	17,5703	1,6882	1,6078	1,5388
20	9392	20,6780	19,0045	17,5475	1,7003	1,6172	1,5454
21	9260	20,6020	18,9501	17,5095	1,7166	1,6309	1,5565
22	9136	20,5081	18,8795	17,4571	1,7368	1,6486	1,5718
23	9019	20,3973	18,7938	17,3909	1,7609	1,6704	1,5913
24	8908	20,2710	18,6940	17,3119	1,7886	1,6960	1,6148
25	8802	20,1306	18,5813	17,2212	1,8198	1,7253	1,6420
26	8700	19,9776	18,4571	17,1200	1,8544	1,7579	1,6726
27	8600	19,8162	18,3252	17,0118	1,8913	1,7929	1,7058
28	8501	19,6484	18,1875	16,8984	1,9304	1,8301	1,7410
29	8402	19,4763	18,0458	16,7814	1,9711	1,8688	1,7277
30	8304	19,2974	17,8979	16,6586	2,0141	1,9100	1,8168

Alter.	Zahl der Lebenden (A_a)	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. (L_a).	3½ Proc. (L_a).	4 Proc. (L_a).	3 Proc. (B_a).	3½ Proc. (B_a).	4 Proc. (B_a).
31	8207	19,1112	17,7432	16,5297	2,0597	1,9536	1,8585
32	8110	18,9200	17,5839	16,3965	2,1075	1,9994	1,9021
33	8014	18,7210	17,4173	16,2566	2,1581	2,0480	1,9487
34	7918	18,5164	17,2455	16,1119	2,2113	2,0992	1,9977
35	7823	18,3035	17,0659	15,9598	2,2678	2,1537	2,0501
36	7729	18,0819	16,8780	15,8001	2,3279	2,2118	2,1062
37	7636	17,8512	16,6815	15,6322	2,3921	2,2740	2,1663
38	7543	17,6134	16,4782	15,4580	2,4598	2,3398	2,2299
39	7451	17,3658	16,2655	15,2748	2,5323	2,4103	2,2983
40	7361	17,1055	16,0406	15,0800	2,6106	2,4867	2,3727
41	7273	16,8319	15,8029	14,8730	2,6953	2,5697	2,4539
42	7187	16,5443	15,5518	14,6530	2,7872	2,6600	2,5424
43	7102	16,2446	15,2887	14,4215	2,8863	2,7576	2,6383
44	7018	15,9322	15,0132	14,1779	2,9933	2,8632	2,7424
45	6934	15,6089	14,7269	13,9236	3,1082	2,9769	2,8546
46	6849	15,2767	14,4315	13,6603	3,2311	3,0986	2,9750
47	6762	14,9375	14,1288	13,3894	3,3619	3,2283	3,1034
48	6674	14,5884	13,8161	13,1086	3,5024	3,3678	3,2417
49	6584	14,2315	13,4952	12,8194	3,6527	3,5172	3,3901
50	6492	13,8662	13,1654	12,5211	3,8141	3,6778	3,5497
51	6397	13,4943	12,8286	12,2153	3,9867	3,8498	3,7208
52	6299	13,1153	12,4841	11,9015	4,1719	4,0345	3,9049
53	6197	12,7311	12,1338	11,5813	4,3701	4,2323	4,1021
54	6090	12,3435	11,7791	11,2562	4,5817	4,4436	4,3130
55	5976	11,9563	11,4239	10,9298	4,8056	4,6673	4,5362
56	5853	11,5738	11,0722	10,6058	5,0404	4,9018	4,7702
57	5722	11,1939	10,7221	10,2826	5,2882	5,1492	5,0171
58	5583	10,8168	10,3737	9,9601	5,5499	5,4106	5,2778
59	54[illegible]7	10,4405	10,0251	9,6367	5,8283	5,6886	5,5553
60	5286	10,0609	9,6724	9,3085	6,1282	5,9883	5,8546
61	5130	9,6779	9,3153	8,9752	6,4526	6,3126	6,1787
62	4969	9,2912	8,9538	8,6366	6,8045	6,6648	6,5309
63	4802	8,9027	8,5894	8,2945	7,1856	7,0465	6,9129
64	4627	8,5166	8,2263	7,9525	7,5953	7,4569	7,3239
65	4442	8,1374	7,8688	7,6150	8,0314	7,8938	7,7614

Alter.	Zahl der Lebenden (A_a)	Gegenwärtiger Werth einer Leibrente von 1			Jährlicher Beitrag (Prämie) für eine Lebensversicherung von 100		
		3 Proc. (L_a).	3½ Proc. (L_a).	4 Proc. (L_a).	3 Proc. (B_a).	3½ Proc. (B_a).	4 Proc. (B_a).
66	4246	7,7685	7,5202	7,2852	8,4919	8,3552	8,2235
67	4038	7,4137	7,1843	6,9669	8,9728	8,8369	8,7058
68	3819	7,0740	6,8621	6,6611	9,4728	9,3375	9,2068
69	3591	6,7488	6,5533	6,3674	9,9926	9,8576	9,7272
70	3356	6,4380	6,2576	6,0858	10.5318	10,3970	10,2666
71	3117	6,1396	5,9732	5,8145	11,0937	10,9590	10,8284
72	2877	5,8514	5,6980	5,5515	11,6830	11,5482	11,4175
73	2637	5,5754	5,4341	5,2991	12,2955	12,1604	12,0292
74	2398	5,3151	5,1849	5,0603	12,9226	12,7868	12,6547
75	2163	5,0693	4,9494	4,8345	13,5638	13,4268	13,2934
76	1935	4,8366	4,7262	4,6203	14,2206	14,0819	13,9466
77	1718	4,6109	4,5095	4,4120	14,9097	14,7688	14,6313
78	1516	4,3821	4,2892	4,1999	15.6676	15,5247	15.3850
79	1330	4,1448	4,0602	3,9787	16,5247	16,3804	16,2393
80	1159	3,8990	3,8223	3,7484	17,4999	17,3552	17,2136
81	1000	3,6545	3,5851	3.5182	18,5721	18,427[illegible]	18,2868
82	849	3,4336	3,3706	3,3096	19,6426	19,4987	19,3577
83	706	3,2529	3,1951	3,1392	20.6007	20,4555	20.3131
84	575	3,1138	3.0604	3,0086	21,3957	21,2466	21,1004
85	461	3,0003	2,9508	2,9026	22,0852	21,9298	21,7775
86	366	2,8925	2,8468	2.8023	22,7778	22,6142	22,4537
87	289	2,7731	2,7314	2,6909	23.5911	23,4177	23.2475
88	228	2,6204	2,5834	2,5473	24,7084	24,5249	24,3445
89	180	2,4188	2,3868	2,3556	26,3376	26,1446	25,9547
90	141	2,1804	2,1536	2,1275	28,5296	28,3277	28,1287
91	108	1,9321	1,9101	1,8886	31.1929	30.9813	30,7726
92	80	1,6866	1,6689	1,6516	34,3097	34,0868	33,8669
93	57	1,4381	1,4243	1,4108	38,1027	37,8672	37,6346
94	38	1,2219	1,2112	1,2008	42,0943	41,8418	41,5922
95	24	0,9927	0,9849	0.9773	47.2710	46,9979	46,7279
96	14	0,7528	0,7476	0,7424	54,1393	53,8412	53,5464
97	7	0.5507	0,5474	0,5442	61,5739	61,2414	60.9138
98	3	0,3236	0,3221	0,3205	72.6374	72.2578	71,8820
99	1	0,0000	0,0000	0,0000	97,0874	96.6184	96.1538
100	0						

XXVII.

Bestimmung des Integrals $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ durch Integration von Differentialgleichungen.

Von

Herrn *W. Veltmann,*

Lehrer der Mathematik an der Gewerbeschule in Königsberg i. Pr.

Das Integral $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$, welches bekanntlich gleich ist dem Producte dèr beiden Integrale $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ und $\int_0^\infty x^{-a}e^{-x}dx$, lässt sich in Gemeinschaft mit dem Integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}dx$, letzteres so verstanden, dass es von 0 bis $1-\varepsilon$ und von $1+\varepsilon$ bis ∞ für $\varepsilon=0$ genommen werden soll, auf folgende Weise durch Differenzialgleichungen bestimmen.

Wir setzen

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx=v,\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}dx=z.$$

Es ist nun

$$\frac{dv}{da}=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}lnx}{1+x}dx,\quad \frac{dz}{da}=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}lnx}{1-x}dx;$$

wo das letztere Integral wieder auf obige Weise zu verstehen. Ferner ist:

$$v.z=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}dx.\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}dx$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{a-1}y^{a-1}}{(1-x)(1+y)}dydx.$$

Setzen wir $y=\frac{t}{x}$, also $dy=\frac{dt}{x}$, so wird

$$v.z=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1-x)(1+x)}dtdx$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{t+x}\right)dtdx.$$

Integrirt man zuerst nach x, so erhält man:

$$v.z=\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\left\{ln\frac{t+x}{1-x}\right\}_0^\infty dt.$$

Den Logarithmus hat man von 0 bis $1-\varepsilon$ und von $1+\varepsilon$ bis ∞ zu nehmen und darauf $\varepsilon=0$ zu setzen. Es ist nun

$$ln\frac{t+\infty}{1-\infty}=ln(-1),$$

$$ln\frac{t+(1+\varepsilon)}{t-(1+\varepsilon)}=ln(-\frac{t+1+\varepsilon}{\varepsilon}),$$

$$ln\frac{t+(1-\varepsilon)}{t-(1-\varepsilon)}=ln\frac{t+1-\varepsilon}{\varepsilon};$$

$$ln\frac{t+0}{1-0}=lnt;$$

also

$$ln\left(\frac{t+x}{1-x}\right)_0^\infty=ln(-1)-ln(-\frac{t+1+\varepsilon}{\varepsilon})+ln\frac{t+1-\varepsilon}{\varepsilon}-lnt=-lnt.$$

Mithin:

$$v.z=-\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}.lntdt=-\frac{dv}{da}.$$

Man hat also zwischen v und z die Differenzialgleichung:

$$v.z=-\frac{dv}{da}.$$

Eine andere findet man auf folgende Weise:

$$v^2 = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}dy = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{a-1}.y^{a-1}}{(1+x)(1+y)}dydx.$$

Setzt man hier $y = \frac{t}{x}$, $dy = \frac{dt}{x}$, so wird:

$$v^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+x)(t+x)}dtdx$$

$$= -\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1-t}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right)dtdx$$

$$= -\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1-t}\left\{ln\frac{1+x}{t+x}\right\}_0^\infty dt = -\int_0^\infty \frac{t^{a-1}lnt}{1-t}dt = -\frac{dz}{da}.$$

Man hat also jetzt zur Bestimmung von v und z die beiden Differenzialgleichungen:

1) $$v.z = -\frac{dv}{da},$$

2) $$v^2 = -\frac{dz}{da}.$$

Dividirt man die zweite durch die erste, so erhält man:

$$v:z = \frac{dz}{da}:\frac{dv}{da},$$

$$v.\frac{dv}{da} = z.\frac{dz}{da},$$

3) $$v^2 = z^2 + c;$$

wo c eine Constante. Setzt man diesen Werth von v^2 in 2) ein, so kommt:

$$-\frac{dz}{da} = z^2 + c.$$

Nehmen wir c positiv $= m^2$, so wird:

$$\frac{da}{dz} = -\frac{1}{m^2+z^2},$$

$$a = \frac{1}{m}.\text{arc}\cot\text{g}\frac{z}{m} + n;$$

wo n eine zweite Constante.

Hieraus erhält man:

$$4)\qquad z = m\operatorname{cotg} m(a-n).$$

Setzt man diesen Werth von z in 3) ein, so wird:

$$v^2 = m^2\operatorname{cotg}^2 m(a-n) + m^2 = m^2(1+\operatorname{cotg}^2 m(a-n))$$

$$= m^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 m(a-n)},$$

$$v = \pm\frac{m}{\sin m(a-n)}.$$

Den beiden Differentialgleichungen 1) und 2) wird also Genüge geleistet durch die beiden Gleichungen:

$$5)\qquad z = m\operatorname{cotg} m(a-n),$$

$$6)\qquad v = \pm\frac{m}{\sin m(a-n)}.$$

Um die Constanten zu bestimmen, stellen wir die beiden Integrale dar für $a=\frac{1}{2}$. Es ist dann

$$v = \int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}dx,$$

oder, wenn man $x=y^2$, $dx=2ydy$ setzt:

$$v = \int_0^\infty \frac{2dy}{1+y^2} = 2.(\operatorname{arctg})_0^\infty = \pi,$$

Ferner ist:

$$z = \int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)}dx,$$

oder für $x=y^2$, $dx=2ydy$:

$$z = \int_0^\infty \frac{2ydy}{1-y^2} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right)dy = ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)_0^\infty$$

$$= ln(-1) - ln\frac{2+\varepsilon}{-\varepsilon} + ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} - ln\,1 = ln\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} + ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$= ln\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon} = ln\,1 = 0.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 5) und 6), so erhält man:

$$\frac{\pm m}{\sin m(\frac{1}{2}-n)}=\pi \quad \text{und} \quad m\cot g\, m(\tfrac{1}{2}-n)=0.$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch $n=0$ und $\pm m=\pi$. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 5) und 6), so erhält man:

$$z=\pi.\cot g\, a\pi,$$

$$v=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Da diese Functionen stetig bleiben für $a=\frac{1}{2}$ bis $a=1$ und bis $a=0$, so sind dieselben innerhalb dieser Gränzen den obigen Integralen gleich. Für $a=1$ und $a=0$ werden die Functionen unendlich, und obgleich sie darüber hinaus wieder endliche Werthe annehmen, so lässt sich doch nicht behaupten, dass sie dann noch die Integrale darstellen. Vielmehr müsste man, wenn das z. B. von $a=1$ bis $a=2$ stattfinden sollte, nachweisen, dass für einen bestimmten Werth von a zwischen $a=1$ und $a=2$, z. B. für $a=\frac{3}{2}$, die Functionen den Integralen gleich wären, wie das oben für $a=\frac{1}{2}$ geschehen ist. Nun sieht man aber gleich, dass für jeden Werth von $a=\frac{2n+1}{2}$ das Integral

$$v=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2n-1}{2}}dx}{1+x}=\int_0^\infty \frac{y^{2n}dy}{1+y^2}$$

sowohl für positive als für negative Werthe von n unendlich wird. Nur für Werthe von a zwischen 1 und 0 gelten also die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}dx=\pi.\cot g\, a\pi.$$

Nimmt man oben für c einen negativen Werth $-m^2$, so gelangt man durch Exponentialgrössen zu demselben Resultat.

XXVIII.

Einige geometrische Lehrsätze und Aufgaben.

Von

Herrn *Joh. Karl Becker*,

Lehrer an der Erziehungsanstalt von F. Beust in Zürich.

I.

Ist ABF ein beliebiges Dreieck und schneidet eine Transversale die Seite AF in einem Punkte D, die Seite BF in einem Punkte C und die Verlängerung der Seite AB in einem Punkte E, so finden folgende Relationen statt:

$$AE.AF.BC.DC = AB.AD.FC.EC, \quad \ldots \quad (I)$$

$$BA.BC.ED.FD = BE.BF.AD.CD, \quad \ldots \quad (II)$$

$$EA.EC.BF.DF = EB.ED.AF.CF. \quad \ldots \quad (III)$$

Man hat nämlich nach dem Satze des Menelaos:

$$AE.BC.FD = AD.BE.FC, \quad \ldots \quad (1)$$

$$BE.CD.AF = AB.CE.FD, \quad \ldots \quad (2)$$

$$AB.ED.CF = AE.CD.BF, \quad \ldots \quad (3)$$

$$AD.BF.CE = BC.ED.AF. \quad \ldots \quad (4)$$

Durch Multiplication von (1) mit (2), oder (3) mit (4), erhält man die Relation (I); durch Multiplication von (1) mit (3), oder von (2) mit (3), die Relation (II); und durch Multiplication von (1) mit (4), oder von (2) mit (3), die Relation (III).

So einfach diese Herleitung ist, so habe ich diese drei Gleichungen doch noch in keinem mir zu Gesicht gekommenen Werke

über neuere oder ältere Geometrie gefunden, was mich zur Annahme führt, dass sie entweder neu oder wenigstens nicht sehr bekannt seien.

Aus (III) folgt u. A. der folgende Satz:

Ist $ABCD$ ein beliebiges convexes Viereck und seien die Perpendikel von A auf CD und CB und von C auf AB und AD bezüglich bezeichnet durch a_3, a_2, a_1, a_4 und die Perpendikel von B auf AD und CD, und von D auf AB und CB durch b_4, b_3, b_1, b_2, so ist:

$$a_1 . b_2 . a_3 . b_4 = b_1 . a_2 \; b_3 . a_4.$$

II.

Die Elementargeometrie nennt eine von n geraden Linien begränzte **Ebene** ein n-**Eck**. Die neuere Geometrie dagegen bezeichnet mit demselben Namen entweder eine in n Punkten gebrochene, geschlossene **Linie**, oder das aus allen durch n Punkte bestimmten Geraden bestehende Gebilde, so dass man allemal, wenn man von einem n-Ecke spricht, eigentlich erst angeben sollte, was man darunter versteht. Die Beschäftigung mit Polyedern nöthigt, mit Figuren in beiderlei Sinn Betrachtungen anzustellen, so dass man wegen der Bezeichnung in Verlegenheit gerathen kann. Es ist darum vielleicht passend, wenn man in solchen Fällen die Bezeichnungen **Linien**-n-**Eck** und **Flächen**-n-**Eck** anwendet, je nachdem man ein lineäres Gebilde, oder eine begränzte Fläche benennen will. **Flächen**-n-**Ecke** in dem angegebenen Sinne hat seither nur die Elementargeometrie betrachtet und auch diese beschäftigt sich nur mit **einfach begränzten** ebenen Figuren. Erweitert man jedoch den Begriff der Flächen-n-Ecke auf Ebenen mit **zwei oder mehreren Gränzlinien** (durchbrochene Polygone) und auf **gebrochene** begränzte Ebenen, so dürfte man vielleicht reichhaltiges Material finden, das noch wenig bearbeitet ist und wohl nicht ohne Interesse sein möchte. Nennt man eine in sich selbst zurücklaufende, sich aber sonst nicht schneidende in n Punkten gebrochene Linie ein **einfaches Linien**-n-**Eck**, so kann dasselbe immer als die Umfangslinie eines **einfachen ebenen oder gebrochenen Flächen**-n-**Ecks** angesehen werden, je nachdem nämlich jenes in einer Ebene liegt oder nicht. Ein **gebrochenes** n-**Eck** ist aber nicht durch seine Umfangslinie bestimmt, wie ein ebenes. Es können vielmehr von einem und demselben einfachen aber gauchen Linien-n-Eck im Allgemeinen so viele einfache Flächen-

polygone begränzt werden, als verschiedene Arten möglich sind, das Linien-n-Eck durch Diagonalen in Dreiecke zu zerlegen. Diese Anzahl ist offenbar eine Function der Eckenzahl und ihre Bestimmung dürfte wohl als ein nicht eben leichtes Problem aufgestellt werden.

Dem einfachen Flächenpolygone kann das von zwei einfachen Linienpolygonen begränzte ringförmige Flächenpolygon zunächst angereiht werden. Zu diesen Polygonen kann u. a. auch der Mantel eines Prismas oder eines Prismatoids, und, in sofern sich die eine Gränzlinie auf einen Punkt reducirt, auch der Mantel einer Pyramide gezählt werden. Hier kann denn das Problem aufgestellt werden:

Die Anzahl aller möglichen ringförmigen Polygone zu bestimmen, welche dieselben beiden Linienpolygone von m- und n-Ecken zu Gränzlinien haben.

Ein analoges Problem entspricht den mehrfach begränzten (mehrfach durchbrochenen) Polygonen. Polygonennetz kann eine aus mehreren Flächenpolygonen zusammengesetzte gebrochne Fläche genannt werden und zwar geschlossenes Polygonennetz, wenn durch dasselbe ein Theil des Raumes vollständig eingeschlossen wird. Es ist also jede Oberfläche eines Polyeders ein Polygonennetz. Im allgemeinen kann aber die Oberfläche eines Polyeders auf verschiedene Weise aus Flächenpolygonen zusammengesetzt werden. So kann z. B. die Oberfläche eines Pentagondodekaeders zunächst angesehen werden als zusammengesetzt aus zwölf ebenen Pentagonen; man kann sie aber auch zerlegen in vier gebrochene Polygone, nämlich zwei ringförmige mit einer zehneckigen und einer zweieckigen Gränzlinie und zwei einfache gebrochene Zehnecke; oder: in vier ringförmige Polygone, deren innere Gränze ein Eckpunkt und deren äussere Gränze ein Linienneuneck ist, oder: in sechs gebrochene einfache Flächenzehnecke.

Für Polygonennetze lassen sich folgende Probleme aufstellen:

1) Die Anzahl aller möglichen Polygonennetze zu bestimmen, deren einzelne Polygone dieselben Gränzen haben.

2) Die Anzahl aller möglichen Polygonennetze zu bestimmen, welche eine gegebene Anzahl Punkte sämmtlich und ausschliesslich zu Eckpunkten haben, und spezieller:

3) Die Anzahl aller möglichen Polyder zu bestimmen, welche eine gegebene Anzahl Punkte sämmtlich und ausschliesslich zu Eckpunkten haben.

XXIX.

Zur Polyedrometrie.

Von
Herrn *Joh. Karl Becker*,
Lehrer an der Eziehungsanstalt von F. Beust in Zürich.

Den zuerst von Descartes*) aufgestellten Satz, „dass die Summe der Kantenwinkel eines Polyeders von e Ecken $4e-8$ Rechte beträgt", findet man in den meisten Lehrbüchern der Geometrie entweder gar nicht, oder nur beiläufig, als Beweisgrund für den Euler'schen Satz, erwähnt. Gleichwohl steht jener Satz, den man wohl den Descartes'schen Satz nennen kann, dem Euler'schen an Bedeutung kaum nach. Denn einerseits ist er, wie Herr Steiner (im ersten Bande des Journals von Crelle) mit Recht hervorhebt, an sich interessant, als ein Analogon zu dem Satze der Planimetrie, dass die Winkelsumme eines ebenen Polygons von e Ecken $2e-4$ Rechte beträgt, und dass bei dem Polyeder von e Ecken, oder richtiger, bei einer gewissen Klasse von Polyedern mit e Ecken, die Kantenwinkelsumme gerade das Doppelte der Winkelsumme eines einfach begränzten Polygons von e Ecken beträgt, deutet darauf hin, dass an den Descartes'schen Satz gewiss noch mancherlei Untersuchungen angeknüpft werden können. Ferner ist derselbe, in anderer Form ausgedrückt, ein wesentlicher Theil des Abhängigkeitsgesetzes zwischen Kanten-, Flächen- und Eckenzahl der sogenannten Euler'schen Polyeder, von dem der Euler'sche Satz

---

*) In dem von Herrn Prouhet am 23. April 1860 der Pariser Akademie mitgetheilten Fragmente „Oeuvres inédites de Descartes".

nur ein sehr unvollkommener Ausdruck ist. Endlich erstreckt sich seine Gültigkeit auf Polyeder, die nicht mehr zu den Euler'schen gehören.

Aber auch der viel bekanntere Euler'sche Satz tritt in den meisten Lehrbüchern in einer Weise auf, die wenig befriedigt. Namentlich erhält man nirgend bestimmten Aufschluss, für welche Polyeder er gilt, für welche nicht.

Unter den Beweisen für diesen Satz, welche sich nicht auf den Descartes'schen Satz stützen, sind mir nur der des Herausgebers dieses Archivs und der, welchen Herr v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage" gibt, als solche bekannt, welche so weit richtig sind, wie der Satz selbst. Wenn aber z. B. Herr Koppe, der den ersten der genannten Beweise in sein rühmlichst bekanntes Lehrbuch aufgenommen hat, von den Polyedern, für welche er durch denselben den Satz als bewiesen ansieht, nur solche Polyeder ausschliesst, an deren Begränzung auch mehrfach begränzte (durchbrochene) Polygone Theil haben, so behauptet und beweist er mehr als wahr ist. Denn von den übrigen Polyedern sind ferner noch diejenigen mit mehr als einer gebrochenen Oberfläche, die Hohlkörper, auszuschliessen, und von den dann noch übrig bleibenden gilt der Euler'sche Satz immer noch nicht für alle, sondern ausschliesslich für diejenigen, bei denen jeder Eckpunkt nur mit solchen Eckpunkten durch Kanten verbunden ist, welche zugleich die sämmtlichen Ecken eines nur von Kanten und Diagonalen der Seitenflächen begränzten Polygons sind. Die Polyeder, welche dieser Bedingung nicht entsprechen, hat zwar Herr Schlömilch in seiner „Geometrie des Maasses" als „ringförmig durchbrochene" ausgeschlossen, so dass er nur solche Polyeder als Euler'sche Polyeder zurückbehält, für welche der Euler'sche Satz wirklich gilt. Der Beweis aber, den er dafür aufstellt, im Wesentlichen der Steiner'sche, ist nur für convexe Polyeder zulässig und es ist demnach zwar nicht mehr behauptet, als wahr, wohl aber mehr, als bewiesen ist. Auch erfährt man nicht, was denn die kennzeichnenden Merkmale der Euler'schen Polyeder seien, welche berechtigen, sie als eine besondere Klasse den andern gegenüberzustellen; denn auch unter den „ringförmig durchbrochenen" befinden sich solche, welche „von einer einzigen zusammenhängenden Oberfläche begränzt werden, die auch nach Wegnahme irgend einer Seitenfläche noch eine ununterbrochene Reihenfolge ebener Vielecke darstellt."

Die vorstehenden Betrachtungen veranlassten mich darüber nachzudenken, ob nicht vielleicht, wenn man von einem anderen

Standpunkte ausgeht, etwas mehr Sicherheit und Klarheit in diesen Zusammenhang zwischen Ecken, Kanten und Flächen gebracht werden könne. Die Resultate dieses Nachdenkens habe ich nun in dem Folgenden zusammengestellt, um sie den Herren Mathematikern zu gefälliger Beachtung vorzulegen.

Die Oberfläche eines e-eckigen Polyeders, dessen Kantenwinkelsumme $4e-8$ Rechte beträgt, besteht entweder aus $2.(e-2)$ Dreiecken, oder lässt sich in $2.(e-2)$ Dreiecke zerlegen, deren Seiten sich auf der Oberfläche selbst nur in den Ecken des Polyeders schneiden. Denn zerlegt man jede mehr als dreiseitige Gränzfläche des Polyeders durch Diagonalen in Dreiecke, so ist die Winkelsumme aller dieser Dreiecke zugleich die Kantenwinkelsumme des Polyeders, also $= 4e-8$ Rechte $= 2.2.(e-2)$ Rechte, also die Zahl der Dreiecke $= 2.(e-2)$.

Kann man direct nachweisen, dass bei einer Klasse von Polyedern von e Ecken die Oberfläche sich auf die angegebene Weise in $2.(e-2)$ Dreiecke zerlegen lässt, so ist damit für dieselben auch der Satz des Descartes nachgewiesen.

Die Dreiecke, in welche man auf die angegebene Weise die Oberfläche eines Polyeders zerlegen kann, mögen Gränzdreiecke heissen, und ihre Anzahl sei bezeichnet durch D.

Suchen wir nun zunächst D für die Euler'schen Polyeder zu bestimmen. Da der Begriff der „Euler'schen Polyeder", meines Wissens, bis jetzt durch keine andere Definition bestimmt ist, als durch die, dass für sie der Euler'sche Satz gelte, so stelle ich folgende Definition auf: Ein Eulersches Polyeder ist ein solches, das von einer einzigen, nur aus einfach begränzten Polygonen zusammengesetzten Oberfläche in der Weise begränzt ist, dass alle Eckpunkte, welche mit einem beliebigen andern Eckpunkte durch Kanten verbunden sind, allemal durch eine einzige nur aus Kanten und Diagonalen bestehende, nur in ihnen gebrochene Linie verbunden werden können. Es ist klar, dass bei einem solchen Körper alle Eckpunkte, welche mit einem und demselben andern Eckpunkte durch Kanten verbunden sind, oder durch Gerade verbunden werden können, welche auf der Oberfläche liegen, (also durch Diagonalen), allemal selbst durch eine nur aus Kanten bestehende gebrochene Linie verbunden sind, nämlich durch die äussere Umfangslinie der in jenem Eckpunkte zusammentreffenden Begränzungsflächen. Denkt man sich nun ein solches Kantenpolygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so wird dasjenige Polyeder, wel-

vorliegenden in allen Ecken, Kanten und Flächen, ausser jener mit dem betrachteten Kantenpolygone verbundenen Ecke und den in derselben zusammentreffenden Flächen und Kanten, übereinstimmt, statt der weggefallenen Gränzfiguren aber jene Dreiecke zur Begränzung hat, in welche man jenes Kantenpolygon zerlegt denkt, einen Eckpunkt und zwei Gränzdreiecke weniger haben, wie das vorliegende. Es ist überdiess klar, dass das abgeleitete Polyeder ebenfalls ein Euler'sches ist. Leitet man nun von diesem auf dieselbe Weise ein drittes Polyeder ab, welches also zwei Ecken und vier Gränzdreiecke weniger haben wird, wie das zuerst betrachtete, und von diesem ein viertes u. s. f., so wird man zuletzt zu einem Tetraeder gelangen, welches nur noch vier Ecken und vier Gränzdreiecke hat. Hatte mithin das anfangs betrachtete Polyeder e Ecken, so musste es $(e-4).2$ Gränzdreiecke mehr als vier haben. Man hat somit für ein Euler'sches Polyeder:

$$D=2.(e-2). \qquad (1)$$

Mithin für die Winkelsumme: $4.(e-2)$ Rechte. Ist ein solches Polyeder nur von Dreiecken begränzt, und bezeichnen e, f, k beziehungsweise die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten, so ist für dasselbe:

$$D=f=2.(e-2), \qquad (2)$$

$$\frac{3f}{2}=k=3.(e-2), \qquad (3)$$

woraus auch folgt:

$$f+e=k+2. \qquad (4)$$

Enthält die Oberfläche eines Euler'schen Polyeders a_3 Dreiecke, a_4 Vierecke, ... a_n nEcke, so bestehen folgende Relationen:

$$f=a_3+a_4+....+a_n, \qquad (5)$$

$$D=a_3+2a_4+3a_5+....+(n-2)a_n=2.(e-2), \qquad (6)$$

$$k=3(e-2)-(a_4+2a_5+....(n-3)a_n), \qquad (7)^*)$$

wodurch die Abhängigkeit zwischen f, k und e genauer ausgedrückt ist, als durch den leicht daraus ableitbaren Euler'schen Satz.

---

*) Die Zahl der Kanten ist offenbar gleich der aller Seiten der Gränzdreiecke, vermindert um die Zahl derjenigen, welche Diagonalen der Polygone sind, also $=\frac{3D}{2}-(a_4+2a_5+....+(n-3)a_n)$.

An die Euler'schen Polyeder schliesst sich eine zweite Gruppe von Polyedern an, für welche zwar der Euler'sche Satz nicht mehr gilt, wohl aber der des Descartes, und die man deshalb als Descartes'sche Polyeder bezeichnen kann. Es sind diess nämlich alle von einer einzigen Oberfläche begränzte Polyeder, die auch doppelt und mehrfach begränzte (durchbrochene) Gränzfiguren haben, deren Eckpunkte aber ebenfalls nur mit solchen Eckpunkten durch Kanten verbunden sind, welche durch eine einzige nur in ihnen gebrochene Linie verbunden werden können, deren einzelne Strecken auf der Oberfläche liegen und nur dann in den Raum des Polyeders selbst fallen, wenn sie zwei an einer inneren Gränzlinie einer mehrfach begränzten Gränzfigur liegende Eckpunkte verbinden. Alle solche Polyeder können angesehen werden als dadurch entstanden, dass man mehrere Euler'sche Polyeder so an einander gefügt habe, dass jedesmal von zwei auf einander gelegten Flächen die eine von der Oberfläche ganz verschwunden, und von der andern ein durchbrochener Theil übrig geblieben sei, der nun zur Begränzung des zusammengesetzten Polyeders gehört. Da auf diese Weise alle Ecken und Kanten der zusammensetzenden Polyeder zu Ecken und Kanten des zusammengesetzten werden, ohne dass neue Ecken oder Kanten hinzukommen, während dagegen bei jeder neuen Anfügung eine Gränzfigur verloren geht, so ist klar, dass für solche Polyeder der Euler'sche Satz nicht mehr Statt hat.

Was nun die Kantenwinkelsumme eines solchen zusammengesetzten Polyeders betrifft, so ist dieselbe offenbar, wenn die Zahl der Euler'schen Polyeder aus denen das Descartes'sche zusammengesetzt werden kann, $=n$ ist, um $(n-1).8$ Rechte grösser als die Summe aller Kantenwinkel jener n Euler'schen Polyeder zusammengenommen. Denn bei jeder Anfügung eines solchen Polyeders werden statt der Winkel der dadurch verdeckten Gränzfigur deren Explemente (Ergänzungen zu 360^0) Kantenwinkel des zusammengesetzten Polyeders, während sonst Alles unverändert bleibt. Die Summe der Kantenwinkel der n Euler-schen Polyeder ist aber, wenn die Zahl sämmtlicher Ecken e ist, $e.4\text{R}.-n.8\text{R}.$, also die Kantenwinkelsumme des Descartes-schen Polyeders $=e.4\text{R}.-n.8\text{R}.+(n-1).8\text{R}.=4.(e-2)$ Rechte. Der Descartes'sche Satz gilt also auch für diese Polyederklasse und ist daher deren Benennung als Descartes-sche Polyeder gerechtfertigt.

Bei allen bisher betrachteten und bei einem grossen Theil der noch zu betrachtenden Polyeder ist die Zahl der Körperwinkel der ihrer Scheitel, also der Eckpunkte gleich, un[illegible]

gleichgültig, ob man unter e die Zahl der Körperwinkel [illegible]
der Eckpunkte versteht. Es sind aber unter den einfach [illegible]
ten Polyedern (welche nur eine ununterbrochene Oberfläche [illegible]
ben) auch solche möglich, unter deren Körperwinkeln [illegible]
mehrere einen gemeinschaftlichen Scheitel haben. Für [illegible]
Polyeder können der Euler'sche und der Descartes'sche [illegible]
satz noch als richtig angesehen werden, wenn unter e [illegible]
der Körperwinkel verstanden wird, nicht aber, wenn man [illegible]
der Eckpunkte durch e ausdrückt. Es sind ferner solche [illegible]
möglich, bei denen zwei oder mehrere Flächenwinkel eine [illegible]
schaftliche Kante haben. Auch für diese können beide [illegible]
noch als richtig angesehen werden, wenn man unter k [illegible]
der Flächenwinkel versteht.

Ausser den bis jetzt genannten Polyedern sind [illegible]
Polyeder möglich, welche auch nur von einer einzigen [illegible]
brochenen Oberfläche begränzt sind, für die aber weder [illegible]
ler'sche noch der Descartes'sche Satz gilt. Diese lassen [illegible]
sämmtlich als durchbrochene Polyeder zu einer Klasse [illegible]
einigen *).

Durchbrochen ist nämlich ein Polyeder allemal, wenn [illegible]
demselben sich zwei Kantenpolygone befinden, deren keines [illegible]
Theil der Oberfläche begränzt, die aber unter einander [illegible]
Oberfläche so verbunden sind, dass die sie verbindende [illegible]
gone alle Eckpunkte mit ihnen gemein haben. Denkt man [illegible]
nun jedes der so verbundenen Kantenpolygone durch Diagonalen
in Dreiecke zerlegt, und die Ebenen dieser Dreiecke [illegible]
die Polygone unmittelbar verbindenden und nun in den [illegible]
schlossenen Raum fallenden Theiles der Oberfläche, als der [illegible]
fläche angehörig, so ist das so begränzte Polyeder nicht [illegible]
durchbrochen, also entweder ein Euler'sches oder ein Descar-
tes'sches und man hat mithin, mit Beibehaltung der obigen Be-
zeichnungsweise, für dasselbe:

$$D = 2.(e-2).$$

Jeder zwei solche Kantenpolygone auf die angegebene Weise
verbindende Theil der Oberfläche des durchbrochenen Polyeders
lässt sich aber offenbar durch Diagonalen in eben so viele Dreiecke
zerlegen, als diese Polygone zusammen Ecken haben, während

*) Dass nicht noch andere Polyeder mit einer Oberfläche mög-
lich seien, stelle ich hier nicht als Urtheil a priori, sondern als ein
Erfahrungsurtheil auf, das ich zu berichtigen bereit sein würde, wenn
mir nur ein einziges solches Polyeder gezeigt werden könnte.

...hl der an ihre Stelle gesetzten Dreiecke der Polygone selbst ...kleiner sein muss, als die Eckenzahl. Man hat mithin für ...nmal durchbrochenes Polyeder:

$$D = 2.(e-2) + 4 = 2e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

...ür ein $m$mal durchbrochenes Polyeder:

$$D = 2e + 4.(m-1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

...st ein solches Polyeder nur von Dreiecken begränzt, so ist:

$$f = 2e + 4.(m-1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$k = 3e + 6.(m-1); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

:

$$f + e = k - 2.(m-1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

...t man in diesem Ausdrucke $m = 1$, so erhält man:

$$f + e = k;$$

...: In einem einmal durchbrochenen Polyeder, das ... von Dreiecken begränzt ist, ist die Zahl der Kan... gleich der Summe der Flächenzahl und der Ecken...l. Diess gilt auch dann noch, wenn mehrere Dreiecke sich ... Vielecken vereinigen, also unter den Gränzflächen einfach be...änzte Polygone jeder Art vorkommen.

Enthält die Oberfläche eines $m$mal durchbrochenen Polyeders einfach begränzte Polygone, nämlich a_3 Dreiecke, a_4 Vierecke, ... a_n n-Ecke, so bestehen folgende Relationen:

$$a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n = f, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$D = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \ldots (n-2)a_n = 2e + 4.(m-1), \quad (14)$$

$$k = 3e + 6.(m-1) - (a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \ldots (n-3)a_n). \quad (15)$$

Aus diesen Relationen lässt sich endlich leicht die dem Euler'schen Satze entsprechende Gleichung (12) herleiten.

Was die Polyeder mit mehrfacher Begränzung (die Hohlkörper) betrifft, so ist klar, dass für dieselben der Euler'sche und Descartes'sche Satz im Allgemeinen nicht gelten können. Ist aber z. B. von den beiden Oberflächen eines Hohlkörpers die äussere so beschaffen, dass sie allein ein Euler'sches Polyeder einschliesst, während die innere ein einfach durchbrochenes Polyeder begränzt, und aus einfach begränzten Figuren zusammengesetzt ist, so hat man für das doppelt begränzte Polyeder:

$$f+e=k+2.$$

Der Euler'sche Satz gilt mithin auch für einige Hohlkörper.

Die Sätze über die durchbrochenen Polyeder dürften geeignet sein, einige Irrthümer zu berichtigen und einige neue Sätze abzuleiten.

Als einen zu berichtigenden Irrthum finde ich in dem Taschenbuch für Mathematik, Physik etc. von Dr. Rudolf Wolf (Bern 1856, zweite Auflage) folgenden, einem Collegienhefte von Steiner entlehnten Satz (p. 74.):

Es sind nur folgende Polyeder möglich, welche der Bedingung genügen, dass alle Flächen gleich viel Seiten und alle Ecken gleich viel Kanten haben: Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder aus Dreiecken, — Hexaeder aus Vierecken und Dodekaeder aus Fünfecken.

In derselben Allgemeinheit ist dieser Satz auch in der „Geometrie der Lage" von v. Staudt aufgestellt.

Damit dieser Satz richtig werde, muss statt „Polyeder" die engere Bezeichnung „Euler'sche Polyeder" stehen. Denn unter den einmal durchbrochenen Polyedern sind noch, wenn man dieselben nach der Flächenzahl in Gruppen theilt, unendlich viele Gruppen von Polyedern möglich, welche derselben Bedingung genügen, nämlich:

1) Polyeder mit nur vierkantigen Ecken und 9, 12, 15, 18...$3n$ vierseitigen Gränzflächen. In Taf. IX. Fig. 1.*) ist Grundriss und Aufriss eines dahin gehörigen Neunflächners gegeben. Hat man von demselben eine deutliche Vorstellung gewonnen, so hat man nur nöthig, sich statt der Kantendreiecke abc, $a_1b_1c_1$, ABC drei Kanten-n-Ecke vorzustellen, um das Bild eines $3n$-Flächners dieser Art zu erhalten. Bringt man noch ein viertes, fünftes,... ...$m$tes Kantenpolygon von gleicher Seitenzahl mit drei solchen Polygonen auf ähnliche Weise in Verbindung, so kann man sich auch Polyeder, von $4n$, $5n$,....mn Vierecken und eben so vielen vierkantigen Ecken begränzt, zur Anschauung bringen, oder wenigstens als möglich denken, welche ganzzahligen Werthe über 3, m und n auch haben mögen.

2) Polyeder mit e sechskantigen Ecken und $2e$ dreiseitigen Gränzflächen, wo $e=mn$ ist, und m und n jeden ganzzahligen

---

*) Taf. IX. wird mit dem nächstens erscheinenden H. 4. nachgeliefert.

positiven Werth $\gtrless 3$ haben können. Taf. IX. Fig. 2. stellt Grundriss und Aufriss eines solchen Polyeders mit 12 Ecken dar.

3) Polyeder mit f sechsseitigen Gränzflächen und $2f$ dreikantigen Ecken, wo f dieselben Werthe haben kann, wie e bei der vorhergehenden Klasse. Von einem in diese Klasse gehörigen Dodekaeder erhält man z. B. eine Vorstellung, wenn man sich ein stumpfes Rhombenhexaeder von einem spitzeren durchdrungen denkt, dessen Mittelpunkt und Hauptaxe des ersteren zusammenfallen und dessen Randkanten und Randecken innerhalb, dessen Scheitel aber ausserhalb des ersteren Hexaeders liegen. Der Theil des ersteren Hexaeders, welcher nicht in das zweite fällt, ist dann immer von 12 Sechsecken begränzt, wenn die Scheitelkanten des inneren nicht die des äusseren Hexaeders schneiden. Aehnlich kann man aus einem Hexaeder einen dahin gehörigen Neunflächner ableiten, wenn man sich dasselbe von einem dreiseitigen Prisma durchdrungen denkt.

Ausser den Steinerschen Tetraedern, Hexaedern, Oktaedern, Dodekaedern und Ikosaedern und den eben aufgezählten durchbrochenen Polyedern sind jedoch keine einfach begränzten Polyeder mehr möglich, deren sämmtliche Seitenflächen gleichviel Seiten und deren Ecken gleichviel Kanten haben*). Diess lässt sich leicht mittels der Formel (12) beweisen.

Damit nämlich ein $m$fach durchbrochenes Polyeder von nur $x$seitigen Polygonen begränzt sei und nur $y$kantige Ecken habe, müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$fx = 2k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$ey = 2k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$e + f = k - (m - 1).2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Hieraus folgt aber:

$$k = \frac{2(m-1)}{A}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$f = \frac{4(m-1)}{Ax}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

---

*) Es sei denn, dass noch Polyeder existiren, welche in die von mir gemachte Eintheilung nicht passen. Für solche gilt selbstverständlich meine Behauptung nicht.

$$e = \frac{4(m-1)}{Ay}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

wo

$$A = xy - 2(x+y). \quad (22)$$

Da nun k, f, e nothwendig ganze positive Zahlen sein müssen, so hat man für den Fall, dass $m > 1$ ist:

$$A > 0,$$

und mithin nach (19):

$$k \leqq 2(m-1) < 2m.$$

Diess ist aber offenbar unmöglich: **Es gibt also keine mehrfach durchbrochenen Polyeder von der vorausgesetzten Beschaffenheit.**

Setzt man $m = 1$, so erhält man

$$A = xy - 2(x+y) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

und mithin:

$$k = \frac{0}{0}, \quad f = \frac{0}{0}, \quad e = \frac{0}{0}.$$

Diese Werthe sind aber nicht bloss scheinbar, sondern wirklich unbestimmt, d. h. vieldeutig. Um die möglichen Werthe von x und y in diesem Falle leichter ermitteln zu können, setzen wir

$$x = 3 + \alpha, \quad y = 3 + \beta,$$

wo α und β nur positive Werthe haben, oder $= 0$ sein können, da x und y jedenfalls $\geqq 3$ sein müssen. Setzt man diese Werthe in (23) ein, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = 3. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Dieser Gleichung genügen aber nur die folgenden Werthepaare von der verlangten Beschaffenheit:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3;$$
$$\alpha = 1, \quad \beta = 1;$$
$$\alpha = 3, \quad \beta = 0.$$

Sei nun $\alpha = 0$, $\beta = 3$, also $x = 3$, $y = 6$; so folgt aus (16) und (17), dass $2k$ sowohl durch 3, als durch 6, dass also k durch 3 theilbar sein muss. Setzt man nun $k = 3\varphi$, so erhält man aus (16) und (17):

$$f = 2\varphi, \quad e = \varphi.$$

Diesen Bedingungen entsprechen die oben in 2) genannten Polyeder, für welche man mithin noch den Satz hat, dass bei allen zu ihnen gehörenden Polyedern die Flächenzahl das Doppelte, die Kantenzahl das Dreifache der Eckenzahl ist.

Sei ferner $\alpha = 1$, $\beta = 1$; also $x = y = 4$, so folgt aus (16) und (17), dass k durch 2 theilbar sein muss, und, wenn $k = 2\varphi$ gesetzt wird:

$$f = e = \varphi,$$

also

$$k = 2e = 2f.$$

Man hat mithin für diese Polyeder, welche oben in 1) zusammengestellt wurden:

Die Zahl ihrer Ecken ist der Flächenzahl gleich und die Hälfte der Kantenzahl.

Sei endlich $\alpha = 3$, $\beta = 0$, also $x = 6$, $y = 3$, so folgt aus (16) und (17), dass k durch 3 theilbar sein muss, und wenn man $k = 3\varphi$ setzt:

$$f = \varphi, \quad e = 2\varphi.$$

Für diese oben als die dritte aufgeführte Polyederklasse hat man mithin den Satz, dass die Zahl ihrer Ecken das Doppelte, ihre Kantenzahl aber das Dreifache ihrer Eckenzahl ist. Da keine andern Werthpaare für x und y möglich sind, so ist mithin unsere obige Behauptung erwiesen.

Man kann sich leicht überzeugen, dass bei den drei betrachteten Polyederklassen der Grösse φ jeder Werth von der Form

$$\varphi = mn$$

beigelegt werden kann, wo sowohl m, als n ganze positive Zahlen sind, welche $= 3$ oder > 3, aber nicht < 3 sein können. Doch lässt sich hiefür wohl nicht leicht ein „strenger" Beweis führen.

Aus unserer Betrachtung geht auch hervor, dass der, so viel mir bekannt, bis jetzt nur von dem vor einigen Jahren dahier verstorbenen Professor Adam Müller in einer sonst nicht gerade rühmenswerthen Broschüre „zur Polyedrometrie", angezweifelte Satz: „es sei kein Polyeder möglich, das nur von Sechsecken begränzt wäre", durchaus falsch ist.

XXX.

Die allgemeine Gleichung der Minimumsflächen.

Von

Herrn Doctor *A. Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Die Bestimmung der Fläche, deren Inhalt zwischen gegebenen Grenzen ein Minimum ist, führt bekanntlich auf die partielle Differentialgleichung

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

worin abkürzend

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2z}{dxdy}=s,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t$$

gesetzt ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung mit zwei willkührlichen Funktionen ist schon von Monge und später von Legendre in einer anderen Form gegeben worden. Die Coordinaten sind aber dadurch jedesmal imaginär ausgedrückt, so dass man auch den willkührlichen Funktionen imaginäre Formen beizulegen hat, um zu reellen Coordinatenwerthen zu gelangen. Eine derartige Umwandlung des Willkührlichen, was in dem allgemeinen Integral vorkommt, scheint für ein allzuschwieriges Unternehmen angesehen zu sein, da man nicht Anstand nimmt, zu der partiellen Differentialgleichung zurückzukehren, um daraus besondere Integralformen in reeller Gestalt zu gewinnen. Es hat sich bei mir die Ueberzeugung festgestellt, dass das allgemeine Integral einer Differentialgleichung, wenn es in geschlossener Form aufgestellt ist, als das Endziel der Arbeit betrachtet werden darf, welche der Integration zugewiesen ist; und nur schwer kann ich mich dazu entschliessen, diesen Vortheil aufzugeben, wenn es sich darum handelt, die Eigenschaften des Integrals zu untersuchen. In dem gegenwärtigen Falle hielt ich es desshalb für gerathener, die Umformung des allgemeinen Integrals der partiellen Differen-

tialgleichung zu versuchen. Es hat sich herausgestellt, dass man drei reelle Coordinatenwerthe daraus ableiten kann, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Um dies zu zeigen, erlaube ich mir, auf das Integrationsverfahren zurückzukommen, welches ich in dieser Zeitschrift (Thl. XXXIII. S. 316.) eingeschlagen habe. Dies Verfahren besteht darin, dass man die allgemeinen Werthe der ersten Differentialquotienten z_x und z_y darstellt, um alsdann die vollständige Differentialgleichung

$$dz = z_y dy + z_x dx$$

zu integriren. Die partielle Differentialgleichung ist dort angeschrieben in der Form:

$$(1+z_y^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2z_x z_y \frac{d^2z}{dxdy} + (1+z_x^2)\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

Zur Berechnung der Werthe z_x und z_y aber sind die beiden Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad X\left(X\frac{dy}{dz_y} - V_1\frac{dy}{dz_x}\right) = V_2\left(X\frac{dx}{dz_y} - V_1\frac{dx}{dz_x}\right),$$

$$\text{(c)} \qquad X\left(X\frac{dy}{dz_y} - V_2\frac{dy}{dz_x}\right) = V_1\left(X\frac{dx}{dz_y} - V_2\frac{dx}{dz_x}\right)$$

aufgestellt, worin abkürzend

$$X = 1 + z_y^2,$$

$$V_1 = -(z_x z_y + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{1+z_y^2+z_x^2}),$$

$$V_2 = -(z_x z_y - \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{1+z_y^2+z_x^2})$$

gesetzt ist. Damit dieselben sich vereinfachen, hat man an die Stelle von z_x und z_y als neue Veränderliche die beiden Funktionen eingeführt, welche sich durch die Integration der Gleichungen

$$(1+z_y^2)\,dz_x - (z_x z_y \pm \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{1+z_y^2+z_x^2})\,dz_y = 0$$

ergeben. Ich schreibe die beiden Integrale hier in der Form:

$$\frac{z_x + \sqrt{1+z_y^2+z_x^2}}{\mp\sqrt{-1}+z_y} = c,$$

wo c die willkührliche Beständige ist. Man gebrauche also die neuen Veränderlichen:

$$\frac{z_x + \sqrt{1+z_y^2+z_x^2}}{\sqrt{-1}+z_y} = \alpha \text{ und } \frac{z_x + \sqrt{1+z_y^2+z_x^2}}{-\sqrt{-1}+z_y} = \beta.$$

Daraus findet man:

$$\frac{V_2}{X}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right) \text{ und } \frac{V_1}{X}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right);$$

und die Elimination von z_x und z_y gibt die einfacheren Gleichungen:

$$\text{(b)} \qquad \frac{dy}{d\alpha}=\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\cdot\frac{dx}{d\alpha}$$

und

$$\text{(c)} \qquad \frac{dy}{d\beta}=\frac{1-\beta^2}{2\beta}\cdot\frac{dx}{d\beta}.$$

Man eliminire nun y zwischen (b) und (c), und es entsteht $\frac{d^2x}{d\alpha d\beta}=0$. Daraus folgt:

$$\text{(1)} \qquad x=\varphi(\alpha)+\psi(\beta),$$

wo φ und ψ willkührliche Funktionen sind. Man hat damit aber eine der beiden endlichen Gleichungen aufgefunden, wodurch die allgemeinen Werthe z_x und z_y bestimmt sind. Um die andere Gleichung darzustellen, bilde man aus (b) und (c) die vollständige Differentialgleichung:

$$dy=\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\cdot\frac{dx}{d\alpha}d\alpha+\frac{1-\beta^2}{2\beta}\cdot\frac{dx}{d\beta}d\beta.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (1) erhält man daraus:

$$\text{(2)} \qquad y=\int\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha+\int\frac{1-\beta^2}{2\beta}\psi'(\beta)d\beta.$$

Es ist nun zwar unmöglich, aus der allgemeinen Form der Gleichungen (1) und (2) die Werthe z_x und z_y als Funktionen von x und y zu entwickeln; allein die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz=z_y dy+z_x dx$$

lässt sich dennoch für alle Fälle ausführen, indem man auch z als Funktion von α und β betrachtet. Man schreibt desshalb:

$$dz=(z_y\frac{dy}{d\alpha}+z_x\frac{dx}{d\alpha})d\alpha+(z_y\frac{dy}{d\beta}+z_x\frac{dx}{d\beta})d\beta.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2) hat man auch:

$$dz=\left(\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}z_y+z_x\right)\varphi'(\alpha)d\alpha+\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}z_y+z_x\right)\psi'(\beta)d\beta.$$

Nun findet man aber:

$$\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} z_y + z_x = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\sqrt{-1},$$

$$\frac{1-\beta^2}{2\beta} z_y + z_x = -\frac{1+\beta^2}{2\beta}\sqrt{-1};$$

und desshalb die vollständige Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{\sqrt{-1}} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha - \frac{1+\beta^2}{2\beta}\psi'(\beta)\,d\beta.$$

Durch die Integration erhält man:

$$(3) \qquad \frac{z}{\sqrt{-1}} = \int \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha - \int \frac{1+\beta^2}{2\beta}\psi'(\beta)\,d\beta.$$

Um die allgemeine Gleichung der Minimumsflächen als Funktion der drei Coordinaten x, y, z darzustellen, wird man die Differentialquotienten z_x und z_y zwischen den Gleichungen (1), (2), (3) eliminiren. Die Elimination von z_x und z_y fällt aber zusammen mit der Elimination von α und β. Die allgemeine Gleichung der Minimumsflächen ist demnach ausgedrückt durch das System:

$$1. \qquad z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

$$2. \qquad y = \int \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha + \int \frac{1-\beta^2}{2\beta}\psi'(\beta)\,d\beta,$$

$$3. \qquad -z\sqrt{-1} = \int \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha - \int \frac{1+\beta^2}{2\beta}\psi'(\beta)\,d\beta.$$

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wie man die in dem System vorkommenden willkührlichen Grössen umzuwandeln habe, damit drei reelle Coordinatenwerthe vorliegen. Es ist leicht, dies zu bewerkstelligen. Man setze:

$$\varphi(\alpha) = \Phi(\alpha) + \sqrt{-1}\,.\,\Psi(\alpha),$$

$$\psi(\beta) = \Phi(\beta) - \sqrt{-1}\,.\,\Psi(\beta),$$

wo Φ und Ψ reelle Funktionen sind. Ferner setze man:

$$\alpha = a + \sqrt{-1}\,.\,b, \quad \beta = a - \sqrt{-1}\,.\,b.$$

Die drei Coordinaten sind dann durch reelle Funktionen von a und b ausgedrückt. Nachdem man diese Substitutionen gemacht hat, kann man die beiden Gleichungen 2. und 3. auch ersetzen durch die einzige einfachere:

$$4. \qquad y - z\sqrt{-1} = \int \frac{1}{\alpha}\varphi'(\alpha)\,d\alpha - \int \beta\psi'(\beta)d\beta.$$

Denn wenn alle Glieder dieser Gleichung auf die eine Seite gebracht sind, so werden sowohl der gemeinsame Faktor von $\sqrt{-1}$, als auch die übrigen Glieder der Gleichung für sich gleich Null zu setzen sein.

XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Gustav Skrivan, Direktor der öffentl. Oberrealschule a. d. Bauernmarkte zu Wien.

Wenn p eine Stammzahl und

$$p-1=a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots . k^\varkappa$$

ist, wobei $a, b, c, \ldots . k$ Stammfaktoren zu $(p-1)$ bedeuten, und bezeichnen $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_\sigma$ alle diejenigen zu $(p-1)$ primen Zahlen, die $<(p-1)$ sind: wie viel Binomien zur Summe t lassen sich aus den m bilden, wenn t aus keinen anderen Primfaktoren zusammengesetzt ist als wie $(p-1)$.

Von Herrn Doctor O. Böklen in Sulz im Königreich Würtemberg.

1) Man ziehe durch einen Punkt M einer Ellipse, deren Mittelpunkt O ist, die Normale, welche die grosse Axe in N und die Verlängerung der kleinen Axe in N' schneidet, so ist die Grösse

$$\sqrt{MN.MN'}$$

gleich dem, dem Halbmesser OM konjugirten Semidiameter (oder Halbmesser) der Ellipse.

2) Man trage auf der Normale eines Punkts einer Ellipse nach beiden Seiten hin Stücke ab gleich dem konjugirten Halbmesser dieses Punkts, so liegen die Endpunkte dieser Stücke auf den Umfängen zweier Kreise, welche vom Mittelpunkte der Ellipse mit zwei Halbmessern beschrieben werden, gleich der Differenz und gleich der Summe der Halbaxen der Ellipse.

3) Das Produkt zweier Brennstrahlen (der von einem Punkte der Ellipse nach den Brennpunkten gezogenen Linien) ist gleich dem Quadrat des konjugirten Halbmessers des betreffenden Punkts.

4) Das Produkt aus der grossen und kleinen Halbaxe und dem Krümmungshalbmesser eines Punkts der Ellipse ist gleich dem Cubus des konjugirten Halbmessers dieses Punkts.

5) Zieht man an die Endpunkte der grossen Axe einer Ellipse die Tangenten, welche die Tangente eines Punkts M derselben in L und L' schneiden, so ist die Grösse

$$\sqrt{ML.ML'}$$

gleich dem konjugirten Halbmesser von M.

6) Das Produkt derjenigen zwei Abschnitte auf der Tangente eines Punkts der Ellipse, welche zwischen diesem Punkt und den Durchschnitten mit den Verlängerungen der Axen enthalten sind, ist gleich dem Quadrat des konjugirten Semidiameters des Punkts.

7) Die Punkte L und L', die beiden Brennpunkte und die in 2) genannten Punkte liegen auf Einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt von der Tangente des Punkts M mit der Verlängerung der kleinen Axe ist.

8) Das Produkt aus dem Abstand des Mittelpunkts der Ellipse von der Normale eines Punkts derselben und dem zwischen den Verlängerungen der Axen enthaltenen Stück der Tangente dieses Punkts ist gleich der Differenz der Quadrate der Halbaxen.

Die Tangente eines Punkts M der Ellipse werde von den Verlängerungen der grossen und kleinen Axe in T und T' geschnitten, und P sei der Fusspunkt des vom Mittelpunkt auf die Tangente gefällten Perpendikels, so ist

9) $MT'.PT$ gleich dem Quadrat der grossen Halbaxe,
$MT.PT'$ gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe.

O sei der Mittelpunkt und N, N' die Durchschnitte der Normale mit den Axen (wie oben), so ist

10) $OP.MN$ gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe,
$OP.MN'$ gleich dem Quadrat der grossen Halbaxe.

11) Das Verhältniss $MN:MN'$ ist also konstant.

12) Die Projektion der Linie MN auf einen Brennstrahl ist gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe, dividirt durch die grosse Halbaxe.

13) Die Projektion der Geraden MN' auf einen Brennstrahl ist gleich der grossen Halbaxe.

Man bestimme auf dem Umfange der Ellipse denjenigen P[illegible] dessen Krümmungskreis gleichen Inhalt mit der Ellipse hat, findet man für denselben folgende Eigenschaften:

14) Der Abstand seiner Normale vom Mittelpunkte der E[illegible] ist gleich der Differenz der Halbaxen der Ellipse.

15) Dieser Abstand ist grösser als derjenige der Norm[illegible] irgend eines andern Punktes der Ellipse.

16) Das zwischen den Axen enthaltene Stück seiner Tangent[illegible] ist gleich der Summe der Halbaxen.

17) Dieses Stück ist grösser als bei irgend einem ander[illegible] Punkt der Ellipse.

18) Der zwischen diesem Punkte und der Verlängerung der kleinen Axe enthaltene Abschnitt der Tangente ist gleich der grossen Halbaxe der Ellipse; der andere Abschnitt der Tangente, welcher zwischen dem genannten Punkte und der Verlängerung der grossen Axe enthalten ist, ist gleich der kleinen Halbaxe.

19) Zieht man vom Mittelpunkte auf die Tangente des Punkts ein Perpendikel, so wird dadurch das zwischen den Verlängerungen der Axen enthaltene Stück der Tangente in zwei Abschnitte getheilt, gleich der grossen und kleinen Halbaxe.

20) Zieht man durch den Mittelpunkt des diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreises Parallelen mit den Axen, so ist das zwischen diesen Parallelen enthaltene Stück der Tangente des Punkts gleich der Summe der Halbaxen. Der Punkt selbst theilt dieses Stück seiner Tangente in zwei Abschnitte, gleich der grossen und kleinen Halbaxe.

21) Der Halbmesser des diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreises, die Entfernung seiner Tangente vom Mittelpunkte, derjenige Halbmesser der Ellipse, welcher dem nach diesem Punkte gezogenen Halbmesser konjugirt ist, sind einander gleich.

Bestimmt man auf dem Umfange des Quadranten der Ellipse zwei (zusammengehörige) Punkte so, dass das Produkt der ihnen entsprechenden Krümmungskreise gleich dem Quadrat des Inhalts der Ellipse ist, so ergeben sich für diese Punktenpaare nachstehende Eigenschaften:

22) Die Abstände ihrer Normalen vom Mittelpunkte sind einander gleich.

23) Diejenigen Abschnitte ihrer Tangenten, welche zwischen den Verlängerungen der Axen liegen, sind auch einander gleich.

24) Zieht man durch den Einen Punkt Parallelen mit den Axen, so wird dadurch das zwischen den Verlängerungen der Axen enthaltene Stück der Tangente des andern Punkts in drei Abschnitte getheilt, wovon die zwei äussern beziehlich gleich den Halbaxen der Ellipse sind.

25) Dasjenige Stück der Tangente des Einen Punkts, welches zwischen demselben und der Verlängerung einer Axe liegt, ist gleich dem Stück der Tangente des andern Punkts, welches zwischen dem vom Mittelpunkt darauf gefällten Perpendikel und der Verlängerung der andern Axe enthalten ist.

26) Das Produkt der Abstände des Mittelpunkts von den Tangenten zweier solchen Punkte ist konstant und gleich dem Produkte der Halbaxen.

27) Das Produkt derjenigen zwei Halbmesser der Ellipse, welche den nach diesen Punkten gezogenen Halbmessern konjugirt sind, ist konstant und ebenfalls gleich dem Produkte der Halbaxen.

28) Das Produkt derjenigen Abschnitte der Tangenten von zwei solchen Punkten, welche zwischen ihnen und den Verlängerungen der kleinen (grossen) Axe liegen, ist konstant und gleich dem Quadrat der grossen (kleinen) Halbaxe.

29) Das Produkt derjenigen Abschnitte der Tangenten von zwei solchen Punkten, welche zwischen den vom Mittelpunkt der Ellipse darauf gezogenen Senkrechten und den Verlängerungen der kleinen (grossen) Axe liegen, ist konstant und gleich dem Quadrat der kleinen (grossen) Halbaxe.

30) Das Produkt der Abschnitte von den Normalen zweier solchen Punkte, welche zwischen denselben und der grossen (Verlängerung der kleinen) Axe der Ellipse liegen, ist konstant und gleich der dritten Potenz der kleinen (grossen) Halbaxe, dividirt durch die grosse (kleine) Halbaxe.

Eine Gerade ist nach dem äussern und mittlern Verhältniss getheilt, wenn sich der kleine Abschnitt zum grossen Abschnitt verhält, wie dieser zur ganzen Linie. Bei den Alten hiess diese Theilung „der goldene Schnitt." Theilt man sämmtliche Ordinaten eines Kreises nach dem äussern und mittlern Verhältniss, so dass, wenn z. B. m ein Punkt des Kreises ist, mn die Ordinate und M der Theilpunkt, die Proportion stattfindet:

$$Mn : mM = mM : mn,$$

so liegen die Theilpunkte M auf einer Ellipse, welche besondere Eigenschaften hat, von denen einige hier angeführt sind:

31) Die Differenz der beiden Halbaxen ist gleich der Seite des dem grossen Axenkreis (dessen Durchmesser die grosse Axe der Ellipse ist) einbeschriebenen Zehnecks.

32) Die Seite des dem grossen Axenkreis einbeschriebenen Fünfecks ist so gross als die halbe Seite des diesem Kreis umschriebenen Fünfecks und die Seite des dem kleinen Axenkreis (dessen Durchmesser die kleine Axe der Ellipse ist) einbeschriebenen Zehnecks zusammen.

33) Der Punkt auf dem Umfange der Ellipse, dessen Krümmungskreis gleichen Inhalt mit der Ellipse hat, besitzt folgende Eigenthümlichkeiten:

a. Der Halbmesser seines Krümmungskreises, der Abstand seiner Tangente sowohl, als auch seiner Normale vom Mittelpunkte, derjenige Halbmesser der Ellipse, welcher dem nach diesem Punkt gezogenen konjugirt ist, sind unter einander gleich und so gross als die Seite des dem grossen Axenkreis einbeschriebenen Zehnecks.

b. Die Tangente dieses Punkts bildet mit den (Verlängerungen der) beiden Axen der Ellipse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Catheten beziehungsweise gleich der Seite des dem grossen Axenkreis einbeschriebenen Fünfecks und gleich der halben Seite des diesem Kreise umbeschriebenen Fünfecks sind.

c. Dasjenige Stück der Normale dieses Punkts, welches zwischen demselben und dem Durchschnitt mit der grossen Axe liegt, ist gleich der Seite des dem kleinen Axenkreis (dessen Durchmesser die kleine Axe ist) einbeschriebenen Zehnecks.

d. Die Normale dieses Punkts bildet mit den Axen (oder ihren Verlängerungen) ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Catheten beziehungsweise gleich der Seite des dem grossen Axenkreis einbeschriebenen Fünfecks und gleich der halben Seite des diesem Kreis umschriebenen Fünfecks sind. Die beiden Segmente der Hypotenuse sind gleich den Halbaxen der Ellipse.

e. Der Mittelpunkt des diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreises liegt auf dem Umfange der Ellipse; wir nennen ihn E.

34) Der Punkt E der Ellipse hat folgende Eigenschaften:

a. Der nach ihm gezogene Halbmesser der Ellipse ist gleich der Seite des dem grossen Axenkreis einbeschriebenen Zehnecks.

b. Er theilt dasjenige Stück seiner Tangente, welches zwischen den Verlängerungen der Axen enthalten ist, in zwei Theile, wovon der Eine gleich der Seite des dem grossen Axenkreis ein-

beschriebenen Quadrats ist, während der Andere gleich der Seite des dem kleinen Axenkreise einbeschriebenen Quadrats ist.

c. Seine Tangente bildet mit den verlängerten Axen der Ellipse ein Dreieck, dessen kleine Cathete gleich der Seite des dem kleinen Axenkreis einbeschriebenen Zehnecks ist.

d. Das rechtwinkliche Dreieck, welches die Tangente dieses Punkts mit den verlängerten Axen bildet, ist kongruent dem Dreieck, welches die Normale desselben mit den Axen bildet.

35) Die Tangente des in 33) genannten Punkts (dessen Krümmungskreis gleichen Inhalt mit der Ellipse hat) schneide die Verlängerung der kleinen Axe in T und diejenigen zwei Tangenten der Ellipse, welche dieselbe in den Endpunkten der grossen Axe berühren, in L und L', so ist $TL = TL' =$ der Seite des dem grossen Axenkreis einbeschriebenen Fünfecks. Beschreibt man von T als Mittelpunkt mit dieser Linie als Halbmesser einen Kreis, so geht derselbe durch die beiden Brennpunkte, durch E, und schneidet die Verlängerung der kleinen Axe in demselben Punkte mit der Tangente von E.

XXXII.

Miscellen.

Der eigentliche Erfinder des sogenannten Völler'schen Satzes. M. s. Archiv. Thl. XXXI. Nr. XXVII. S. 449.

Durch einen verehrten mathematischen Collegen, dessen Wahrheitsliebe ausser allem Zweifel ist, bin ich unter dem 31. März 1862 in Kenntniss gesetzt worden, dass der im Archiv. Thl. XXXI. Nr. XXVII. S. 449. zuerst publicirte und dann auf verschiedene Arten bewiesene sogenannte Völler'sche Satz von Herrn Möbius in Leipzig gefunden worden und durch eine Verkettung besonderer Umstände zur Kenntniss des nun bereits verstorbenen Völler gelangt ist. Wenn dieser Letztere sich auch jetzt nicht mehr verantworten kann, so nehme ich doch nicht den geringsten

Anstand, die mir gemachte Mittheilung nach dem bestimmt gegen mich ausgesprochenen Wunsche zu veröffentlichen, da deren Richtigkeit durch mehrere in jeder Beziehung wahrheitsliebende und höchst achtbare Mathematiker verbürgt werden kann, die auch über die Art und Weise, wie Völler zu der Kenntniss des Satzes gelangt ist, vollständig Auskunft zu geben im Stande sind und mir zu geben die Güte gehabt haben. Namen zu nennen ist so lange unnöthig, als nicht sonstige Reclamationen eingehen, um so mehr, weil Möbius bei seiner grossen, allgemein bekannten Bescheidenheit, — der jedesmaligen Begleiterin grossen wissenschaftlichen Verdienstes, — es verschmäht hat, selbst einen Schritt zu thun, um sich den Besitz des Satzes, der also von jetzt an nicht mehr der Völler'sche, sondern der Möbius'sche Satz heissen wird, zu sichern. Mir hat es besondere Freude gemacht, Vorstehendes im Interesse eines der verdientesten deutschen Mathematiker hier veröffentlichen zu können.

Greifswald den 2. Mai 1862. Grunert.

Von dem Herausgeber.

Ich habe früher mehrmals, auch in diesem Archive, darauf hingewiesen, dass die Bezeichnung $\sin^2\varphi$ statt $\sin\varphi^2$ u. s. w. eine ganz verfehlte, ja selbst schädliche sei, und den Wunsch ausgesprochen, dass man sich derselben ganz enthalten möge. Es scheint nicht, dass meine Worte Beachtung gefunden haben. Deshalb freu't es mich um so mehr, dass Gauss in einem Briefe an Schumacher*) den meinigen ganz ähnliche Ansichten ausspricht; und da vielleicht die Worte dieses grossen Mathematikers mehr fruchten als die meinigen, so theile ich dieselben nachstehend mit. Unter dem 23. September 1839 schreibt Gauss an Schumacher:

„Aehnliches gilt von der Schreibart $\sin^2\varphi$. Ich finde diese Schreibart aller Analogie zuwider, da die Analogie sonst ein an die Spitze gesetztes ^{2} als eine Abkürzung für doppeltes Schreiben des nächst vorhergehenden erfordert**), also $\sin^2\varphi = \sin(\sin\varphi)$. Die Schreibart $\sin^2\varphi$ wird allerdings von angesehenen Namen ge-

*) M. s. den kürzlich erschienenen dritten Band des Briefwechsels zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona 1861. S. 292.

**) Ich selbst habe früher schon oft genug an $\Delta\Delta y = \Delta^2 y$, $\partial\partial y = \partial^2 y$, u. s. w. erinnert. G.

braucht, wie **Laplace** und **Poisson** *), und ist an sich gut gemeint, nemlich einer falschen Interpretation vorzubeugen, damit man das, was $(\sin\varphi)^2$ sein soll, nicht als ein $\sin(\varphi)^2$ verstehe, wenn man $\sin\varphi^2$ schlechthin schreibt. Aber unter 1000 Fällen kommt die letztere Bedeutung nicht Einmal vor, es kann gewiss ein Missverständniss nie eintreten, und wo ein solches denkbar wäre, ist es weit besser, durch eine Parenthese (wie oben) vorzubeugen, als eine durchaus analogisch unrichtige Schreibart anzuwenden. Ich erinnere mich, dass **Herschel** sich auch einmal nachdrücklich gegen die Schreibart $\sin^2\varphi$ erklärt hat. **Bessel**, der, wie mir scheint, auf correctes Formelnschreiben etwas hält, schreibt meines Wissens nie so.“

Möchten doch diese Worte des grössten deutschen Mathematikers dazu dienen, dass die, welche auf diesen letzteren Namen auch Anspruch zu machen Recht zu haben glauben, sich die in Rede stehende ganz unnütze und überflüssige, ja, wie ich früher deutlich dargelegt zu haben glaube, selbst schädliche Nachäfferei der Franzosen, — bei aller Achtung vor denselben als Meister in unserer Wissenschaft, — endlich abgewöhnten. Die Sache ist gar nicht so unwichtig, wie sie auf den ersten Anblick zu sein scheint, und, was den Unterricht auf der Schule betrifft, so wäre sehr zu wünschen, dass besonders hier auf irgend eine Weise eine Uebereinstimmung herbeigeführt und die Schreibart $\sin^2\varphi$ ganz abgeschafft würde.

Beweis des berühmten Ausdrucks von Wallis für π.

Von dem Herausgeber.

Als ein Beispiel für die Anwendung der bestimmten Integrale mag sich der folgende Beweis des von **Wallis** gegebenen Ausdrucks für π empfehlen.

Nehmen wir den Bogen x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so ist

$$\sin x = \sqrt{1-\cos x^2},$$

und folglich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x\sqrt{1-\cos x^2}.$$

Nun ist aber:

*) In Frankreich allgemein. G.

$$\int \sin x\partial x = -\cos x, \text{ also } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\partial x = 1.$$

Ferner ist nach dem Binomischen Lehrsatze, dessen Anwendung hier verstattet ist *), wenn wir die Binomial-Coefficienten auf bekannte Weise bezeichnen:

$$\sqrt{1-\cos x^2} = 1-(\tfrac{1}{2})_1 \cos x^2 + (\tfrac{1}{2})_2 \cos x^4 - (\tfrac{1}{2})_3 \cos x^6 + \ldots,$$

also nach einem bekannten Satze der Integralrechnung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x \sqrt{1-\cos x^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x - (\tfrac{1}{2})_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2 \partial x + (\tfrac{1}{2})_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^4 \partial x - (\tfrac{1}{2})_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^6 \partial x$$

$$+ \ldots.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel ist aber:

$$\int \cos x^{2n} \partial x = \frac{\sin x \cos x^{2n-1}}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \int \cos x^{2n-2} \partial x,$$

und folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n} \partial x = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n-2} \partial x,$$

also durch successive Anwendung dieser Formel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n} \partial x = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n-2} \partial x,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n-2} \partial x = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n-4} \partial x,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n-4} \partial x = \frac{2n-5}{2n-4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n-6} \partial x,$$

u. s. w.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^4 \partial x = \tfrac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2 \partial x, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2 \partial x = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x;$$

*) M. s. Archiv. Thl. VIII. S. 304. B. I. und B. II. 2.

folglich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben lässt, weil

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x = \frac{\pi}{2}$$

ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2n} \partial x = \frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots.2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Führt man nun dies in den obigen Ausdruck von

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x \sqrt{1-\cos x^2}$$

ein, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x \sqrt{1-\cos x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \{1 - (\tfrac{1}{2})_1 . \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})_2 . \frac{1.3}{2.4} - (\tfrac{1}{2})_3 . \frac{1.3.5}{2.4.6} + (\tfrac{1}{2})_4 . \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \ldots\}.$$

Nun ist aber:

$$1 - (\tfrac{1}{2})_1 . \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = \frac{1.3}{2.2},$$

$$1 - (\tfrac{1}{2})_1 . \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})_2 . \frac{1.3}{2.4} = \frac{1.3}{2.2} - \frac{1}{2.4} . \frac{1.3}{2.4} = \frac{1.3}{2.2}(1 - \frac{1}{4.4}) = \frac{1.3.3.5}{2.2.4.4},$$

$$1 - (\tfrac{1}{2})_1 . \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})_2 . \frac{1.3}{2.4} - (\tfrac{1}{2})_3 . \frac{1.3.5}{2.4.6} = \frac{1.3.3.5}{2.2.4.4} - \frac{1.3}{2.4.6} . \frac{1.3.5}{2.4.6}$$
$$= \frac{1.3.3.5}{2.2.4.4}(1 - \frac{1}{6.6}) = \frac{1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6},$$

$$1 - (\tfrac{1}{2})_1 . \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})_2 . \frac{1.3}{2.4} - (\tfrac{1}{2})_3 . \frac{1.3.5}{2.4.6} + (\tfrac{1}{2})_4 . \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$$
$$= \frac{1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} . \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$$
$$= \frac{1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6}(1 - \frac{1}{8.8}) = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9}{2.2.4.4.6.6.8.8};$$

wo nun schon erhellet, wie man auf diese Art weiter gehen kann, die Art der Anwendung der bekannten Bernoulli'schen Schlussweise auch für sich klar ist.

Setzen wir nun

$$S=1-(\tfrac{1}{2})_1\cdot\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})_2\cdot\frac{1.3}{2.4}-(\tfrac{1}{2})_3\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}+(\tfrac{1}{2})_4\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}-\ldots.$$

und

$$S_k=1-(\tfrac{1}{2})_1\cdot\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})_2\cdot\frac{1.3}{2.4}-\ldots.+(-1)^k.(\tfrac{1}{2})_k.\frac{1.3.5\ldots.(2k-1)}{2.4.6\ldots.2k};$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$S_0=1,$$

$$S_1=\frac{1.3}{2.2},$$

$$S_2=\frac{1.3.3.5}{2.2.4.4},$$

$$S_3=\frac{1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6},$$

$$S_4=\frac{1.3.3.5.5.7.7.9}{2.2.4.4.6.6.8.8},$$

u. s. w.

also:

$$S_k=\frac{1.3.3.5.5.7\ldots.(2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2.2.4.4.6.6\ldots.(2k-2).2k.2k},$$

und folglich:

$$S=\mathrm{Lim}\frac{1.3.3.5.5.7\ldots.(2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2.2.4.4.6.6\ldots.(2k-2).2k.2k}$$

für ein in's Unendliche wachsendes k.

Daher ist nach dem Obigen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial x\sqrt{1-\cos x^2}=\frac{\pi}{2}\mathrm{Lim}\frac{1.3.3.5.5.7\ldots.(2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2.2.4.4.6.6\ldots.(2k-2).2k.2k},$$

und folglich, weil

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\partial x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial x\sqrt{1-\cos x^2}$$

und das erste dieser beiden Integrale die Einheit ist:

$$1=\frac{\pi}{2}\mathrm{Lim}\frac{1.3.3.5.5.7\ldots.(2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2.2.4.4.6.6\ldots.(2k-2).2k.2k},$$

also:

$$\frac{\pi}{2}=\text{Lim}\,\frac{2.2.4.4.6.6\ldots.(2k-2).2k.2k}{1.3.3.5.5.7\ldots.(2k-1)(2k-1)(2k+1)},$$

immer unter der Voraussetzung, dass k in's Unendliche wächst.

Setzt man:

$$P_k=\frac{2.2.4.4.6.6\ldots.(2k-2).2k.2k}{1.3.3.5.5.7\ldots.(2k-1)(2k-1)(2k+1)},$$

also

$$P_{k+1}=\frac{2.2.4.4.6.6\ldots.2k.(2k+2)(2k+2)}{1.3.3.5.5.7\ldots.(2k+1)(2k+1)(2k+3)};$$

so ist:

$$P_{k+1}=\frac{(2k+2)(2k+2)}{(2k+1)(2k+3)}P_k;$$

aber:

$$(2k+2)(2k+2)=\{(2k+1)+1\}\{(2k+3)-1\},$$

und folglich:

$$(2k+2)(2k+2)=(2k+1)(2k+3)+1,$$

also

$$(2k+2)(2k+2)>(2k+1)(2k+3),$$

daher immer

$$P_{k+1}>P_k,$$

so dass also, wenn k in's Unendliche wächst, sich immer P_k im Wachsen der Gränze $\frac{\pi}{2}$ nähert.

Weil

$$P_{k+1}=\frac{(2k+1)(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}P_k$$

ist, so ist:

$$P_{k+1}-P_k=\frac{P_k}{(2k+1)(2k+3)},$$

und der Unterschied $P_{k+1}-P_k$ nimmt also sehr schnell ab, weil P_k niemals grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist.

(Ein anderer Beweis nächstens.)

Anfrage und Aufforderung.

Von Herrn Professor Dr. Wittstein in Hannover.

Die Erfindung des Stereoskops bietet für den Unterricht in

der Stereometrie und descriptiven Geometrie ein so schätzbares Hülfsmittel, dass dasselbe heutiges Tages nirgends mehr fehlen sollte. Nicht nur ersetzt es in vielen Fällen eine Modellsammlung, sondern für gewisse Fälle, insbesondere für Linear-Constructionen, leistet es noch ein Erhebliches mehr. Ich selbst habe mir eine kleine Gruppe stereoskopischer Zeichnungen für den genannten Zweck theils selbst angefertigt, theils unter meiner Leitung anfertigen lassen und davon die besten Erfolge gehabt. Da aber die Herstellung solcher Zeichnungen sehr zeitraubend ist, so erlaube ich mir hierdurch die Anfrage:

> Ob vielleicht schon irgendwo Sammlungen stereoskopischer Zeichnungen für Stereometrie und descriptive Geometrie käuflich zu haben sind?

Ich zweifele nicht daran, dass der Herr Herausgeber des Archivs jeder Mittheilung hierüber, bei dem allgemeinen Interesse, welches die Sache ohne Zweifel hat, gern einen Raum vergönnen wird *).

Sollten solche käufliche Sammlungen noch nicht existiren, wie ich fast befürchte, so möchte ich die Aufforderung an alle Diejenigen, welche dazu geneigt sind, hinzufügen, eine solche Sammlung der Oeffentlichkeit nicht vorzuenthalten. Sie werden sich dadurch gewiss von vielen Seiten Dank erwerben. Die Zeichnungen müssen natürlich streng nach den Regeln der Perspective entworfen werden. Nach meinen Erfahrungen nehme ich die Distanz der beiden Augenpunkte zu 60 Millimeter, so dass jedes der beiden Bilder durch ein Quadrat von gleichfalls 60 Mm. Seite eingerahmt wird. Der Abstand des Auges vom Tableau kann gleichfalls zu 60 Mm. angenommen werden. Die parallactische Verschiebung der beiden Bilder muss mindestens 5 Mm. betragen, so dass die gleichlautenden Punkte der beiden Grundrisse und Aufrisse höchstens 55 Mm. von einander entfernt sind. Doch will ich durch diese Andeutungen anderweitigen, vielleicht besseren Erfahrungen nicht vorgreifen.

---

*) Versteht sich von selbst. G.

XXXIII.

Ueber die zwischen den Seiten und Diagonalen eines jeden Vierecks Statt findende Relation.

Von

dem Herausgeber.

In dem vieles Schöne enthaltenden Cambridge and Dublin mathematical Journal stiess ich neulich in einer älteren Nummer (No. XVI. May 1848. p. 150.) zufällig auf eine ganz kurze beiläufige Notiz über eine von Herrn Salmon herrührende Ableitung der zwischen den Seiten und Diagonalen eines jeden Vierecks Statt findenden Relation, ohne alle weitere Angabe des Orts, wo dieselbe sich findet. Dadurch wurde ich zu den folgenden Betrachtungen und Rechnungen veranlasst, welche ich hier mittheile, weil ich den Gegenstand für bemerkenswerth und — wenn auch allerdings schon bekannt — doch weitere Bekanntwerdung im Interesse des Unterrichts verdienend halte, wobei es sich von selbst versteht, dass das Verdienst der Erfindung ganz Herrn Salmon gebührt.

In etwas allgemeinerer Auffassung als die blosse Betrachtung eines Vierecks zulässt, wollen wir uns ein beliebiges Dreieck ABC denken, und die Seiten BC, CA, AB desselben wie gewöhnlich respective durch a, b, c bezeichnen. Tritt nun zu den drei Punkten A, B, C ein beliebiger vierter Punkt D hinzu, so sollen dessen Entfernungen DA, DB, DC von den Punkten A, B, C respective durch α, β, γ bezeichnet werden. Wird die Figur $ABCD$ als ein Viereck aufgefasst, so sind a, c, α, γ die Seiten und b, β die Diagonalen. Die Winkel ADB, BDC, CDA in den eben so bezeichneten Dreiecken sollen respective durch x, y, z bezeichnet werden.

Nach einem allgemein bekannten Satze findet zwischen drei beliebigen Winkeln oder Bogen x, y, z immer die Gleichung

$$1-\cos x^2-\cos y^2-\cos z^2+2\cos x\cos y\cos z$$

$$=4\sin\tfrac{1}{2}(x+y+z)\sin\tfrac{1}{2}(-x+y+z)\sin\tfrac{1}{2}(x-y+z)\sin\tfrac{1}{2}(x+y-z)$$

Statt; im vorliegenden Falle ist aber offenbar immer eine der Gleichungen

$$x+y+z=360^0,\quad -x+y+z=0,\quad x-y+z=0,\quad x+y-z=0$$

erfüllt, also nach der vorstehenden allgemeinen Relation:

$$1-\cos x^2-\cos y^2-\cos z^2+2\cos x\cos y\cos z=0.$$

Weil nun nach einer bekannten Grundformel der ebenen Trigonometrie

$$\cos x=\frac{\alpha^2+\beta^2-c^2}{2\alpha\beta},\quad \cos y=\frac{\beta^2+\gamma^2-a^2}{2\beta\gamma},\quad \cos z=\frac{\gamma^2+\alpha^2-b^2}{2\gamma\alpha}$$

ist, so erhält man aus dem Vorhergehenden unmittelbar die folgende Relation:

$$\left.\begin{array}{l}1-\dfrac{(\alpha^2+\beta^2-c^2)^2}{4\alpha^2\beta^2}-\dfrac{(\beta^2+\gamma^2-a^2)^2}{4\beta^2\gamma^2}-\dfrac{(\gamma^2+\alpha^2-b^2)^2}{4\gamma^2\alpha^2}\\ +\dfrac{(\alpha^2+\beta^2-c^2)(\beta^2+\gamma^2-a^2)(\gamma^2+\alpha^2-b^2)}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r}4\alpha^2\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-a^2)^2\alpha^2-(\gamma^2+\alpha^2-b^2)^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-c^2)^2\gamma^2\\ +(\beta^2+\gamma^2-a^2)(\gamma^2+\alpha^2-b^2)(\alpha^2+\beta^2-c^2)\end{array}\right\}=0,$$

welche sich auf verschiedene Arten umgestalten lässt.

Mittelst leichter Rechnung leitet man aus dieser Gleichung die folgende ab:

$$\left.\begin{array}{r}4\alpha^2\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2)^2\alpha^2+2(\beta^2+\gamma^2)\alpha^2a^2-\alpha^2a^4\\ -(\gamma^2+\alpha^2)^2\beta^2+2(\gamma^2+\alpha^2)\beta^2b^2-\beta^2b^4\\ -(\alpha^2+\beta^2)^2\gamma^2+2(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2c^2-\gamma^2c^4\\ +(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)\\ -(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)a^2\\ -(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)b^2\\ -(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)c^2\\ +(\alpha^2+\beta^2)a^2b^2+(\beta^2+\gamma^2)b^2c^2+(\gamma^2+\alpha^2)c^2a^2-a^2b^2c^2\end{array}\right\}=0.$$

Nun ist aber, wie man leicht übersieht:

$$4\alpha^2\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2)^2\alpha^2-(\gamma^2+\alpha^2)^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)^2\gamma^2$$
$$=-(\beta^4+\gamma^4)\alpha^2-(\gamma^4+\alpha^4)\beta^2-(\alpha^4+\beta^4)\gamma^2-2\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

und

$$(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=(\beta^4+\gamma^4)\alpha^2+(\gamma^4+\alpha^4)\beta^2+(\alpha^4+\beta^4)\gamma^2+2\alpha^2\beta^2\gamma^2;$$

also:

$$\left.\begin{array}{r}4\alpha^2\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2)^2\alpha^2-(\gamma^2+\alpha^2)^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)^2\gamma^2\\+(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)\end{array}\right\}=0.$$

Ferner ist, wie man eben so leicht sogleich findet:

$$2(\beta^2+\gamma^2)\alpha^2-(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\alpha^2),$$
$$2(\gamma^2+\alpha^2)\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)=(\beta^2-\gamma^2)(\alpha^2-\beta^2),$$
$$2(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)=(\gamma^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2).$$

Endlich ist offenbar:

$$\begin{aligned}&-\alpha^2a^4-\beta^2b^4-\gamma^2c^4\\&+(\alpha^2+\beta^2)a^2b^2+(\beta^2+\gamma^2)b^2c^2+(\gamma^2+\alpha^2)c^2a^2\\&=\quad\alpha^2a^2(-a^2+b^2+c^2)\\&\quad+\beta^2b^2(a^2-b^2+c^2)\\&\quad+\gamma^2c^2(a^2+b^2-c^2).\end{aligned}$$

Also hat man die folgende Relation:

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\alpha^2)a^2+(\beta^2-\gamma^2)(\alpha^2-\beta^2)b^2+(\gamma^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)c^2\\+\alpha^2a^2(-a^2+b^2+c^2)+\beta^2b^2(a^2-b^2+c^2)+\gamma^2c^2(a^2+b^2-c^2)\\-a^2b^2c^2\end{array}\right\}=0.$$

Lässt man den Punkt D mit dem Punkte C zusammenfallen, so ist $\alpha=b$, $\beta=a$, $\gamma=0$; und die vorstehende Gleichung reducirt sich auf die Identität $0=0$, wie man leicht findet.

Ist D der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, so ist, wenn wir den Halbmesser dieses Kreises durch r bezeichnen, im Obigen $\alpha=\beta=\gamma=r$ zu setzen, wodurch man die Gleichung

$$(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)r^2-a^2b^2c^2=0,$$

also

$$r=\frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}$$

oder nach einer bekannten Zerlegung:

$$r=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}},$$

wie anderweitig genugsam bekannt ist, erhält.

Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, so ist:

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c;$$

$$DA=\alpha=a,\quad DB=\beta,\quad DC=\gamma=c;$$

und aus der obigen allgemeinen Gleichung ergiebt sich also in diesem Falle die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\alpha^2)\alpha^2+(\beta^2-\gamma^2)(\alpha^2-\beta^2)b^2+(\gamma^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)\gamma^2\\ +\alpha^4(-\alpha^2+b^2+\gamma^2)+\beta^2b^2(\alpha^2-b^2+\gamma^2)+\gamma^4(\alpha^2+b^2-\gamma^2)\\ -\alpha^2b^2\gamma^2\end{array}\right\}=0.$$

Der von b unabhängige Theil in dieser Gleichung ist:

$$\begin{array}{l}(\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\alpha^2)\alpha^2+(\gamma^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)\gamma^2\\ \quad+\alpha^4(\gamma^2-\alpha^2)-\gamma^4(\gamma^2-\alpha^2)\\ =(\gamma^2-\alpha^2)\{\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)-2(\gamma^4-\alpha^4)\}\\ =(\gamma^2-\alpha^2)^2\{\beta^2-2(\gamma^2+\alpha^2)\}.\end{array}$$

Der von b abhängige Theil ist, wie man leicht findet:

$$\{(\gamma^2-\alpha^2)^2-\beta^2[\beta^2-2(\gamma^2+\alpha^2)]\}b^2-\beta^2b^4.$$

Also ist die Summe beider Theile:

$$\begin{array}{l}(\gamma^2-\alpha^2)^2\{\beta^2-2(\gamma^2+\alpha^2)\}\\ \quad+\{(\gamma^2-\alpha^2)^2-\beta^2[\beta^2-2(\gamma^2+\alpha^2)]\}b^2-\beta^2b^4\\ =\{(\gamma^2-\alpha^2)^2-\beta^2b^2\}\{\beta^2+b^2-2(\gamma^2+\alpha^2)\},\end{array}$$

und folglich:

$$\{(\gamma^2-\alpha^2)^2-\beta^2b^2\}\{\beta^2+b^2-2(\gamma^2+\alpha^2)\}=0,$$

welche Gleichung man auch unter der Form

$$\{(c^2-a^2)^2-b^2\beta^2\}\{b^2+\beta^2-2(c^2+a^2)\}=0,$$

oder unter der Form

$$\{(a^2-c^2)^2-b^2\beta^2\}\{b^2+\beta^2-2(a^2+c^2)\}=0$$

schreiben kann.

Bezeichnen wir den von den beiden Diagonalen des Parallelogramms eingeschlossenen Winkel, welcher der Seite a gegenüber liegt, durch φ; so ist nach einer bekannten trigonometrischen Formel:

$$\cos\varphi=\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}\beta^2-a^2}{\frac{1}{2}b\beta},\quad -\cos\varphi=\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}\beta^2-c^2}{\frac{1}{2}b\beta};$$

also:

$$\tfrac{1}{2}(b^2+\beta^2)-(a^2+c^2)=0$$

oder

$$2(a^2+c^2)=b^2+\beta^2.$$

Wäre nun

$$(a^2-c^2)^2=b^2\beta^2,$$

also:

$$2(a^2-c^2)=\pm 2b\beta,$$

so wäre durch Addition und Subtraction:

$$4a^2=(b\pm\beta)^2,\quad 4c^2=(b\mp\beta)^2$$

oder

$$a^2=(\tfrac{1}{2}b\pm\tfrac{1}{2}\beta)^2,\quad c^2=(\tfrac{1}{2}b\mp\tfrac{1}{2}\beta)^2,$$

und es würde folglich offenbar immer eine der beiden Gleichungen

$$a=\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\beta,\quad c=\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\beta$$

Statt finden, welches dem Satze wiederspricht, dass die Summe zweier Seiten eines Dreiecks immer grösser als die dritte Seite ist. Also kann nicht

$$(a^2-c^2)^2=b^2\beta^2\quad\text{oder}\quad(a^2-c^2)^2-b^2\beta^2=0$$

sein, und aus der Gleichung

$$\{(a^2-c^2)-b^2\beta^2\}\{b^2+\beta^2-2(a^2+c^2)\}=0$$

folgt also:

$$b^2+\beta^2-2(a^2+c^2)=0\quad\text{oder}\quad b^2+\beta^2=2(a^2+c^2),$$

worin der bekannte Satz ausgesprochen ist, dass die Summe der

Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms der Summe der Quadrate seiner beiden Diagonalen gleich ist.

Natürlich müssen sich auch die bekannten Relationen zwischen den Seiten und Diagonalen eines in den Kreis beschriebenen Vierecks aus der obigen allgemeinen Gleichung ableiten lassen, was ich jedoch der Kürze wegen jetzt nicht weiter untersuchen, sondern dem Leser zu ermitteln überlassen will. Indess will ich beiläufig bemerken, dass diese Relationen mittelst der Formeln der ebenen Trigonometrie ungemein leicht auf folgende Art erhalten werden können. Wenn nämlich das Viereck $ABCD$ in einen Kreis beschrieben ist, so ist

$$\angle ABC + \angle ADB = 180^\circ, \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ;$$

also, wenn wir die Winkel des Vierecks der Kürze wegen bloss durch dessen Ecken, an denen sie liegen, bezeichnen:

$$\cos B + \cos D = 0, \quad \cos A + \cos C = 0;$$

folglich nach einer bekannten Grundformel der ebenen Trigonometrie:

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{\alpha^2+\gamma^2-b^2}{2\alpha\gamma} = 0,$$

$$\frac{\alpha^2+c^2-\beta^2}{2\alpha c} + \frac{a^2+\gamma^2-\beta^2}{2a\gamma} = 0;$$

oder:

$$\alpha\gamma(a^2+c^2-b^2) + ac(\alpha^2+\gamma^2-b^2) = 0,$$

$$a\gamma(\alpha^2+c^2-\beta^2) + \alpha c(a^2+\gamma^2-\beta^2) = 0;$$

und hieraus:

$$(a\alpha+c\gamma)(a\gamma+c\alpha) = b^2(ac+\alpha\gamma),$$

$$(a\alpha+c\gamma)(ac+\alpha\gamma) = \beta^2(a\gamma+c\alpha);$$

woraus durch Multiplication und Division, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, die beiden Gleichungen:

$$(a\alpha+c\gamma)^2 = b^2\beta^2, \quad \frac{a\gamma+c\alpha}{ac+\alpha\gamma} = \frac{b^2(ac+\alpha\gamma)}{\beta^2(a\gamma+c\alpha)}$$

oder

$$(a\alpha+c\gamma)^2 = b^2\beta^2, \quad \left(\frac{a\gamma+c\alpha}{ac+\alpha\gamma}\right)^2 = \left(\frac{b}{\beta}\right)^2;$$

also die beiden bekannten Gleichungen:

$$a\alpha + c\gamma = b\beta, \quad \frac{a\gamma + c\alpha}{ac + \alpha\gamma} = \frac{b}{\beta}$$

erhalten werden, eine Darstellung, die sich, wie es mir scheint, durch ihre Leichtigkeit empfiehlt, und bei'm Unterrichte zweckmässig als Uebungs-Aufgabe benutzt werden kann.

XXXIV.

Ueber Genauigkeit der Functionen bedingter Beobachtungen.

(Fünfter Nachtrag zur Ausgleichungsrechnung)*).

Von

Herrn Geheimen Hofrath Professor Dr.. *Gerling*

in Marburg

Je weiter die Hoffnung zurücktritt, dass ich selbst noch eine zweite verbesserte Auflage meines Buches über Ausgleichungsrechnung zu besorgen haben würde, um so lebhafter tritt mir die Pflicht entgegen, die Verbesserungen, deren das Buch bedarf, zur Benutzung für meine Nachfolger zu sammeln, und die wesentlichsten derselben in Nachträgen zu veröffentlichen.

Der letzte dieser Nachträge berichtigte nur einen Vortrags-

*) Die früheren Nachträge finden sich in diesem Archiv Theil VI. S. 141 und S. 375, so wie Theil XXV. S. 219. Auch gehört hierher einigermaassen eine mehr polemische Mittheilung in **Schlömilch** und **Witzschels** Zeitschrift III. S. 327.

fehler, über welchen ich, wie es zu geschehen pflegt, wenn man über seine eignen Bücher liest, Jahre lang wegdocirt hatte, ehe mir die Missverständnisse, zu welchen die Worte des Buches einen Leser führen konnten, vollständig klar wurden.

Ein ähnlicher Fall findet sich nun im §. 74., wo bei einem Leser allerdings leicht das Missverständniss entstehen kann, dessen Andeutung ich dem Herrn Professor Baur in Stuttgart verdanke, als sei S. 227. noch von den nach §. 59. berechneten v der wirklichen Beobachtungen die Rede, statt dass hier die v der fingirten Beobachtungen gemeint sind, welche zu den mittleren Fehlern gehören.

Nachdem ich nun während meiner letzten Vorlesung auch noch aufmerksam darauf geworden bin, dass sich durch eine Umstellung der Sätze auf S. 227. und S. 228. der Vortrag bedeutend übersichtlicher machen lässt, glaube ich folgende verbesserte Redaction der betreffenden Stelle geben zu müssen.

Zuerst ist S. 225. Z. 15 v. o. zwischen die beiden Sätze: „....zu einem Minimum machen“ und: „Um also von dem mittleren....“ ein neuer Satz einzuschalten, welcher lautet:

> Wir müssen uns hierbei aber auch noch erinnern, dass wir, um zu dem Begriff der mittleren Fehler zu gelangen, nach §. 15., 16., 45. und 61. eine zweite Reihe von gleich vielen Beobachtungen fingiren mussten, welche mit den wirklich beobachteten o gleiche Genauigkeit hätten und eben um die mittleren Fehler von der Wahrheit abwichen. Diese fingirten Beobachtungen müssten dann auch neue w, k, v und $[vv]$ geben, welche durch dieselben Bedingungen und Gleichungen unter sich und mit ihren Beobachtungen verbunden wären, durch welche die bisher betrachteten und endlich in Zahlen dargestellten w, k, v und $[vv]$ mit den wirklich angestellten Beobachtungen verbunden sind.

Sodann bleibt der Text des Buchs unverändert bis zu der dritten Zeile von unten auf S. 226. Von hier an aber geht es nach den Gleichungen Nr. 50. folgendermaassen fort:

> Offenbar sind dieser Gleichungen eben so viel als O. In ihnen ist aber für alle diejenigen O, welche in (16) und (17) nicht vorkommen, $l=0$ zu setzen.
>
> Nun kommt es also nur noch darauf an, die r gehörig zu bestimmen.
>
> Dazu wissen wir aber, dass auch für das jetzt zu

betrachtende System fingirter Beobachtungen, welches die mittleren Fehler und seine neuen w, k, v und $[vv]$ mit sich bringt, nur solche dO zulässig sind, welche specialisirt und und also den $-v$ der fingirten Beobachtungen gleich gesetzt, das $[vv]$ für alle zu einem Minimum machen. Wir haben also in (21) wieder zu differentiiren, indem wir du als constant betrachten, und erhalten so, wenn wir die Differential-Gleichung auch gleich specialisiren, indem wir $-ddO = dv$ setzen:

$$(22) \qquad 0 = L_1 dv_1 + L_2 dv_2 + L_3 dv_3 + L_4 dv_4 + \ldots.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit unserer im §. 59. erfüllten, und auch bei den fingirten Beobachtungen als erfüllt zu denkenden, Gleichung

$$(14) \qquad 0 = v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3 + v_4 dv_4 + \ldots,$$

so bemerken wir die wichtige Eigenschaft der L, dass sie den v der fingirten Beobachtungen proportional werden müssen. Setzen wir also

$$L_1 = s.v_1\,; \quad L_2 = s.v_2; \quad L_3 = s.v_3 \text{ u. s. w.}$$

und substituiren für diese v ihre Werthe aus den auch jetzt als erfüllt gedachten Gleichungen Nr. 44., so erhalten wir zunächst

$$L_1 = s.(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots),$$

$$L_2 = s.(a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots),$$

$$L_3 = s.(a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots).$$

Multipliciren wir sodann in diesen Gleichungen der Reihe nach jedes L erst mit dem in ihm vorkommenden a und addiren, so erhalten wir

$$[aL] = s([aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \ldots)$$

und eben so nach Multiplication mit den b, c u. s. w.

$$[bL] = s.([ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \ldots),$$

$$[cL] = s.([ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + \ldots),$$

d. h. weil die w auch für die fingirten Beobachtungen als durch die Ausgleichung verschwunden gedacht werden müssen, vermöge Nr. 45.

(23) $0 = [aL], \quad 0 = [bL], \quad 0 = [cL]$, u. s. w.

Zu denselben Gleichungen wären wir aber auch gelangt, wenn wir aus den Gleichungen Nr. 50. auf die oft angeführte Weise für $[LL]$ ein Minimum gesucht hätten, indem wir, ohne weiter an die fingirten Beobachtungen und deren Zubehör zu denken, die r festgestellt hätten mittelst der Gleichungen

$$\left(\frac{d[LL]}{dr_1}\right) = 0; \quad \left(\frac{d[LL]}{dr_2}\right) = 0; \quad \left(\frac{d[LL]}{dr_3}\right) = 0 \text{ u. s. w.}$$

Diese Eigenschaft unserer L, vermöge deren die Feststellung der r so zu geschehen hat, dass $[LL] = \frac{1}{p}$ ein Minimum wird, enthält nun einen wichtigen Lehrsatz, welchen wir, ehe wir weiter gehen, hier doch erst deutlich aussprechen wollen. Es ist kein anderer als:

Die Ausgleichung der bedingten Beobachtungen bewirkt, dass auch die Genauigkeit aller mit ihrer Hülfe zu berechnenden Grössen so gross als möglich wird.

Substituiren wir nun zuletzt also in (23) die Werthe der L aus Nr. 50., so erhalten wir endlich zur numerischen Bestimmung der r die Gleichungen:

Von hier an geht es nun mit Nr. 51. fort wie im Buche S. 228.

Vorstehende verbesserte Redaction des §. 74. erfordert nun consequenter Weise auch im folgenden §. 77. einige Zusätze und Abänderungen, welche von S. 238. hinter den Gleichungen (22) anfangend, folgendermaassen anzubringen sind:

Diese erhalten wir hier noch fortwährend. Dort aber verglichen wir sie mit (14), weil dort, auch für die fingirten Beobachtungen und ihre neuen w, k und v, das $[vv]$ ein Minimum war. Hier aber müssen wir, weil nicht mehr $[vv]$ sondern $[pvv]$ durch unsere in §. 70. gemachten Arbeiten zu einem Minimum gemacht ist, und wir nur unter dieser Bedingung unsere $o + v$ für die O setzen durften, dies Alles auch ganz eben so auf die fingirten Beobachtungen und die neuen davon abhängigen Werthe übertragen werden muss, sie nicht mehr mit (14), sondern mit der in §. 70. erfüllten, und auch für die fingirten Beobachtungen als erfüllt zu denkenden, Gleichung

(15) $$0 = p_1 v_1 dv_1 + p_2 v_2 dv_2 + p_3 v_3 dv_3 + \ldots.$$

vergleichen.

Dies zeigt uns nun, dass die L den pv, also die LL den $ppvv$ und die $\frac{LL}{p}$ den pvv proportional werden müssen.

Dieselbe Schlussfolgerung, die uns §. 74. durch die Gleichungen Nr. 44. und Nr. 45. zu den Gleichungen (23) führte, führt uns also jetzt durch die Gleichungen Nr. 47. und Nr. 48. zu den Gleichungen:

$$(24)\qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \left[\frac{aL}{p}\right], \\ 0 &= \left[\frac{bL}{p}\right], \\ 0 &= \left[\frac{cL}{p}\right] \end{aligned} \right.$$

u. s. w.

Wir erkennen nun ebenso wie oben §. 74., dass auch $\left[\frac{LL}{p}\right]$ ein Minimum wird, der obige wichtige Lehrsatz also auch hier gilt.

Von hier an kann es sodann im Text weiter gehen wie im Buche S. 239. mit „Setzen wir....“

XXXV.

Ueber die Theilbarkeit der Zahlen.

Von

Herrn *A. Niegemann*,

Oberlehrer an dem kathol. Gymnasium an der Apostelkirche in Cöln.

Mehrere Jahre später, nachdem ich mich mit den Gesetzen der Theilbarkeit der Zahlen etwas näher beschäftigt hatte (s. Entwickelung und Begründung neuer Gesetze über die Theilbarkeit der Zahlen, nebst Aufstellung von Tafeln über die Gesetze des Fortschreitens der zusammengesetzten Zahlen vom Gymnasiallehrer A. Niegemann. Programm des katholischen Gymnasiums in Cöln. 1848.) wurde ich aufmerksam auf die folgenden, im 4. Theile p. 332. des Archivs von Herrn Professor Pross in Stuttgart ausgesprochenen Sätze:

Eine dekadische Zahl ist durch $10n+a$ theilbar, wenn der Unterschied zwischen dem $n$fachen der letzten Ziffer und dem $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10n+a$ theilbar ist; sie ist durch $10n-a$ theilbar, wenn die Summe aus dem $n$fachen der letzten Ziffer und dem $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10n-a$ theilbar ist. (In beiden Fällen bezeichnet n jede beliebige Zahl von 0 an und a die einfachen Ziffern von 0 bis 9).

Weil beide Sätze eine genauere Beziehung haben zu meiner früheren Arbeit, unterzog ich sie einer näheren Betrachtung, und fand, dass sie einerseits die Allgemeinheit nicht haben, in welcher sie ausgesprochen sind und man ihnen andererseits eine grössere Allgemeinheit geben kann. Dass sie nicht allgemein richtig sind, zeigt z. B. die Zahl 32964, welche nach denselben durch $24=2.10+4$ theilbar sein müsste, weil $3296\times 4-2\times 4 =13184-8=13176$ durch 24 theilbar ist, während sie durch 24 dividirt den Rest 12 gibt. Andere Beispiele, wo der Satz nicht zutrifft, liessen sich leicht mehrere finden.

Wenn auch seit Aufstellung der Sätze mehrere Jahre verflossen sind, so scheint es doch nicht unzweckmässig, darauf zurückzukommen, weil sie bisher noch keine nähere Erörterung gefunden haben.

In wie weit dieselben beschränkt werden müssen, findet man, wenn man zu den Beweisen derselben übergeht, und bedarf es zu diesem Zwecke der Betrachtung nur eines derselben.

Es ist, wie die Ausführung der Operationen leicht ergibt:

$$aN=\left(\frac{N-M}{10}.a-nM\right).10+(10n+a)M.$$

Da nun $(10n+a)M$ durch $10n+a$ theilbar ist, so ist auch aN durch $10n+a$ theilbar, wenn $\frac{N-M}{10}.a-nM$ dadurch theilbar ist, und folglich auch N, wenn dazu noch $10n+a$ zu a und 10 relative Primzahl ist. Wenn aber $10n+a$ zu a relative Primzahl ist, so kann a weder die Ziffer 2, noch 5 sein, und ist daher $10n+a$ für sich schon zu 10 Primzahl. Bezeichnet nun M die letzte Ziffer der Zahl N, so ergibt sich der Satz:

> Eine dekadische Zahl ist durch eine andere von der Form $10n+a$ theilbar, wenn die Differenz des $n$fachen der letzten Ziffer und des $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10n+a$ theilbar und $10n+a$ zu a Primzahl ist.

In der Umkehrung heisst der Satz:

> Wenn eine Zahl N durch eine andere von der Form $10n+a$ theilbar und a nicht $=0$ ist, so ist auch der Unterschied des $n$fachen der letzten Ziffer und des $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10n+a$ theilbar.

Beweis. Denn wollte man annehmen, N wäre durch $10n+a$ theilbar, aber $\frac{N-M}{10}a-nM$ nicht, wo M die letzte Ziffer bedeutet, so hätte man:

$$\frac{N-M}{10}a-nM=(10n+a)z+y;\quad N=(10n+a)x$$

und y nicht durch $10n+a$ theilbar,

folglich:

$$aN-aM-10nM=10(10n+a)z+10y,$$

$$a(10n+a)x-M(10n+a)=10(10n+a)z+10y;$$

mithin wäre $10y$ durch $10n+a$ theilbar.

Sollte es möglich sein, dieser Gleichung zu genügen, ohne dass y durch $10n+a$ theilbar wäre, dann müsste $10n+a$ einen Faktor haben, der in y nicht vorkäme, folglich müsste dieser in 10 vorkommen und $10n+a$ die Form $2p$ oder $5p$ haben.

Nimmt man an: $10n+a=2p$, so muss a durch 2 theilbar sein, mithin die Form $2s$ haben, und weil N durch $10n+a=2p$ theilbar ist, muss auch die letzte Ziffer M die Form $2r$ haben. Folglich hat man:

$$2s.2px-2.r.2p=10.2pz+10y,$$

$$2psx-2pr=10pz+5y;$$

mithin ist $5y$ durch $2p$ und folglich y durch $2p$ theilbar, wenn nicht p den Faktor 5 enthält. Folglich lässt sich kein durch $10n+a$ nicht theilbares y finden, welches der Gleichung Genüge leistet, wenn nicht gerade p den Faktor 5 enthält, also $2p=10n+a=10t$ ist. Dasselbe findet man offenbar, wenn man $10n+a=5p$ setzt.

Allgemeiner ausgesprochen heisst der Satz:

> Eine dekadische Zahl ist durch eine andere von der Form $10^m n+a$ theilbar, wenn die Differenz des $n$fachen der m letzten Ziffern und des $a$fachen der übrigen Ziffern durch $10^m n+a$ theilbar und $10^m n+a$ zu a Primzahl ist.

Beweis. Es ist:

$$aN=\left(\frac{N-M}{10^m}a-nM\right)10^m+(10^m.n+a)M.$$

Ist nun $10^m n+a$ zu a Primzahl, so ist a weder die Ziffer 2 noch 5, folglich $10^m n+a$ zu 10 und 10^m Primzahl. Da nun $10^m n+a$ Faktor ist von $(10^m n+a)M$ und zu 10^m relative Primzahl, so ist $10^m n+a$ auch Faktor von aN oder, da $10^m n+a$ zu a Primzahl ist, von N, wenn es Faktor ist von $\frac{N-M}{10^m}a-nM$; woraus sich die Richtigkeit des Satzes ergibt, wenn man mit M die m letzten Ziffern der Zahl N bezeichnet. Auch dieser Satz lässt sich in ähnlicher Weise umkehren wie der vorige.

In der eben ausgesprochenen Weise hat der Satz zwar eine grosse Allgemeinheit, aber wenig praktische Anwendbarkeit, die man aber dadurch erlangt, dass man $a=1$ setzt und $10^m n+1$ in Faktoren zerlegt. Ist dann eine zu 10 relative Primzahl (d) Faktor von $10^m n+1$ und theilbar in die Differenz des $n$fachen der

m letzten Ziffern und der übrigen Ziffern einer Zahl, so ist auch diese Zahl selbst durch d theilbar; und nennt man die Zahl, womit man die m letzten Ziffern einer Zahl N multipliciren muss, um aus der Theilbarkeit der Summe oder Differenz dieses Produktes und der übrigen Ziffern durch eine Zahl d auf die Theilbarkeit der Zahl durch d zu schliessen, den positiven oder negativen Theilungs-Koeffizient des $m$ten Grades für den Theiler d, so ist in unserm Fall n der negative Theilungs-Koeffizient des $m$ten Grades für den Theiler d.

So lässt sich nun ein interessanter Zusammenhang zwischen den verschiedenen positiven und negativen Theilungs-Koeffizienten desselben Grades und Theilers, zwischen den verschiedenen Theilungs-Koeffizienten verschiedener Grade und desselben Theilers und zwischen den verschiedenen Theilungs-Koeffizienten desselben Grades und der Theiler, die sich um 10 unterscheiden, nachweisen. Es ergibt sich eine Menge mitunter einfacher Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen durch die Primzahlen. Eine Zahl ist z. B. durch 7 theilbar oder nicht, je nachdem der Unterschied das $(2+7p)$-, $(3+7p)$-, $(1+7p)$-, $(5+7p)$-, $(4+7p)$-, $(6+7p)$-, $(2+7p)$-....fache der 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 letzten Ziffern und der übrigen durch 7 theilbar ist oder nicht. p kann jede Zahl bedeuten. Dieser Zusammenhang und die Art und Weise, wie man die verschiedenen Theilungs-Koeffizienten findet, ist in der oben angeführten Schrift nachgewiesen.

Wenn nun auch die dort entwickelten Sätze keinen besondern praktischen Nutzen bieten, so kann man doch dadurch das Regelmässige des Fortschreitens der zusammengesetzten Zahlen mittelst dieser Theilungs-Koeffizienten darstellen, wenn man die unendliche Anzahl der Zahlen in unendliche Gruppen theilt, indem in jeder dieser Gruppen die Zahlen nach verschiedenen Gesetzen fortschreiten.

Nimmt man als Eingänge einer Tafel die Faktoren einer Zahl, und setzt da, wo diese Eingänge zusammen treffen, den betreffenden negativen Theilungs-Koeffizienten des ersten Grades, so kann man alle zusammengesetzten Zahlen in verschiedenen Tafeln, worin das Fortschreiten der Zahlen sich leicht ergibt, darstellen, wenn man den Zahlen der Tafeln noch eine Ziffer anhängt. Folgende drei Tafeln enthalten z. B. alle auf 1 ausgehenden zusammengesetzten Zahlen mit Ausschluss aller Primzahlen, und mit ihren Faktoren, wenn den Zahlen der Tafeln noch eine 1 angehängt wird. Die Zahlen der Tafeln schreiten nach rechts und abwärts in einfacher arithmetischer Reihe fort.

	1	11	21	31	41	51	61
11	1	12					
21	2	23	44				
31	3	34	65	96			
41	4	45	86	127	168		
51	5	56	107	158	209	260	
61	6	67	128	189	250	311	372
71	7	78	149	220	291	362	433

	7	17	27	37
3	2	5	8	11
13	9	22	35	48
23	16	39	62	85
33	23	56	89	122
43	30	73	116	159
53	37	90	143	196
63	44	107	170	233

	9	19	29	39	49	59	69
9	8						
19	17	36					
29	26	55	84				
39	35	74	113	152			
49	44	93	142	191	240		
59	53	112	171	230	289	348	
69	62	131	200	269	338	407	476

Die erste und dritte Tafel brauchen nur bis zu Diagonalen fortgesetzt zu werden, dagegen muss die zweite nach beiden Richtungen, nach rechts und abwärts, immer weiter geführt werden, um alle auf 1 ausgehenden zusammengesetzten Zahlen zu erhalten. In ähnlicher Weise lassen sich alle zusammengesetzten Zahlen, die auf 9 ausgehen, in drei Tafeln, und die auf 3 und 7 ausgehen, in je zwei Tafeln zusammenstellen.

Wollte man die negativen Theilungs-Koeffizienten des zweiten Grades für die Aufstellung aller zusammengesetzten Zahlen benutzen, so würde man zwar viel einfachere Zahlen in den Tafeln selbst erhalten, indem jede derselben zwei Ziffern weniger hat, als die betreffende zusammengesetzte Zahl, dagegen aber würde sich die Anzahl der Tafeln auf 100 belaufen, und die Zahlen in den Tafeln würden nach einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung fortschreiten.

XXXVI.

Das System der Dreilinien-Coordinaten in allgemeiner analytischer Entwickelung.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Unter den vielen verschiedenen Coordinaten-Systemen, welche man in neuerer Zeit bei geometrischen Untersuchungen in Anwendung gebracht hat, scheint mir das sogenannte System der Dreilinien-Coordinaten eine besondere Beachtung zu verdienen. Die diesem Systeme bis jetzt zu Theil gewordene Behandlung dürfte aber namentlich in Rücksicht auf völlige Allgemeinheit der analytischen Untersuchung überhaupt, so wie ganz besonders in Bezug auf das Positive und Negative der betreffenden Coordinaten, noch Manches zu wünschen übrig lassen, weshalb ich in dieser Abhandlung eine solche ganz allgemeine analytische Behandlung, mit besonderer Rücksicht auf das Positive und Negative der Dreilinien-Coordinaten, zu geben versuchen werde. Wenn ich dabei von einigen an sich bekannten allgemeinen Betrachtungen über die gerade Linie im Raume und in der Ebene ausgehe, so geschieht dies nur grösserer Deutlichkeit wegen, und um alles zum Verständniss der späteren Entwickelungen Erforderliche an diesem Orte beisammen zu haben; dabei hätte ich mich für den nächsten Zweck allerdings auf die gerade Linie in der Ebene beschränken können, habe jedoch späterer Untersuchungen wegen, die den vorliegenden sich vielleicht anschliessen werden, die Betrachtung sogleich auf den Raum überhaupt ausgedehnt, was nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegt.

§. 2.

In einer beliebigen geraden Linie im Raume denke man sich, ein rechtwinkliges Coordinaten-System der xyz zu Grunde legend, einen Punkt (abc) beliebig angenommen, und bezeichne die von der einen der beiden von dem Punkte (abc) nach entgegengesetzten Seiten hin ausgehenden Richtungen dieser geraden Linie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ; dann sind die von der anderen der beiden in Rede stehenden Richtungen unserer geraden Linie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, $180^{\circ}-\alpha$, $180^{\circ}-\beta$, $180^{\circ}-\gamma$. Legen wir nun durch den Punkt (abc) als Anfang ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinaten-System der $x_1y_1z_1$, und bezeichnen die Coordinaten eines ganz beliebigen Punktes in unserer geraden Linie in diesen beiden Systemen respective durch x, y, z und x_1, y_1, z_1; dessen Entfernung von dem Punkte (abc) aber durch r; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x_1 = r\cos\alpha,\quad y_1 = r\cos\beta,\quad z_1 = r\cos\gamma$$

oder

$$x_1 = r\cos(180^{\circ}-\alpha),\quad y_1 = r\cos(180^{\circ}-\beta),\quad z_1 = r\cos(180^{\circ}-\gamma);$$

also:

$$x_1 = r\cos\alpha,\quad y_1 = r\cos\beta,\quad z_1 = r\cos\gamma$$

oder

$$x_1 = -r\cos\alpha,\quad y_1 = -r\cos\beta,\quad z_1 = -r\cos\gamma;$$

jenachdem der in der Geraden angenommene, an sich ganz beliebige Punkt in der ersten oder zweiten der beiden vorher näher bezeichneten Richtungen dieser Geraden, welche wir im Folgenden in der Kürze nur die erste und zweite Richtung nennen wollen, liegt. Also ist:

$$x_1 = \pm r\cos\alpha,\quad y_1 = \pm r\cos\beta,\quad z_1 = \pm r\cos\gamma;$$

wenn man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt in der ersten oder zweiten Richtung der Geraden liegt. Betrachten wir von nun an aber die Entfernung r nicht wie bisher bloss absolut oder als positiv, sondern als positiv oder negativ, jenachdem der Punkt in der ersten oder zweiten Richtung der Geraden, nämlich in der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung oder in der entgegengesetzten Richtung liegt; so können wir offenbar in völliger Allgemeinheit:

1) . . . $x_1 = r\cos\alpha,\quad y_1 = r\cos\beta,\quad z_1 = r\cos\gamma$

setzen. Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber in völliger Allgemeinheit:

$$x = a + x_1,\quad y = b + y_1,\quad z = c + z_1;$$

also nach 1):

2) . . $x = a + r\cos\alpha,\quad y = b + r\cos\beta,\quad z = c + r\cos\gamma$

oder:

3) . . $x - a = r\cos\alpha,\quad y - b = r\cos\beta,\quad z - c = r\cos\gamma.$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(x-a)\cos\beta = r\cos\alpha\cos\beta,\quad (y-b)\cos\alpha = r\cos\alpha\cos\beta;$$
$$(y-b)\cos\gamma = r\cos\beta\cos\gamma,\quad (z-c)\cos\beta = r\cos\beta\cos\gamma;$$
$$(z-c)\cos\alpha = r\cos\gamma\cos\alpha,\quad (x-a)\cos\gamma = r\cos\gamma\cos\alpha;$$

also:

4) . . . $\begin{cases}(x-a)\cos\beta = (y-b)\cos\alpha,\\ (y-b)\cos\gamma = (z-c)\cos\beta,\\ (z-c)\cos\alpha = (x-a)\cos\gamma;\end{cases}$

durch welche Gleichungen, von denen natürlich eine jede eine unmittelbare Folgerung aus den beiden anderen ist, unsere Gerade im Raume ganz im Allgemeinen charakterisirt wird, weil ja der Punkt (xyz) jeden ganz beliebigen Punkt dieser Geraden repräsentirt.

Projicirt man die Entfernung r auf die Ebene der x_1y_1 und bezeichnet die als absolut aufgefasste Projection durch r_1, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze offenbar:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \text{ und } r^2 = r_1^2 + z_1^2;$$

also:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

folglich nach 1):

$$r^2 = r^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2),$$

woraus sich die bekannte wichtige Gleichung:

5) . . . . . $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$

ergiebt.

Multiplicirt man die Gleichungen 3) nach der Reihe mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addirt sie dann zu einander, so erhält man nach 5) auf der Stelle:

$$6) \quad . \quad . \quad r = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma.$$

Quadrirt man die Gleichungen 3) und addirt sie dann zu einander, so erhält man nach 5):

$$7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

also:

$$8) \quad . \quad . \quad . \quad r = \pm\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem r positiv oder negativ ist.

Von dem Anfange der xyz mögen jetzt zwei Gerade ausgehen, welche mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 einschliessen. In diesen beiden Geraden nehmen wir zwei beliebige Punkte an, deren Coordinaten in dem Systeme der xyz wir durch x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1, und deren absolut genommenen Entfernungen von dem Anfange der xyz wir durch r_0 und r_1 bezeichnen; dann ist völlig allgemein:

$$x_0 = r_0\cos\alpha_0, \quad y_0 = r_0\cos\beta_0, \quad z_0 = r_0\cos\gamma_0;$$

$$x_1 = r_1\cos\alpha_1, \quad y_1 = r_1\cos\beta_1, \quad z_1 = r_1\cos\gamma_1.$$

Bezeichnet nun E_{01} die Entfernung der beiden in Rede stehenden Punkte von einander, so ist nach 7):

$$E_{01}{}^2 = (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 + (z_0-z_1)^2$$

oder

$$E_{01}{}^2 = (x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2) + (x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2) - 2(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1);$$

aber nach 5):

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 = r_0{}^2(\cos\alpha_0{}^2 + \cos\beta_0{}^2 + \cos\gamma_0{}^2) = r_0{}^2,$$

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = r_1{}^2(\cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2) = r_1{}^2$$

und ausserdem:

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = r_0r_1(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1);$$

also:

$$E_{01}{}^2 = r_0{}^2 + r_1{}^2 - 2r_0r_1(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1).$$

Bezeichnet aber W_{01} den von unseren beiden Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel; so ist nach den Lehren der ebenen Trigonometrie:

$$E_{01}{}^2 = r_0{}^2 + r_1{}^2 - 2r_0r_1 \cos W_{01},$$

folglich, wenn man diese Gleichung mit der vorhergehenden vergleicht, offenbar:

$$9) \ldots \cos W_{01} = \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 + \cos\beta_0 \cos\beta_1 + \cos\gamma_0 \cos\gamma_1.$$

Stehen die beiden Geraden auf einander senkrecht, so ist $W_{01} = 90°$, $\cos W_{01} = 0$, also:

$$10) \ldots \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 + \cos\beta_0 \cos\beta_1 + \cos\gamma_0 \cos\gamma_1 = 0.$$

Durch einen beliebigen Punkt (uvw) im Raume legen wir jetzt eine auf unserer bisher immer betrachteten, durch die Gleichungen 4) charakterisirten Geraden senkreckt stehende Gerade und bezeichnen die von der einen der beiden Richtungen dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch θ, ω, $\overline{\omega}$; so haben nach 4) die Gleichungen dieser Geraden die Form:

$$11) \ldots \begin{cases} (x-u)\cos\omega = (y-v)\cos\theta, \\ (y-v)\cos\overline{\omega} = (z-w)\cos\omega, \\ (z-w)\cos\theta = (x-u)\cos\overline{\omega}; \end{cases}$$

und nach 5) und 10) ist:

$$12) \ldots \cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2 = 1$$

und

$$13) \ldots \cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\overline{\omega} = 0.$$

Weil wegen der Gleichung 12) einer der drei Cosinus $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ bestimmt nicht verschwindet, so wollen wir annehmen, dass etwa $\cos\theta$ dieser nicht verschwindende Cosinus sei; mit Hinzufügung der folgenden ersten identischen Gleichung ist nach 11):

$$(x-u)\cos\alpha\cos\theta = (x-u)\cos\alpha\cos\theta,$$
$$(x-u)\cos\beta\cos\omega = (y-v)\cos\beta\cos\theta,$$
$$(x-u)\cos\gamma\cos\overline{\omega} = (z-w)\cos\gamma\cos\theta;$$

also durch Addition:

$$(x-u)(\cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\overline{\omega})$$
$$= \{(x-u)\cos\alpha + (y-v)\cos\beta + (z-w)\cos\gamma\}\cos\theta,$$

daher:

$$17)\quad . \ . \ P=\sqrt{\begin{array}{l}\{(u-a)\cos\beta-(v-b)\cos\alpha\}^2\\+\{(v-b)\cos\gamma-(w-c)\cos\beta\}^2\\+\{(w-c)\cos\alpha-(u-a)\cos\gamma\}^2.\end{array}}$$

Lässt man die Winkel θ, ω, $\bar{\omega}$ dem Theile des Perpendikels entsprechen, welcher von dem gegebenen Punkte (uvw) nach dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, nämlich nach der gegebenen Geraden hin gerichtet ist, so ist allgemein:

$$\mathfrak{x}-u=P\cos\theta,\quad \mathfrak{y}-v=P\cos\omega,\quad \mathfrak{z}-w=P\cos\bar{\omega};$$

also:

$$\cos\theta=\frac{\mathfrak{x}-u}{P},\quad \cos\omega=\frac{\mathfrak{y}-v}{P},\quad \cos\bar{\omega}=\frac{\mathfrak{z}-w}{P};$$

folglich nach dem Obigen:

18)

$$\cos\theta=\frac{(a-u)-\{(a-u)\cos\alpha+(b-v)\cos\beta+(c-w)\cos\gamma\}\cos\alpha}{P},$$

$$\cos\omega=\frac{(b-v)-\{(a-u)\cos\alpha+(b-v)\cos\beta+(c-w)\cos\gamma\}\cos\beta}{P},$$

$$\cos\bar{\omega}=\frac{(c-w)-\{(a-u)\cos\alpha+(b-v)\cos\beta+(c-w)\cos\gamma\}\cos\gamma}{P};$$

wo man für P seinen Ausdruck aus dem Vorhergehenden einzuführen hat.

§. 3.

Wenn die im Vorhergehenden betrachtete Gerade ganz in der Ebene der xy liegt, so ist $\gamma=90^0$, $\cos\gamma=0$, ferner $c=0$ und allgemein $z=0$; also sind in diesem Falle die beiden letzten der Gleichungen §. 2. 4) identische Gleichungen, und unsere Gerade wird also durch die eine Gleichung

$$1)\quad . \ . \ . \ . \ . \quad (x-a)\cos\beta=(y-b)\cos\alpha$$

charakterisirt, wo nach §. 2. 5)

$$2)\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \cos\alpha^2+\cos\beta^2=1$$

ist.

Nach §. 2. 15**) ist in diesem Falle:

$$3) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{x}-u=\{(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha\}\cos\beta, \\ \mathfrak{y}-v=\{(u-a)\cos\beta-(v-b)\cos\alpha\}\cos\alpha \end{array} \right.$$

oder:

$$3^*) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{x}-u=\quad\{(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha\}\cos\beta, \\ \mathfrak{y}-v=-\{(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha\}\cos\alpha; \end{array} \right.$$

also nach 2):

$$4) \quad \ldots \quad P^2=\{(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha\}^2,$$

folglich:

$$5) \quad \ldots \quad P=\pm\{(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha\},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha$$

positiv oder negativ ist.

Für unsere folgenden Untersuchungen ist es aber von der grössten Bedeutung, dass wir uns von dem doppelten Vorzeichen in dem Ausdrucke von P befreien, was natürlich nur dadurch ermöglicht werden kann, dass wir das Perpendikel P nicht mehr wie bisher bloss als absolut oder positiv auffassen, sondern dasselbe selbst unter gewissen Bedingungen oder Voraussetzungen als positiv oder als negativ betrachten. Zu dem Ende wollen wir uns nach der durch die Winkel α, β bestimmten Richtung unserer Geraden in der Ebene der xy, auf welche von dem Punkte (uv) aus das Perpendikel gefällt worden ist, hin eine Kraft wirkend denken, und wollen jederzeit das Perpendikel P als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem diese Kraft die Ebene der xy um den Punkt (uv), als einen festen Drehpunkt gedacht, nach der Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin zu drehen strebt.

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten sind $\mathfrak{x}-u$, $\mathfrak{y}-v$ die Coordinaten des Fusspunktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ des Perpendikels in einem durch den Punkt (uv) als Anfang [illegible] dem primitiven Systeme der xy parallel gelegten Coordi[illegible]steme. In Fig. 1. und Fig. 2. sind die stärker als die [illegible] gezeichnete horizontale und vertikale Linie die erste [illegible]

zweite Axe des durch den Punkt (uv) als Anfang gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensystems; durch die Pfeile werden die positiven Theile der beiden Axen bezeichnet; die übrigen nicht punktirten Linien sind die Richtungen der Kraft, die wir uns vorher gedacht haben, in den verschiedenen möglichen Fällen, und die Seiten, nach denen diese Kraft wirkt, werden wiederum durch Pfeile an diesen Linien bezeichnet. In dem in Fig. 1. dargestellten Falle ist nach den oben gemachten Festsetzungen P positiv; ferner ist, wie auf der Stelle aus der Figur erhellet, beziehungsweise:

$\mathfrak{x}-u$	$\mathfrak{y}-v$	$\cos\alpha$	$\cos\beta$
positiv	positiv	negativ	positiv
negativ	positiv	negativ	negativ
negativ	negativ	positiv	negativ
positiv	negativ	positiv	positiv;

also ist nach 3*) offenbar allgemein

$$(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha$$

positiv, und folglich nach 5):

$$P=(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha.$$

In dem in Fig. 2. dargestellten Falle ist nach den oben gemachten Festsetzungen P negativ; ferner ist, wie auf der Stelle aus der Figur erhellet, beziehungsweise:

$\mathfrak{x}-u$	$\mathfrak{y}-v$	$\cos\alpha$	$\cos\beta$
positiv	positiv	positiv	negativ
negativ	positiv	positiv	positiv
negativ	negativ	negativ	positiv
positiv	negativ	negativ	negativ;

also ist nach 3*) offenbar allgemein

$$(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha$$

negativ, und folglich nach 5) wiederum:

$$P=(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha.$$

Nach der wegen des Zeichens von P oben gegebenen Bestimmung ist also in völliger Allgemeinheit:

$$6)\quad \ldots\ldots\quad P=(a-u)\cos\beta-(b-v)\cos\alpha,$$

unter welcher Form dieser Ausdruck des Perpendikels für alle unsere weiteren Untersuchungen von der grössten Wichtigkeit ist.

§. 4.

In der Ebene, auf welche sich alle unsere folgenden Betrachtungen beziehen, nehmen wir einen beliebigen Punkt O an, den wir der Kürze wegen den **Pol** nennen wollen. Durch diesen Punkt als Anfang denken wir uns zwei beliebige auf einander senkrecht stehende Gerade gelegt, welche wir die x-Axe und die y-Axe nennen werden; jeder dieser beiden Geraden wird wie gewöhnlich ein positiver und ein negativer Theil beigelegt. Nun nehmen wir, immer in der Ebene, auf welche sich alle unsere Betrachtungen beziehen, was fernerhin nicht mehr besonders bemerkt werden soll, drei feste gerade Linien an, die wir die **Axen** nennen werden; die **erste, zweite** und **dritte** dieser Axen mögen respective durch die in Bezug auf die x-Axe und y-Axe durch die Coordinaten a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2 bestimmten Punkte gehen; jeder dieser drei Axen legen wir, wie jeder geraden Linie überhaupt, zwei Richtungen bei, die wir für jede der drei Axen deren positive und negative Richtung nennen werden, und bezeichnen die von den drei positiven Richtungen mit den positiven Theilen der x-Axe und der y-Axe eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch α_0, β_0; α_1, β_1; α_2, β_2. Von dem Pol denken wir uns auf die drei Axen Perpendikel gefällt, welche wir, mit Rücksicht auf die im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Bestimmungen, gehörig als positiv und negativ betrachten, und respective durch $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ bezeichnen, wo wir dann nach §. 3. 6) die folgenden ganz allgemein gültigen Formeln haben:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \overline{\omega}_0 = a_0 \cos\beta_0 - b_0 \cos\alpha_0, \\ \overline{\omega}_1 = a_1 \cos\beta_1 - b_1 \cos\alpha_1, \\ \overline{\omega}_2 = a_2 \cos\beta_2 - b_2 \cos\alpha_2. \end{cases}$$

Fällen wir aber von einem ganz beliebigen Punkte unserer Ebene, dessen Coordinaten in Bezug auf die x-Axe und y-Axe durch x, y bezeichnet werden mögen, auf die drei Axen Perpendikel, und bezeichnen diese Perpendikel mit Rücksicht auf die nach dem vorhergehenden Paragraphen ihnen zukommenden Zeichen durch p_0, p_1, p_2; so ist nach §. 3. 6) in völliger Allgemeinheit:

$$2) \quad \ldots \quad \begin{cases} p_0 = (a_0 - x)\cos\beta_0 - (b_0 - y)\cos\alpha_0, \\ p_1 = (a_1 - x)\cos\beta_1 - (b_1 - y)\cos\alpha_1, \\ p_2 = (a_2 - x)\cos\beta_2 - (b_2 - y)\cos\alpha_2. \end{cases}$$

$$\varphi_0 = \alpha_0, \quad \varphi_0 = 90^0 - \beta_0;$$

oder

$$\varphi_0 = \alpha_0, \quad \varphi_0 = 90^0 + \beta_0;$$

oder

$$\varphi_0 = 360^0 - \alpha_0, \quad \varphi_0 = 90^0 + \beta_0;$$

oder

$$\varphi_0 = 360^0 - \alpha_0, \quad \varphi_0 = 450^0 - \beta_0;$$

also offenbar ganz allgemein

$$\cos\varphi_0 = \cos\alpha_0, \quad \sin\varphi_0 = \cos\beta_0;$$

und eben so ganz allgemein:

$$\cos\varphi_1 = \cos\alpha_1, \quad \sin\varphi_1 = \cos\beta_1$$

ist. Also ist nach dem Obigen in völliger Allgemeinheit:

$$3) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos w_{01} = \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 + \cos\beta_0 \cos\beta_1, \\ \sin w_{01} = \cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1. \end{array} \right.$$

Haben w_{12} und w_{20} in Bezug auf die zweite und dritte Axe und in Bezug auf die dritte und erste Axe ganz ähnliche Bedeutung wie w_{01} in Bezug auf die erste und zweite Axe; so ist nach 3):

$$4) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos w_{12} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2, \\ \sin w_{12} = \cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_2; \end{array} \right.$$

und

$$5) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos w_{20} = \cos\alpha_2 \cos\alpha_0 + \cos\beta_2 \cos\beta_0, \\ \sin w_{20} = \cos\alpha_2 \cos\beta_0 - \cos\beta_2 \cos\alpha_0. \end{array} \right.$$

Hieraus findet man leicht:

$$\begin{aligned} \cos w_{12} \cos w_{20} = {} & \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2{}^2 + \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 \\ & + \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\beta_2{}^2 + \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin w_{12} \sin w_{20} = {} & -\cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\beta_2{}^2 + \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 \\ & - \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_2{}^2 + \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin w_{12} \cos w_{20} = {} & \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 - \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_2{}^2 \\ & - \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\beta_2{}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos w_{12} \sin w_{20} = {} & -\cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 - \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\beta_2{}^2 \\ & + \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2{}^2; \end{aligned}$$

also, weil

$$\cos\alpha_2^2 + \cos\beta_2^2 = 1$$

ist:

$$\cos w_{12}\cos w_{20} - \sin w_{12}\sin w_{20} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1,$$

$$\sin w_{12}\cos w_{20} + \cos w_{12}\sin w_{20} = -(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1);$$

folglich nach 3):

$$\cos w_{01} = \cos(w_{12} + w_{20}), \quad \sin w_{01} = -\sin(w_{12} + w_{20}).$$

Daher ist überhaupt:

$$6) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \cos w_{01} = \cos(w_{12} + w_{20}), \\ \cos w_{12} = \cos(w_{20} + w_{01}), \\ \cos w_{20} = \cos(w_{01} + w_{12}) \end{array}\right.$$

und:

$$7) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \sin w_{01} = -\sin(w_{12} + w_{20}), \\ \sin w_{12} = -\sin(w_{20} + w_{01}), \\ \sin w_{20} = -\sin(w_{01} + w_{12}). \end{array}\right.$$

Weil

$$\cos(w_{01} + w_{12} + w_{20}) = \cos w_{01}\cos(w_{12}+w_{20}) - \sin w_{01}\sin(w_{12}+w_{20}),$$

$$\sin(w_{01} + w_{12} + w_{20}) = \sin w_{01}\cos(w_{12}+w_{20}) + \cos w_{01}\sin(w_{12}+w_{20})$$

ist; so ist nach 6) und 7):

$$\cos(w_{01} + w_{12} + w_{20}) = \cos w_{01} + \sin w_{01}^2,$$

$$\sin(w_{01} + w_{12} + w_{20}) = \sin w_{01}\cos w_{01} - \cos w_{01}\sin w_{01};$$

also:

$$8) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \cos(w_{01} + w_{12} + w_{20}) = 1, \\ \sin(w_{01} + w_{12} + w_{20}) = 0; \end{array}\right.$$

welche Formeln wie die früheren ganz allgemein gültig sind.

Die drei Perpendikel p_0, p_1, p_2 sind nicht unabhängig von einander, sondern es findet zwischen denselben eine Gleichung Statt, welche auf folgende Art leicht gefunden werden kann. Die drei Gleichungen 2) bringt man sogleich auf die folgende Form:

$$p_0 - (a_0\cos\beta_0 - b_0\cos\alpha_0) = y\cos\alpha_0 - x\cos\beta_0,$$

$$p_1 - (a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1) = y\cos\alpha_1 - x\cos\beta_1,$$

$$p_2 - (a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) = y\cos\alpha_2 - x\cos\beta_2;$$



nach 1) also auf die Form:

$$9) \quad \ldots \quad \begin{cases} p_0 - \overline{\omega}_0 = y\cos\alpha_0 - x\cos\beta_0, \\ p_1 - \overline{\omega}_1 = y\cos\alpha_1 - x\cos\beta_1, \\ p_2 - \overline{\omega}_2 = y\cos\alpha_2 - x\cos\beta_2; \end{cases}$$

multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin w_{12} = \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2,$$
$$\sin w_{20} = \cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0,$$
$$\sin w_{01} = \cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$10) \quad (p_0 - \overline{\omega}_0)\sin w_{12} + (p_1 - \overline{\omega}_1)\sin w_{20} + (p_2 - \overline{\omega}_2)\sin w_{01} = 0$$

oder:

$$11) \quad p_0\sin w_{12} + p_1\sin w_{20} + p_2\sin w_{01} = \overline{\omega}_0\sin w_{12} + \overline{\omega}_1\sin w_{20} + \overline{\omega}_2\sin w_{01}.$$

Sind p_0', p_1', p_2' die einem beliebigen anderen Punkte entsprechenden Perpendikel, so ist eben so:

$$p_0'\sin w_{12} + p_1'\sin w_{20} + p_2'\sin w_{01} = \overline{\omega}_0\sin w_{12} + \overline{\omega}_1\sin w_{20} + \overline{\omega}_2\sin w_{01};$$

also durch Subtraction:

$$12) \quad (p_0 - p_0')\sin w_{12} + (p_1 - p_1')\sin w_{20} + (p_2 - p_2')\sin w_{01} = 0.$$

Wenn man aus je zweien der Gleichungen 9) zuerst y, dann x eliminirt, so erhält man:

$$13) \quad \ldots \quad \begin{cases} x\sin w_{01} = (p_0 - \overline{\omega}_0)\cos\alpha_1 - (p_1 - \overline{\omega}_1)\cos\alpha_0, \\ x\sin w_{12} = (p_1 - \overline{\omega}_1)\cos\alpha_2 - (p_2 - \overline{\omega}_2)\cos\alpha_1, \\ x\sin w_{20} = (p_2 - \overline{\omega}_2)\cos\alpha_0 - (p_0 - \overline{\omega}_0)\cos\alpha_2 \end{cases}$$

und:

$$14) \quad \ldots \quad \begin{cases} y\sin w_{01} = (p_0 - \overline{\omega}_0)\cos\beta_1 - (p_1 - \overline{\omega}_1)\cos\beta_0, \\ y\sin w_{12} = (p_1 - \overline{\omega}_1)\cos\beta_2 - (p_2 - \overline{\omega}_2)\cos\beta_1, \\ y\sin w_{20} = (p_2 - \overline{\omega}_2)\cos\beta_0 - (p_0 - \overline{\omega}_0)\cos\beta_2. \end{cases}$$

Durch je zwei der Grössen p_0, p_1, p_2 wird also die Lage des Punktes (xy) vollkommen bestimmt, aber offenbar nur dann, wenn

$$\sin w_{01}\,,\quad \sin w_{12}\,,\quad \sin w_{20}$$

nicht verschwinden, wenn also die drei angenommenen Axen sich gegenseitig schneiden, was wir demnach im Folgenden stets voraussetzen werden.

Wir wollen jetzt die geometrische Bedeutung der in Folge der Gleichung 11) constanten Grösse

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01}$$

aufsuchen. Zu dem Ende bezeichnen wir die Durchschnittspunkte der 1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 1sten Axe respective durch A_{01}, A_{12}, A_{20}, und den Flächeninhalt des von den drei Axen begränzten Dreiecks $A_{01}A_{12}A_{20}$ durch $\varDelta$. Jeder der drei Axen wird nach dem Obigen eine positive und eine negative Richtung beigelegt. Die drei Seiten $A_{01}A_{12}$, $A_{12}A_{20}$, $A_{20}A_{01}$ des Dreiecks $A_{01}A_{12}A_{20}$ wollen wir als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie von den Punkten A_{01}, A_{12}, A_{20} aus sich nach den positiven oder negativen Richtungen der Axen, in denen diese Seiten liegen, hin erstrecken, und mit Rücksicht hierauf respective durch s_1, s_2, s_0 bezeichnen. Weil die Grösse

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01}$$

constant ist, so wird es, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet sein, dieselbe auf einen bestimmten Punkt zu beziehen, wozu wir den Punkt A_{01} wählen wollen, für welchen $p_0=0$, $p_1=0$, und also der Werth der obigen Grösse $p_2 \sin w_{01}$ ist, welchen wir daher von jetzt an nur in's Auge fassen werden. Aus der gewiss sogleich durch sich selbst verständlichen Fig. 8., wo s_2 negativ und p_2 positiv ist, erhellet auf der Stelle, dass in allen Fällen

$$2\varDelta = -s_2 p_2,\quad 2\varDelta = -s_0 s_1 \sin w_{01};$$

also

$$4\varDelta^2 = s_0 s_1 s_2 p_2 \sin w_{01},$$

und folglich

$$p_2 \sin w_{01} = \frac{4\varDelta^2}{s_0 s_1 s_2}$$

ist. Aus der eben so durch sich selbst verständlichen Fig. 9., wo s_2 negativ und p_2 negativ ist, erhellet auf der Stelle, dass in allen Fällen



$$2\varDelta = s_2 p_2,\quad 2\varDelta = s_0 s_1 \sin w_{01};$$

also

$$4\Delta^2 = s_0 s_1 s_2 p_2 \sin w_{01},$$

und folglich

$$p_2 \sin w_{01} = \frac{4\Delta^2}{s_0 s_1 s_2}$$

ist. Daher ist ganz allgemein:

$$p_2 \sin w_{01} = \frac{4\Delta^2}{s_0 s_1 s_2},$$

und daher, wenn wir der Kürze wegen

$$15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad J = \frac{4\Delta^2}{s_0 s_1 s_2}$$

setzen, auch:

$$16) \quad . \quad . \quad . \quad p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J,$$

und natürlich auch:

$$17) \quad . \quad . \quad . \quad \overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01} = J.$$

Wenn die drei Axen sich in **einem** Punkte schneiden, ist für diesen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt $p_0 = 0$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, also:

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = 0,$$

und folglich, da überhaupt die Grösse

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01}$$

constant ist, ganz allgemein:

$$18) \quad . \quad . \quad . \quad p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = 0.$$

Die drei Perpendikel p_0, p_1, p_2 betrachtet man als eine Art neuer Coordinaten des Punktes (xy), und hat dieselben, weil sie sich auf ein System dreier sich schneidender Axen beziehen, **Dreilinien-Coordinaten** genannt.

§. 5.

Hauptsächlich müssen wir jetzt zeigen, dass die Gleichung einer jeden geraden Linie auf die Form

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0$$

gebracht werden kann, wo L, M, N constante Grössen bezeichnen.

In Bezug auf das Coordinatensytem der xy hat bekanntlich die Gleichung einer jeden geraden Linie die Form:

$$2) \ldots\ldots\ldots \quad Ay - Bx + C = 0.$$

Weil nun nach §. 4. 9)

$$p_0 = \overline{\omega}_0 + y\cos\alpha_0 - x\cos\beta_0,$$
$$p_1 = \overline{\omega}_1 + y\cos\alpha_1 - x\cos\beta_1,$$
$$p_2 = \overline{\omega}_2 + y\cos\alpha_2 - x\cos\beta_2$$

ist, so wird die Gleichung 1), wenn man diese Grössen in dieselbe einführt:

$$\left.\begin{array}{l}(L\cos\alpha_0 + M\cos\alpha_1 + N\cos\alpha_2)y\\ -(L\cos\beta_0 + M\cos\beta_1 + N\cos\beta_2)x\\ +L\overline{\omega}_0 + M\overline{\omega}_1 + N\overline{\omega}_2\end{array}\right\} = 0,$$

und vergleicht man nun diese Gleichung mit der Gleichung 2), so erhält man zur Bestimmung der Grössen L, M, N die drei folgenden Gleichungen:

$$L\cos\alpha_0 + M\cos\alpha_1 + N\cos\alpha_2 = A,$$
$$L\cos\beta_0 + M\cos\beta_1 + N\cos\beta_2 = B,$$
$$L\overline{\omega}_0 + M\overline{\omega}_1 + N\overline{\omega}_2 = C.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\overline{\omega}_2\cos\beta_1 - \overline{\omega}_1\cos\beta_2,\quad \overline{\omega}_1\cos\alpha_2 - \overline{\omega}_2\cos\alpha_1,\quad \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}&\cos\alpha_0(\overline{\omega}_2\cos\beta_1 - \overline{\omega}_1\cos\beta_2)\\ &+\cos\beta_0(\overline{\omega}_1\cos\alpha_2 - \overline{\omega}_2\cos\alpha_1)\\ &+\overline{\omega}_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)\\ =\ &\overline{\omega}_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)\\ &+\overline{\omega}_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0)\\ &+\overline{\omega}_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\\ =\ &\overline{\omega}_0\sin w_{12} + \overline{\omega}_1\sin w_{20} + \overline{\omega}_2\sin w_{01}\end{aligned}$$

ist:

$$L(\overline{\omega}_0\sin w_{12} + \overline{\omega}_1\sin w_{20} + \overline{\omega}_2\sin w_{01})$$
$$= A(\overline{\omega}_2\cos\beta_1 - \overline{\omega}_1\cos\beta_2) + B(\overline{\omega}_1\cos\alpha_2 - \overline{\omega}_2\cos\alpha_1) + C\sin w_{12}.$$

Multiplicirt man die drei obigen Gleichungen nach der Reihe mit

$\overline{\omega}_0\cos\beta_2-\overline{\omega}_2\cos\beta_0,\quad \overline{\omega}_2\cos\alpha_0-\overline{\omega}_0\cos\alpha_2,\quad \cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\,\mathrm{co}$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha_1(\overline{\omega}_0\cos\beta_2-\overline{\omega}_2\cos\beta_0)\\
&+\cos\beta_1(\overline{\omega}_2\cos\alpha_0-\overline{\omega}_0\cos\alpha_2)\\
&+\overline{\omega}_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\
=\;&\overline{\omega}_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\
&+\overline{\omega}_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\
&+\overline{\omega}_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\\
=\;&\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}
\end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned}
&M(\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01})\\
=\;&A(\overline{\omega}_0\cos\beta_2-\overline{\omega}_2\cos\beta_0)+B(\overline{\omega}_2\cos\alpha_0-\overline{\omega}_0\cos\alpha_2)+C\sin w
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die drei obigen Gleichungen nach der Reihe

$\overline{\omega}_1\cos\beta_0-\overline{\omega}_0\cos\beta_1,\quad \overline{\omega}_0\cos\alpha_1-\overline{\omega}_1\cos\alpha_0,\quad \cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\,\mathrm{c}$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha_2(\overline{\omega}_1\cos\beta_0-\overline{\omega}_0\cos\beta_1)\\
&+\cos\beta_2(\overline{\omega}_0\cos\alpha_1-\overline{\omega}_1\cos\alpha_0)\\
&+\overline{\omega}_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\\
=\;&\overline{\omega}_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\
&+\overline{\omega}_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\
&+\overline{\omega}_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\\
=\;&\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}
\end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned}
&N(\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01})\\
=\;&A(\overline{\omega}_1\cos\beta_0-\overline{\omega}_0\cos\beta_1)+B(\overline{\omega}_0\cos\alpha_1-\overline{\omega}_1\cos\alpha_0)+C\sin w_{01}.
\end{aligned}$$

Also ist:

3)

$$L=\frac{A(\overline{\omega}_2\cos\beta_1-\overline{\omega}_1\cos\beta_2)+B(\overline{\omega}_1\cos\alpha_2-\overline{\omega}_2\cos\alpha_1)+C\sin w}{\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}}$$

$$M=\frac{A(\overline{\omega}_0\cos\beta_2-\overline{\omega}_2\cos\beta_0)+B(\overline{\omega}_2\cos\alpha_0-\overline{\omega}_0\cos\alpha_2)+C\sin w}{\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin\overline{\omega}_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}}$$

$$N=\frac{A(\overline{\omega}_1\cos\beta_0-\overline{\omega}_0\cos\beta_1)+B(\overline{\omega}_0\cos\alpha_1-\overline{\omega}_1\cos\alpha_0)+C\sin w}{\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}}$$

e Formeln liefern, wenn nur nicht

$$\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01} = 0$$

n also die drei Axen sich nicht in einem Punkte schnei-
1.), für L, M, N immer endliche völlig bestimmte Werthe,
also zugleich erhellet, dass wir im Folgenden vorauszu-
genöthigt sind, dass die drei Axen sich nicht in einem
schneiden, wie von jetzt an geschehen soll.

n kann die Ausdrücke für L, M, N auch auf folgende Art
en:

4)

$$\frac{A(\overline{\omega}_2 \cos\beta_1 - \overline{\omega}_1 \cos\beta_2) - B(\overline{\omega}_2 \cos\alpha_1 - \overline{\omega}_1 \cos\alpha_2) + C\sin w_{12}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}},$$

$$\frac{A(\overline{\omega}_0 \cos\beta_2 - \overline{\omega}_2 \cos\beta_0) - B(\overline{\omega}_0 \cos\alpha_2 - \overline{\omega}_2 \cos\alpha_0) + C\sin w_{20}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}},$$

$$\frac{A(\overline{\omega}_1 \cos\beta_0 - \overline{\omega}_0 \cos\beta_1) - B(\overline{\omega}_1 \cos\alpha_0 - \overline{\omega}_0 \cos\alpha_1) + C\sin w_{01}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}};$$

auch auf folgende Art:

5)

$$= \frac{\overline{\omega}_1 (B\cos\alpha_2 - A\cos\beta_2) - \overline{\omega}_2 (B\cos\alpha_1 - A\cos\beta_1) + C\sin w_{12}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}},$$

$$= \frac{\overline{\omega}_2 (B\cos\alpha_0 - A\cos\beta_0) - \overline{\omega}_0 (B\cos\alpha_2 - A\cos\beta_2) + C\sin w_{20}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}},$$

$$= \frac{\overline{\omega}_0 (B\cos\alpha_1 - A\cos\beta_1) - \overline{\omega}_1 (B\cos\alpha_0 - A\cos\beta_0) + C\sin w_{01}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + w_2 \sin w_{01}}.$$

Sind a_λ, b_λ die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen, der gegebenen Geraden liegenden Punktes, und bezeichnen α_λ, β_λ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen dieser Geraden, die wir wie gewöhnlich ihre positive Richtung nennen wollen, mit den positiven Theilen der x-Axe und der y-Axe einschliesst, so ist nach §. 3. 1) die Gleichung der Geraden:

$$(x - a_\lambda)\cos\beta_\lambda = (y - b_\lambda)\cos\alpha_\lambda$$

oder

$$y\cos\alpha_\lambda - x\cos\beta_\lambda + (a_\lambda\cos\beta_\lambda - b_\lambda\cos\alpha_\lambda) = 0,$$

und man kann also im Obigen

$$A=\cos\alpha_\lambda,\quad B=\cos\beta_\lambda,\quad C=a_\lambda\cos\beta_\lambda-b_\lambda\cos\alpha_\lambda$$

setzen. Also ist:

$$B\cos\alpha_0-A\cos\beta_0=\cos\alpha_0\cos\beta_\lambda-\cos\beta_0\cos\alpha_\lambda,$$

$$B\cos\alpha_1-A\cos\beta_1=\cos\alpha_1\cos\beta_\lambda-\cos\beta_1\cos\alpha_\lambda,$$

$$B\cos\alpha_2-A\cos\beta_2=\cos\alpha_2\cos\beta_\lambda-\cos\beta_2\cos\alpha_\lambda.$$

Bezeichnen wir das von dem Pol auf die gegebene Gerade gefällte, nach den früher gegebenen Bestimmungen gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Perpendikel durch $\overline{\omega}_\lambda$; so ist nach §. 3. 6):

$$\overline{\omega}_\lambda=a_\lambda\cos\beta_\lambda-b_\lambda\cos\alpha_\lambda,\quad\text{also}\quad C=\overline{\omega}_\lambda;$$

und bezeichnen wir die von der positiven Richtung der gegebenen Geraden mit den positiven Richtungen der drei Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, indem wir diese Winkel als positiv oder negativ betrachten, jenachdem man sich, um von den positiven Richtungen der Axen an durch diese Winkel hindurch zu der positiven Richtung der gegebenen Geraden zu gelangen, in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Richtung bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, durch $w_{0\lambda}$, $w_{1\lambda}$, $w_{2\lambda}$; so ist nach §. 4. 3), 4), 5):

$$\sin w_{0\lambda}=\cos\alpha_0\cos\beta_\lambda-\cos\beta_0\cos\alpha_\lambda,$$

$$\sin w_{1\lambda}=\cos\alpha_1\cos\beta_\lambda-\cos\beta_1\cos\alpha_\lambda,$$

$$\sin w_{2\lambda}=\cos\alpha_2\cos\beta_\lambda-\cos\beta_2\cos\alpha_\lambda;$$

also nach dem Obigen:

$$B\cos\alpha_0-A\cos\beta_0=\sin w_{0\lambda},$$

$$B\cos\alpha_1-A\cos\beta_1=\sin w_{1\lambda},$$

$$B\cos\alpha_2-A\cos\beta_2=\sin w_{2\lambda}.$$

Hiernach hat man also nach 5) für die Grössen L, M, N die folgenden merkwürdigen Ausdrücke:

$$6)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
L&=\frac{\overline{\omega}_1\sin w_{2\lambda}-\overline{\omega}_2\sin w_{1\lambda}+\overline{\omega}_\lambda\sin w_{12}}{\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}},\\
M&=\frac{\overline{\omega}_2\sin w_{0\lambda}-\overline{\omega}_0\sin w_{2\lambda}+\overline{\omega}_\lambda\sin w_{20}}{\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}},\\
N&=\frac{\overline{\omega}_0\sin w_{1\lambda}-\overline{\omega}_1\sin w_{0\lambda}+\overline{\omega}_\lambda\sin w_{01}}{\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}};
\end{aligned}\right.$$

oder nach §. 4. 17):

$$7) \ldots \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{\bar{\omega}_1 \sin w_{2\lambda} - \bar{\omega}_2 \sin w_{1\lambda} + \bar{\omega}_\lambda \sin w_{12}}{J}, \\ M &= \frac{\bar{\omega}_2 \sin w_{0\lambda} - \bar{\omega}_0 \sin w_{2\lambda} + \bar{\omega}_\lambda \sin w_{20}}{J}, \\ N &= \frac{\bar{\omega}_0 \sin w_{1\lambda} - \bar{\omega}_1 \sin w_{0\lambda} + \bar{\omega}_\lambda \sin w_{01}}{J}; \end{aligned} \right.$$

wo J seine aus §. 4. bekannte Bedeutung hat.

Zwischen den Winkeln

$$w_{0\lambda},\quad w_{1\lambda},\quad w_{2\lambda} \text{ und } w_{01},\quad w_{12},\quad w_{20}$$

finden gewisse Relationen Statt, zu denen man leicht auf folgende Art gelangt. Nach §. 4. 3), 4), 5) ist nämlich:

$$\cos w_{0\lambda} = \cos\alpha_0 \cos\alpha_\lambda + \cos\beta_0 \cos\beta_\lambda,$$

$$\cos w_{1\lambda} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda + \cos\beta_1 \cos\beta_\lambda,$$

$$\cos w_{2\lambda} = \cos\alpha_2 \cos\alpha_\lambda + \cos\beta_2 \cos\beta_\lambda$$

und, wie wir schon vorher bemerkten:

$$\sin w_{0\lambda} = \cos\alpha_0 \cos\beta_\lambda - \cos\beta_0 \cos\alpha_\lambda,$$

$$\sin w_{1\lambda} = \cos\alpha_1 \cos\beta_\lambda - \cos\beta_1 \cos\alpha_\lambda,$$

$$\sin w_{2\lambda} = \cos\alpha_2 \cos\beta_\lambda - \cos\beta_2 \cos\alpha_\lambda;$$

also:

$$\begin{aligned} \cos w_{0\lambda} \cos w_{1\lambda} = {} & \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda^2 + \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda \\ & + \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\beta_\lambda^2 + \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin w_{0\lambda} \sin w_{1\lambda} = {} & \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\beta_\lambda^2 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda \\ & + \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_\lambda^2 - \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda; \end{aligned}$$

folglich offenbar:

$$\cos(w_{0\lambda} - w_{1\lambda}) = \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 + \cos\beta_0 \cos\beta_1,$$

also:

$$\cos(w_{0\lambda} - w_{1\lambda}) = \cos w_{01};$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} \sin w_{0\lambda} \cos w_{1\lambda} = {} & \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda - \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda^2 \\ & - \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda + \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\beta_\lambda^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos w_{0\lambda} \sin w_{1\lambda} = {} & \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda + \cos\beta_0 \cos\alpha_1 \cos\beta_\lambda^2 \\ & - \cos\beta_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_\lambda \cos\beta_\lambda - \cos\alpha_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_\lambda^2; \end{aligned}$$

folglich offenbar:

$$\sin(w_{0\lambda}-w_{1\lambda})=\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1,$$

also:

$$\sin(w_{0\lambda}-w_{1\lambda})=\sin w_{01}.$$

Daher ist überhaupt:

$$8)\quad\left\{\begin{array}{ll}\cos(w_{0\lambda}-{}_{1\lambda}w)=\cos w_{01}, & \sin(w_{0\lambda}-w_{1\lambda})=\sin w_{01},\\ \cos(w_{1\lambda}-w_{2\lambda})=\cos w_{12}, & \sin(w_{1\lambda}-w_{2\lambda})=\sin w_{12},\\ \cos(w_{2\lambda}-w_{0\lambda})=\cos w_{20}, & \sin(w_{2\lambda}-w_{0\lambda})=\sin w_{20};\end{array}\right.$$

wo nach §. 4. 6), 7) ein jedes dieser drei Systeme zweier Relationen eine Folge aus den beiden anderen Systemen ist.

Wenn man die Grössen L, M, N als gegeben annimmt, so kann man daraus die Grössen $\overline{\omega}_\lambda$ und $w_{0\lambda}$, $w_{1\lambda}$, $w_{2\lambda}$ finden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Nach 7) haben wir die folgenden Gleichungen:

$$LJ-\overline{\omega}_\lambda\sin w_{12}=\overline{\omega}_1\sin w_{2\lambda}-\overline{\omega}_2\sin w_{1\lambda},$$
$$MJ-\overline{\omega}_\lambda\sin w_{20}=\overline{\omega}_2\sin w_{0\lambda}-\overline{\omega}_0\sin w_{2\lambda},$$
$$NJ-\overline{\omega}_\lambda\sin w_{01}=\overline{\omega}_0\sin w_{1\lambda}-\overline{\omega}_1\sin w_{0\lambda};$$

welche, nach der Reihe mit $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ multiplicirt und dann zu einander addirt, sogleich zu der Gleichung

$$L\overline{\omega}_0+M\overline{\omega}_1+N\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_\lambda=0$$

führen, woraus sich

$$9)\quad\ldots\ldots\quad\overline{\omega}_\lambda=L\overline{\omega}_0+M\overline{\omega}_1+N\overline{\omega}_2$$

ergiebt.

Ferner ist nach dem Obigen:

$$A=L\cos\alpha_0+M\cos\alpha_1+N\cos\alpha_2,$$
$$B=L\cos\beta_0+M\cos\beta_1+N\cos\beta_2$$

und

$$A=\cos\alpha_\lambda,\quad B=\cos\beta_\lambda;$$

also:

$$\cos\alpha_\lambda=L\cos\alpha_0+M\cos\alpha_1+N\cos\alpha_2,$$
$$\cos\beta_\lambda=L\cos\beta_0+M\cos\beta_1+N\cos\beta_2;$$

woraus sich sehr leicht:

$$10) \ldots \begin{cases} \cos w_{0\lambda} = L + M\cos w_{01} + N\cos w_{20}, \\ \cos w_{1\lambda} = L\cos w_{01} + M + N\cos w_{12}, \\ \cos w_{2\lambda} = L\cos w_{20} + M\cos w_{12} + N \end{cases}$$

und:

$$11) \ldots \begin{cases} \sin w_{0\lambda} = M\sin w_{01} - N\sin w_{20}, \\ \sin w_{1\lambda} = N\sin w_{12} - L\sin w_{01}, \\ \sin w_{2\lambda} = L\sin w_{20} - M\sin w_{12}; \end{cases}$$

also auch:

$$12) \ldots \begin{cases} \operatorname{tang} w_{0\lambda} = \dfrac{M\sin w_{01} - N\sin w_{20}}{L + M\cos w_{01} + N\cos w_{20}}, \\ \operatorname{tang} w_{1\lambda} = \dfrac{N\sin w_{12} - L\sin w_{01}}{L\cos w_{01} + M + N\cos w_{12}}, \\ \operatorname{tang} w_{2\lambda} = \dfrac{L\sin w_{20} - M\sin w_{12}}{L\cos w_{20} + M\cos w_{12} + N} \end{cases}$$

ergiebt.

§. 6.

Wir wollen jetzt die Gleichung einer Geraden suchen, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Bezeichnen wir die beiden gegebenen Punkte durch $(p_0'p_1'p_2')$ und $(p_0''p_1''p_2'')$, die Gleichung der gesuchten Geraden durch

$$Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0,$$

so haben wir zur Bestimmung von L, M, N die beiden Gleichungen:

$$Lp_0' + Mp_1' + Np_2' = 0,$$
$$Lp_0'' + Mp_1'' + Np_2'' = 0;$$

aus denen sich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$L = G(p_1'p_2'' - p_2'p_1''),$$
$$M = G(p_2'p_0'' - p_0'p_2''),$$
$$N = G(p_0'p_1'' - p_1'p_0'');$$

also ist

$$(p_1'p_2'' - p_2'p_1'')p_0 + (p_2'p_0'' - p_0'p_2'')p_1 + (p_0'p_1'' - p_1'p_0'')p_2 = 0$$

die gesuchte Gleichung.

§. 7.

Wenn wir unter der Voraussetzung, dass jetzt L, M, N drei beliebige, nicht zugleich verschwindende constante Grössen bezeichnen, die Grösse p_0 sich stetig verändern lassen, und für jeden Werth von p_0 die Grössen p_1 und p_2 so bestimmen, dass den beiden Gleichungen des ersten Grades:

$$Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0,$$
$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J$$

genügt wird; so erhalten wir offenbar eine stetige Folge von Punkten, die in einer gewissen Curve liegen werden, welche wir nun näher discutiren wollen.

Zu dem Ende nehme man in dieser Curve zwei beliebige Punkte $(p_0' p_1' p_2')$ und $(p_0'' p_1'' p_2'')$ an, deren Coordinaten also den Gleichungen

$$Lp_0' + Mp_1' + Np_2' = 0,$$
$$p_0' \sin w_{12} + p_1' \sin w_{20} + p_2' \sin w_{01} = J;$$
$$Lp_0'' + Mp_1'' + Np_2'' = 0,$$
$$p_0'' \sin w_{12} + p_1'' \sin w_{20} + p_2'' \sin w_{01} = J$$

genügen, und lege durch diese beiden Punkte eine gerade Linie, welche folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen durch die Gleichung

$$(p_1' p_2'' - p_2' p_1'') p_0 + (p_2' p_0'' - p_0' p_2'') p_1 + (p_0' p_1'' - p_1' p_0'') p_2 = 0,$$

wo natürlich immer

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J$$

ist, charakterisirt wird.

Ist nun $(P_0 P_1 P_2)$ ein anderer ganz beliebiger Punkt in unserer zu discutirenden obigen Curve, so ist:

$$LP_0 + MP_1 + NP_2 = 0,$$
$$P_0 \sin w_{12} + P_1 \sin w_{20} + P_2 \sin w_{01} = J;$$

und wir haben also die drei folgenden Gleichungen:

$$Lp_0' + Mp_1' + Np_2' = 0,$$
$$Lp_0'' + Mp_1'' + Np_2'' = 0,$$
$$LP_0 + MP_1 + NP_2 = 0.$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$p_1''P_2 - p_2''P_1, \quad P_1p_2' - P_2p_1', \quad p_1'p_2'' - p_2'p_1'';$$

dann mit

$$p_2''P_0 - p_0''P_2, \quad P_2p_0' - P_0p_2', \quad p_2'p_0'' - p_0'p_2'';$$

endlich mit

$$p_0''P_1 - p_1''P_0, \quad P_0p_1' - P_1p_0', \quad p_0'p_1'' - p_1'p_0'';$$

und addiren sie in jedem Falle zu einander, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$L\{(p_1'p_2''-p_2'p_1'')P_0+(p_2'p_0''-p_0'p_2'')P_1+(p_0'p_1''-p_1'p_0'')P_2\} = 0,$$

$$M\{(p_1'p_2''-p_2'p_1'')P_0+(p_2'p_0''-p_0'p_2'')P_1+(p_0'p_1''-p_1'p_0'')P_2\} = 0,$$

$$N\{(p_1'p_2''-p_2'p_1'')P_0+(p_2'p_0''-p_0'p_2'')P_1+(p_0'p_1''-p_1'p_0'')P_2\} = 0;$$

also, weil L, M, N nicht zugleich verschwinden:

$$(p_1'p_2''-p_2'p_1'')P_0+(p_2'p_0''-p_0'p_2'')P_1+(p_0'p_1''-p_1'p_0'')P_2=0,$$

wo nach dem Obigen zugleich

$$P_0\sin w_{12} + P_1\sin w_{20} + P_2\sin w_{01} = J$$

ist.

Vergleicht man nun diese Gleichungen mit den obigen Gleichungen für die durch die Punkte $(p_0'p_1'p_2')$ und $(p_0''p_1''p_2'')$ gelegte gerade Linie, so ist klar, dass der Punkt $(P_0P_1P_2)$ in dieser geraden Linie liegt, und da der Punkt $(P_0P_1P_2)$ jeden Punkt der zu discutirenden Curve repräsentirt, so ist diese Curve, welche aus den Gleichungen

$$1) \ldots \begin{cases} Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0, \\ p_0\sin w_{12} + p_1\sin w_{20} + p_2\sin w_{01} = J \end{cases}$$

construirt wird, jederzeit selbst eine Gerade.

Für diese Gerade wollen wir nun die Grössen, welche in §. 5. für die dort betrachtete Gerade durch L, M, N bezeichnet wurden, jetzt durch $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichnen, indem [illegible] übrigens alle dort gebrauchten Bezeichnungen auch hier [illegible] die Gleichungen 1) charakterisirte Gerade beibehalten [illegible] wir nach §. 5. für diese Gerade auch die Gleichu[illegible]

$$2) \ldots . \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{L}p_0 + \mathfrak{M}p_1 + \mathfrak{N}p_2 = 0, \\ p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J. \end{array} \right.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0,$$
$$\mathfrak{L}p_0 + \mathfrak{M}p_1 + \mathfrak{N}p_2 = 0$$

folgt:

$$(N\mathfrak{L} - L\mathfrak{N})p_0 = (M\mathfrak{N} - N\mathfrak{M})p_1,$$
$$(L\mathfrak{M} - M\mathfrak{L})p_1 = (N\mathfrak{L} - L\mathfrak{N})p_2,$$
$$(M\mathfrak{N} - N\mathfrak{M})p_2 = (L\mathfrak{M} - M\mathfrak{L})p_0.$$

Weil die drei Axen sich nicht in einem Punkte schneiden dürfen, so können p_0, p_1, p_2 nie zugleich verschwinden, und da immer eine der drei Axen nothwendig von unserer Geraden geschnitten werden muss, so wollen wir annehmen, dass dies die erste Axe sei. Dann können wir $p_0 = 0$ setzen und erhalten daher aus den drei obigen Gleichungen die beiden folgenden:

$$(M\mathfrak{N} - N\mathfrak{M})p_1 = 0, \quad (M\mathfrak{N} - N\mathfrak{M})p_2 = 0;$$

also, weil, da $p_0 = 0$ gesetzt worden ist, p_1 und p_2 nicht zugleich verschwinden können:

$$M\mathfrak{N} - N\mathfrak{M} = 0,$$

und folglich nach dem Obigen für jedes p_0:

$$(N\mathfrak{L} - L\mathfrak{N})p_0 = 0, \quad (L\mathfrak{M} - M\mathfrak{L})p_0 = 0;$$

also, weil p_0 nicht allgemein verschwindet, da die erste Axe von der Geraden geschnitten wird:

$$N\mathfrak{L} - L\mathfrak{N} = 0, \quad L\mathfrak{M} - M\mathfrak{L} = 0;$$

so dass wir also die drei folgenden Gleichungen haben:

$$L\mathfrak{M} - M\mathfrak{L} = 0, \quad M\mathfrak{N} - N\mathfrak{M} = 0, \quad N\mathfrak{L} - L\mathfrak{N} = 0.$$

Da eine der drei Grössen L, M, N jedenfalls nicht verschwindet, so wollen wir etwa annehmen, dass dies die Grösse L sei, und

$$\mathfrak{L} = GL$$

setzen; dann ist wegen der obigen Gleichungen:

$$L(\mathfrak{M} - GM) = 0, \quad L(GN - \mathfrak{N}) = 0;$$

also, weil L nicht verschwindet:

$$\mathfrak{M} - GM = 0, \quad GN - \mathfrak{N} = 0;$$

so dass wir also die drei folgenden Gleichungen haben:

$$\mathfrak{L} = GL, \quad \mathfrak{M} = GM, \quad \mathfrak{N} = GN.$$

Nach §. 5. 10), 11) ist nun:

$$\cos w_{0\lambda} = \mathfrak{L} + \mathfrak{M} \cos w_{01} + \mathfrak{N} \cos w_{20},$$
$$\cos w_{1\lambda} = \mathfrak{L} \cos w_{01} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} \cos w_{12},$$
$$\cos w_{2\lambda} = \mathfrak{L} \cos w_{20} + \mathfrak{M} \cos w_{12} + \mathfrak{N}$$

und

$$\sin w_{0\lambda} = \mathfrak{M} \sin w_{01} - \mathfrak{N} \sin w_{20},$$
$$\sin w_{1\lambda} = \mathfrak{N} \sin w_{12} - \mathfrak{L} \sin w_{01},$$
$$\sin w_{2\lambda} = \mathfrak{L} \sin w_{20} - \mathfrak{M} \sin w_{12};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos w_{0\lambda} = G(L + M \cos w_{01} + N \cos w_{20}),$$
$$\cos w_{1\lambda} = G(L \cos w_{01} + M + N \cos w_{12}),$$
$$\cos w_{2\lambda} = G(L \cos w_{20} + M \cos w_{12} + N)$$

und:

$$\sin w_{0\lambda} = G(M \sin w_{01} - N \sin w_{20}),$$
$$\sin w_{1\lambda} = G(N \sin w_{12} - L \sin w_{01}),$$
$$\sin w_{2\lambda} = G(L \sin w_{20} - M \sin w_{12}).$$

Weil nun offenbar

$$(L + M \cos w_{01} + N \cos w_{20})^2 + (M \sin w_{01} - N \sin w_{20})^2$$
$$= L^2 + M^2 + N^2 + 2LM \cos w_{01} + 2MN \cos (w_{20} + w_{01}) + 2NL \cos w_{20}$$
$$= L^2 + M^2 + N^2 + 2LM \cos w_{01} + 2MN \cos w_{12} + 2NL \cos w_{20}$$

und

$$\cos w_{0\lambda}^2 + \sin w_{0\lambda}^2 = 1$$

ist; so ist offenbar:

3)

$$G = \pm (L^2 + M^2 + N^2 + 2LM \cos w_{01} + 2MN \cos w_{12} + 2NL \cos w_{20})^{-\frac{1}{2}},$$

und folglich nach dem Obigen:

4)

$$\cos w_0\lambda = \pm \frac{L + M\cos w_{01} + N\cos w_{20}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}},$$

$$\cos w_1\lambda = \pm \frac{L\cos w_{01} + M + N\cos w_{12}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}},$$

$$\cos w_2\lambda = \pm \frac{L\cos w_{20} + M\cos w_{12} + N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}}$$

und:

5)

$$\sin w_0\lambda = \pm \frac{M\sin w_{01} - N\sin w_{20}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}},$$

$$\sin w_1\lambda = \pm \frac{N\sin w_{12} - L\sin w_{01}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}},$$

$$\sin w_2\lambda = \pm \frac{L\sin w_{20} - M\sin w_{12}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}};$$

also:

$$6) \ldots \begin{cases} \operatorname{tang} w_0\lambda = \dfrac{M\sin w_{01} - N\sin w_{20}}{L + M\cos w_{01} + N\cos w_{20}}, \\[2ex] \operatorname{tang} w_1\lambda = \dfrac{N\sin w_{12} - L\sin w_{01}}{L\cos w_{01} + M + N\cos w_{12}}, \\[2ex] \operatorname{tang} w_2\lambda = \dfrac{L\sin w_{20} - M\sin w_{12}}{L\cos w_{20} + M\cos w_{12} + N}. \end{cases}$$

Nach §. 5. 9) ist:

$$\overline{\omega}\lambda = \mathfrak{L}\overline{\omega}_0 + \mathfrak{M}\overline{\omega}_1 + \mathfrak{N}\overline{\omega}_2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\overline{\omega}\lambda = G(L\overline{\omega}_0 + M\overline{\omega}_1 + N\overline{\omega}_2),$$

und folglich nach 3):

7)

$$\overline{\omega}\lambda = \pm \frac{L\overline{\omega}_0 + M\overline{\omega}_1 + N\overline{\omega}_2}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}}.$$

Das Erscheinen der doppelten Vorzeichen in allen diesen Formeln liegt ganz in der Natur der Sache, weil jede der beiden

Richtungen unserer Geraden als die positive Richtung derselben angesehen werden kann.

Wir bemerken auch noch, dass nach §. 5., wenn $\alpha\lambda$ und $\beta\lambda$ die von einer der beiden Richtungen unserer Geraden mit den positiven Theilen der x-Axe und y-Axe eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen,

$$\cos\alpha\lambda = A = \mathfrak{L}\cos\alpha_0 + \mathfrak{M}\cos\alpha_1 + \mathfrak{N}\cos\alpha_2,$$

$$\cos\beta\lambda = B = \mathfrak{L}\cos\beta_0 + \mathfrak{M}\cos\beta_1 + \mathfrak{N}\cos\beta_2;$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\alpha\lambda = G(L\cos\alpha_0 + M\cos\alpha_1 + N\cos\alpha_2),$$

$$\cos\beta\lambda = G(L\cos\beta_0 + M\cos\beta_1 + N\cos\beta_2);$$

folglich nach 3):

8)

$$\cos\alpha\lambda = \pm\frac{L\cos\alpha_0 + M\cos\alpha_1 + N\cos\alpha_2}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}},$$

$$\cos\beta\lambda = \pm\frac{L\cos\beta_0 + M\cos\beta_1 + N\cos\beta_2}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}}$$

ist.

Von jetzt an sollen im Folgenden, wie hier, alle Symbole wie L, M, N; L', M', N'; u. s. w. immer drei ganz beliebige, nicht zugleich verschwindende constante Grössen bezeichnen.

§. 8.

Um die Bedingung der Parallelität der beiden durch die Gleichungen

$$Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0, \quad L'p_0 + M'p_1 + N'p_2 = 0$$

charakterisirten Geraden zu finden, bezeichne man deren Gleichungen im System der xy respective durch

$$Ay - Bx + C = 0, \quad A'y - B'x + C' = 0;$$

dann ist bekanntlich die Bedingung der Parallelität:

$$AB' - BA' = 0,$$

und folglich, weil nach §. 5.

$$A = L\cos\alpha_0 + M\cos\alpha_1 + N\cos\alpha_2,$$
$$B = L\cos\beta_0 + M\cos\beta_1 + N\cos\beta_2$$

und

$$A' = L'\cos\alpha_0 + M'\cos\alpha_1 + N'\cos\alpha_2,$$
$$B' = L'\cos\beta_0 + M'\cos\beta_1 + N'\cos\beta_2$$

ist:

$$\left.\begin{array}{l}(L\cos\alpha_0+M\cos\alpha_1+N\cos\alpha_2)(L'\cos\beta_0+M'\cos\beta_1+N'\cos\beta_2)\\ -(L\cos\beta_0+M\cos\beta_1+N\cos\beta_2)(L'\cos\alpha_0+M'\cos\alpha_1+N'\cos\alpha_2)\end{array}\right\}=0,$$

welche Gleichung man leicht auf die folgende Form bringt:

$$\left.\begin{array}{l}(LM'-ML')(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\\ +(MN'-NM')(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\ +(NL'-LN')(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\end{array}\right\}=0.$$

Also ist nach den aus §. 4. bekannten Formeln

$$(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}=0$$

die gesuchte Bedingungsgleichung.

§. 9.

Es sei $(p_0'p_1'p_2')$ ein gegebener Punkt, durch welchen eine mit der durch die Gleichung

$$Lp_0+Mp_1+Np_2=0$$

charakterisirten Geraden parallele Gerade gelegt werden soll.

Bezeichnen wir die Gleichung dieser gesuchten Geraden durch

$$L'p_0+M'p_1+N'p_2=0,$$

so haben wir zur Bestimmung von L', M', N' offenbar die beiden Gleichungen:

$$L'p_0'+M'p_1'+N'p_2'=0,$$
$$(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}=0$$

oder:

$$L'p_0'+M'p_1'+N'p_2'=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(M\sin w_{01}-N\sin w_{20})L'\\ +(N\sin w_{12}-L\sin w_{01})M'\\ +(L\sin w_{20}-M\sin w_{12})N'\end{array}\right\}=0.$$

Also ist, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$L' = G'\{p_1'(L\sin w_{20} - M\sin w_{12}) - p_2'(N\sin w_{12} - L\sin w_{01})\},$$
$$M' = G'\{p_2'(M\sin w_{01} - N\sin w_{20}) - p_0'(L\sin w_{20} - M\sin w_{12})\},$$
$$N' = G'\{p_0'(N\sin w_{12} - L\sin w_{01}) - p_1'(M\sin w_{01} - N\sin w_{20})\};$$

oder:

$$L' = G'\{L(p_0'\sin w_{12} + p_1'\sin w_{20} + p_2'\sin w_{01}) \\ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{12}\},$$
$$M' = G'\{M(p_0'\sin w_{12} + p_1'\sin w_{20} + p_2'\sin w_{01}) \\ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{20}\},$$
$$N' = G'\{N(p_0'\sin w_{12} + p_1'\sin w_{20} + p_2'\sin w_{01}) \\ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{01}\};$$

oder:

$$L' = G'\{LJ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{12}\},$$
$$M' = G'\{MJ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{20}\},$$
$$N' = G'\{NJ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{01}\};$$

und die gesuchte Gleichung ist folglich:

$$\left.\begin{array}{l} \{LJ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{12}\}p_0 \\ + \{MJ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{20}\}p_1 \\ + \{NJ - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2')\sin w_{01}\}p_2 \end{array}\right\} = 0,$$

oder, weil auch

$$p_0\sin w_{12} + p_1\sin w_{20} + p_2\sin w_{01} = J$$

ist:

$$Lp_0 + Mp_1 + Np_2 - (Lp_0' + Mp_1' + Np_2') = 0,$$

oder:

$$L(p_0 - p_0') + M(p_1 - p_1') + N(p_2 - p_2') = 0.$$

§. 10.

Um den Durchschnittspunkt der beiden durch die Gleichungen

$$Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0, \quad L'p_0 + M'p_1 + N'p_2 = 0$$

charakterisirten Geraden zu finden, wollen wir diesen Durchschnittspunkt durch $(p_0 p_1 p_2)$ bezeichnen; dann haben wir zur Bestimmung der Coordinaten p_0, p_1, p_2 die drei folgenden Glei

$$Lp_0+Mp_1+Np_2=0,\quad L'p_0+M'p_1+N'p_2=0;$$

$$p_0\sin w_{12}+p_1\sin w_{20}+p_2\sin w_{01}=J;$$

wo bekanntlich

$$J=\overline{\omega}_0\sin w_{12}+\overline{\omega}_1\sin w_{20}+\overline{\omega}_2\sin w_{01}$$

ist. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\begin{aligned}p_0&=G(MN'-NM'),\\ p_1&=G(NL'-LN'),\\ p_2&=G(LM'-ML');\end{aligned}$$

also, wenn man diese Ausdrücke in die dritte Gleichung einführt:

$$G=\frac{J}{(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$p_0=\frac{(MN'-NM')J}{(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}},$$

$$p_1=\frac{(NL'-LN')J}{(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}},$$

$$p_2=\frac{(LM'-ML')J}{(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}}.$$

Wenn der gemeinschaftliche Nenner verschwindet und nach §. 8. also die beiden gegebenen Geraden einander parallel sind, so führen die vorhergehenden Ausdrücke auf das Symbol des Unendlichen.

§. 11.

Wir wollen jetzt zunächst die Entfernung E der beiden gegebenen Punkte $(p_0'p_1'p_2')$ und $(p_0''p_1''p_2'')$ von einander bestimmen.

Bezeichnen wir zu dem Ende die rechtwinkligen Coordinaten dieser beiden Punkte durch x', y' und x'', y'', so ist bekanntlich:

$$\begin{aligned}p_0'&=(a_0-x')\cos\beta_0-(b_0-y')\cos\alpha_0,\\ p_1'&=(a_1-x')\cos\beta_1-(b_1-y')\cos\alpha_1,\\ p_2'&=(a_2-x')\cos\beta_2-(b_2-y')\cos\alpha_2\end{aligned}$$

und

$$p_0'' = (a_0 - x'')\cos\beta_0 - (b_0 - y'')\cos\alpha_0,$$
$$p_1'' = (a_1 - x'')\cos\beta_1 - (b_1 - y'')\cos\alpha_1,$$
$$p_2'' = (a_2 - x'')\cos\beta_2 - (b_2 - y'')\cos\alpha_2;$$

also:

$$p_0' - p_0'' = (x'' - x')\cos\beta_0 - (y'' - y')\cos\alpha_0,$$
$$p_1' - p_1'' = (x'' - x')\cos\beta_1 - (y'' - y')\cos\alpha_1,$$
$$p_2' - p_2'' = (x'' - x')\cos\beta_2 - (y'' - y')\cos\alpha_2;$$

und folglich:

$$(p_0' - p_0'')^2$$
$$= (x' - x'')^2\cos\beta_0^2 + (y' - y'')^2\cos\alpha_0^2 - 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\alpha_0\cos\beta_0,$$
$$(p_1' - p_1'')^2$$
$$= (x' - x'')^2\cos\beta_1^2 + (y' - y'')^2\cos\alpha_1^2 - 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\alpha_1\cos\beta_1,$$
$$(p_2' - p_2'')^2$$
$$= (x' - x'')^2\cos\beta_2^2 + (y' - y'')^2\cos\alpha_2^2 - 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\alpha_2\cos\beta_2.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin w_{12},$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_0(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0) = \cos\alpha_2\cos\alpha_0\sin w_{20},$$
$$\cos\alpha_0\cos\alpha_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1) = \cos\alpha_0\cos\alpha_1\sin w_{01}$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man:

$$(p_0' - p_0'')^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin w_{12}$$
$$+ (p_1' - p_1'')^2\cos\alpha_2\cos\alpha_0\sin w_{20}$$
$$+ (p_2' - p_2'')^2\cos\alpha_0\cos\alpha_1\sin w_{01}$$
$$= (x' - x'')^2\left\{\begin{array}{l} \cos\beta_0^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin w_{12} \\ + \cos\beta_1^2\cos\alpha_2\cos\alpha_0\sin w_{20} \\ + \cos\beta_2^2\cos\alpha_0\cos\alpha_1\sin w_{01} \end{array}\right\}.$$

Multiplicirt man dagegen die drei obigen Glei[illegible]n nach der Reihe mit:

$$\cos\beta_1\cos\beta_2(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2) = \cos\beta_1\cos \text{[illegible]}$$
$$\cos\beta_2\cos\beta_0(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0) = \cos\beta_2\cos\beta \text{[illegible]}$$
$$\cos\beta_0\cos\beta_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1) \text{[illegible]}$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man:

$$\begin{aligned}&(p_0'-p_0'')^2\cos\beta_1\cos\beta_2\sin w_{12}\\&+(p_1'-p_1'')^2\cos\beta_2\cos\beta_0\sin w_{20}\\&+(p_2'-p_2'')^2\cos\beta_0\cos\beta_1\sin w_{01}\end{aligned}$$

$$=(y'-y'')^2\left\{\begin{aligned}&\cos\alpha_0{}^2\cos\beta_1\cos\beta_2\sin w_{12}\\&+\cos\alpha_1{}^2\cos\beta_2\cos\beta_0\sin w_{20}\\&+\cos\alpha_2{}^2\cos\beta_0\cos\beta_1\sin w_{01}\end{aligned}\right\}.$$

Sehr leicht erhellet aber, dass

$$\begin{aligned}&\cos\beta_0{}^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\&+\cos\beta_1{}^2\cos\alpha_2\cos\alpha_0(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\&+\cos\beta_2{}^2\cos\alpha_0\cos\alpha_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\\=\;&\cos\alpha_0{}^2\cos\beta_1\cos\beta_2(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\&+\cos\alpha_1{}^2\cos\beta_2\cos\beta_0(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\&+\cos\alpha_2{}^2\cos\beta_0\cos\beta_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1),\end{aligned}$$

also auch, wenn man diese beiden gleichen Grössen durch S bezeichnet:

$$\begin{aligned}S=\;&\cos\alpha_0{}^2\cos\beta_1\cos\beta_2\sin w_{12}\\&+\cos\alpha_1{}^2\cos\beta_2\cos\beta_0\sin w_{20}\\&+\cos\alpha_2{}^2\cos\beta_0\cos\beta_1\sin w_{01}\\=\;&\cos\beta_0{}^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin w_{12}\\&+\cos\beta_1{}^2\cos\alpha_2\cos\alpha_0\sin w_{20}\\&+\cos\beta_2{}^2\cos\alpha_0\cos\alpha_1\sin w_{01}\end{aligned}$$

ist, und dass man daher nach dem Obigen setzen kann:

$$\begin{aligned}(x'-x'')^2S=\;&(p_0'-p_0'')^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin w_{12}\\&+(p_1'-p_1'')^2\cos\alpha_2\cos\alpha_0\sin w_{20}\\&+(p_2'-p_2'')^2\cos\alpha_0\cos\alpha_1\sin w_{01},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(y'-y'')^2S=\;&(p_0'-p_0'')^2\cos\beta_1\cos\beta_2\sin w_{12}\\&+(p_1'-p_1'')^2\cos\beta_2\cos\beta_0\sin w_{20}\\&+(p_2'-p_2'')^2\cos\beta_0\cos\beta_1\sin w_{01};\end{aligned}$$

also offenbar durch Addition:

$$\begin{aligned}E^2S=(p_0'-p_0'')^2\sin w_{12}\cos w_{12}+(p_1'-p_1'')^2\sin w_{20}\cos w_{20}\\+(p_2'-p_2'')^2\sin w_{01}\cos w_{01}\end{aligned}$$

oder

$$2E^2S=(p_0'-p_0'')^2\sin 2w_{12}+(p_1'-p_1'')^2\sin 2w_{20}+(p_2'-p_2'')^2\sin 2w_{01}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}S= &\ \cos\alpha_0{}^2(\cos w_{12}-\cos\alpha_1\cos\alpha_2)\sin w_{12}\\ &+\cos\alpha_1{}^2(\cos w_{20}-\cos\alpha_2\cos\alpha_0)\sin w_{20}\\ &+\cos\alpha_2{}^2(\cos w_{01}-\cos\alpha_0\cos\alpha_1)\sin w_{01}\end{aligned}$$

$$=\cos\alpha_0{}^2\sin w_{12}\cos w_{12}+\cos\alpha_1{}^2\sin w_{20}\cos w_{20}+\cos\alpha_2{}^2\sin w_{01}\cos w_{01}$$

$$-\cos\alpha_0\cos\alpha_1\cos\alpha_2(\cos\alpha_0\sin w_{12}+\cos\alpha_1\sin w_{20}+\cos\alpha_2\sin w_{01}),$$

$$\begin{aligned}S= &\ \cos\beta_0{}^2(\cos w_{12}-\cos\beta_1\cos\beta_2)\sin w_{12}\\ &+\cos\beta_1{}^2(\cos w_{20}-\cos\beta_2\cos\beta_0)\sin w_{20}\\ &+\cos\beta_2{}^2(\cos w_{01}-\cos\beta_0\cos\beta_1)\sin w_{01}\end{aligned}$$

$$=\cos\beta_0{}^2\sin w_{12}\cos w_{12}+\cos\beta_1{}^2\sin w_{20}\cos w_{20}+\cos\beta_2{}^2\sin w_{01}\cos w_{01}$$

$$-\cos\beta_0\cos\beta_1\cos\beta_2(\cos\beta_0\sin w_{12}+\cos\beta_1\sin w_{20}+\cos\beta_2\sin w_{01});$$

also, weil

$$\cos\alpha_0\sin w_{12}+\cos\alpha_1\sin w_{20}+\cos\alpha_2\sin w_{01}=0,$$
$$\cos\beta_0\sin w_{12}+\cos\beta_1\sin w_{20}+\cos\beta_2\sin w_{01}=0$$

ist:

$$2S=\cos\alpha_0{}^2\sin 2w_{12}+\cos\alpha_1{}^2\sin 2w_{20}+\cos\alpha_2{}^2\sin 2w_{01},$$
$$2S=\cos\beta_0{}^2\sin 2w_{12}+\cos\beta_1{}^2\sin 2w_{20}+\cos\beta_2{}^2\sin 2w_{01};$$

und folglich durch Addition:

$$4S=\sin 2w_{01}+\sin 2w_{12}+\sin 2w_{20}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$E^2=2\frac{(p_0'-p_0'')^2\sin 2w_{12}+(p_1'-p_1'')^2\sin 2w_{20}+(p_2'-p_2'')^2\sin 2w_{01}}{\sin 2w_{01}+\sin 2w_{12}+\sin 2w_{20}}.$$

Für jede drei Winkel x, y, z ist bekanntlich:

$$\sin x+\sin y+\sin z$$
$$=\sin(x+y+z)+4\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(y+z)\sin\tfrac{1}{2}(z+x),$$

also:

$$\sin 2w_{01}+\sin 2w_{12}+\sin 2w_{20}$$
$$=\sin 2(w_{01}+w_{12}+w_{20})+4\sin(w_{01}+w_{12})\sin(w_{12}+w_{2}$$

aber

$$\sin 2(w_{01}+w_{12}+w_{20})=2\sin(w_{01}+w_{12}+w_{20})\cos(w_{01}+w_{12}+w_{20}),$$

und folglich nach §. 4. 8):

$$\sin 2(w_{01}+w_{12}+w_{20})=0;$$

also:

$$\sin 2w_{01}+\sin 2w_{12}+\sin 2w_{20}$$
$$=4\sin(w_{01}+w_{12})\sin(w_{12}+w_{20})\sin(w_{20}+w_{01}),$$

und daher nach §. 4. 7):

$$\sin 2w_{01}+\sin 2w_{12}+\sin 2w_{20}=-4\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$E^2=-\frac{(p_0'-p_0'')^2\sin 2w_{12}+(p_1'-p_1'')^2\sin 2w_{20}+(p_2'-p_2'')^2\sin 2w_{01}}{2\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}$$

oder:

$$E^2=-\left\{\frac{(p_0'-p_0'')^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{(p_1'-p_1'')^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{(p_2'-p_2'')^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\}.$$

Denken wir uns um den Pol, der natürlich jeder beliebige Punkt sein kann, mit dem Halbmesser r einen Kreis beschrieben, so ist die Gleichung dieses Kreises:

$$r^2+\frac{(p_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{(p_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{(p_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}=0.$$

§. 12.

Die Coordinaten des Mittelpunkts der die Punkte $(p_0'p_1'p_2')$ und $(p_0''p_1''p_2'')$ mit einander verbindenden Geraden seien p_0, p_1, p_2. Um diese Coordinaten zu finden, wollen wir die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte $(p_0'p_1'p_2')$ und $(p_0''p_1''p_2'')$ durch x', y' und x'', y'' bezeichnen. Dann ist nach §. 4. 13), 14):

$$x'\sin w_{01}=(p_0'-\overline{\omega}_0)\cos\alpha_1-(p_1'-\overline{\omega}_1)\cos\alpha_0,$$
$$x'\sin w_{12}=(p_1'-\overline{\omega}_1)\cos\alpha_2-(p_2'-\overline{\omega}_2)\cos\alpha_1,$$
$$x'\sin w_{20}=(p_2'-\overline{\omega}_2)\cos\alpha_0-(p_0'-\overline{\omega}_0)\cos\alpha_2;$$

$$y'\sin w_{01}=(p_0'-\overline{\omega}_0)\cos\beta_1-(p_1'-\overline{\omega}_1)\cos\beta_0,$$
$$y'\sin w_{12}=(p_1'-\overline{\omega}_1)\cos\beta_2-(p_2'-\overline{\omega}_2)\cos\beta_1,$$
$$y'\sin w_{20}=(p_2'-\overline{\omega}_2)\cos\beta_0-(p_0'-\overline{\omega}_0)\cos\beta_2$$

und:

$$x''\sin w_{01} = (p_0'' - \bar{\omega}_0)\cos\alpha_1 - (p_1'' - \bar{\omega}_1)\cos\alpha_0,$$
$$x''\sin w_{12} = (p_1'' - \bar{\omega}_1)\cos\alpha_2 - (p_2'' - \bar{\omega}_2)\cos\alpha_1,$$
$$x''\sin w_{20} = (p_2'' - \bar{\omega}_2)\cos\alpha_0 - (p_0'' - \bar{\omega}_0)\cos\alpha_2;$$

$$y''\sin w_{01} = (p_0'' - \bar{\omega}_0)\cos\beta_1 - (p_1'' - \bar{\omega}_1)\cos\beta_0,$$
$$y''\sin w_{12} = (p_1'' - \bar{\omega}_1)\cos\beta_2 - (p_2'' - \bar{\omega}_2)\cos\beta_1,$$
$$y''\sin w_{20} = (p_2'' - \bar{\omega}_2)\cos\beta_0 - (p_0'' - \bar{\omega}_0)\cos\beta_2;$$

also durch Addition:

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'')\sin w_{01} = \{\tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'') - \bar{\omega}_0\}\cos\alpha_1 - \{\tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'') - \bar{\omega}_1\}\cos\alpha_0,$$
$$\tfrac{1}{2}(x'+x'')\sin w_{12} = \{\tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'') - \bar{\omega}_1\}\cos\alpha_2 - \{\tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'') - \bar{\omega}_2\}\cos\alpha_1,$$
$$\tfrac{1}{2}(x'+x'')\sin w_{20} = \{\tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'') - \bar{\omega}_2\}\cos\alpha_0 - \{\tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'') - \bar{\omega}_0\}\cos\alpha_2;$$

$$\tfrac{1}{2}(y'+y'')\sin w_{01} = \{\tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'') - \bar{\omega}_0\}\cos\beta_1 - \{\tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'') - \bar{\omega}_1\}\cos\beta_0,$$
$$\tfrac{1}{2}(y'+y'')\sin w_{12} = \{\tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'') - \bar{\omega}_1\}\cos\beta_2 - \{\tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'') - \bar{\omega}_2\}\cos\beta_1,$$
$$\tfrac{1}{2}(y'+y'')\sin w_{20} = \{\tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'') - \bar{\omega}_2\}\cos\beta_0 - \{\tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'') - \bar{\omega}_0\}\cos\beta_2.$$

Weil nun bekanntlich $\tfrac{1}{2}(x'+x'')$, $\tfrac{1}{2}(y'+y'')$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $(p_0 p_1 p_2)$ sind, so ist nach §. 4. 9):

$$p_0 - \bar{\omega}_0 = \tfrac{1}{2}(y'+y'')\cos\alpha_0 - \tfrac{1}{2}(x'+x'')\cos\beta_0,$$
$$p_1 - \bar{\omega}_1 = \tfrac{1}{2}(y'+y'')\cos\alpha_1 - \tfrac{1}{2}(x'+x'')\cos\beta_1,$$
$$p_2 - \bar{\omega}_2 = \tfrac{1}{2}(y'+y'')\cos\alpha_2 - \tfrac{1}{2}(x'+x'')\cos\beta_2;$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned}(p_0-\bar{\omega}_0)\sin w_{12} = & \{\bar{\omega}_2 - \tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'')\}(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\\ & + \{\bar{\omega}_1 - \tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'')\}(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p_1-\bar{\omega}_1)\sin w_{20} = & \{\bar{\omega}_0 - \tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'')\}(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)\\ & + \{\bar{\omega}_2 - \tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'')\}(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p_2-\bar{\omega}_2)\sin w_{01} = & \{\bar{\omega}_1 - \tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'')\}(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0)\\ & + \{\bar{\omega}_0 - \tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'')\}(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2);\end{aligned}$$

also:

$$(p_0-\bar{\omega}_0)\sin w_{12} = \{\bar{\omega}_2 - \tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'')\}\sin w_{01} + \{\bar{\omega}_1 - \tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'')\}\sin w_{20},$$
$$(p_1-\bar{\omega}_1)\sin w_{20} = \{\bar{\omega}_0 - \tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'')\}\sin w_{12} + \{\bar{\omega}_2 - \tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'')\}\sin w_{01},$$
$$(p_2-\bar{\omega}_2)\sin w_{01} = \{\bar{\omega}_1 - \tfrac{1}{2}(p_1'+p_1'')\}\sin w_{20} + \{\bar{\omega}_0 - \tfrac{1}{2}(p_0'+p_0'')\}\sin w_{12};$$

und hieraus offenbar:

$$p_0 \sin w_{12} = J - \tfrac{1}{2}(p_2' + p_2'')\sin w_{01} - \tfrac{1}{2}(p_1' + p_1'')\sin w_{20},$$

$$p_1 \sin w_{20} = J - \tfrac{1}{2}(p_0' + p_0'')\sin w_{12} - \tfrac{1}{2}(p_2' + p_2'')\sin w_{01},$$

$$p_2 \sin w_{01} = J - \tfrac{1}{2}(p_1' + p_1'')\sin w_{20} - \tfrac{1}{2}(p_0' + p_0'')\sin w_{12};$$

oder

$$p_0 \sin w_{12}$$
$$= J + \tfrac{1}{2}(p_0' + p_0'')\sin w_{12} - \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}(p_0'\sin w_{12} + p_1'\sin w_{20} + p_2'\sin w_{01})\\ +(p_0''\sin w_{12} + p_1''\sin w_{20} + p_2''\sin w_{01})\end{array}\right\},$$

$$p_1 \sin w_{20}$$
$$= J + \tfrac{1}{2}(p_1' + p_1'')\sin w_{20} - \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}(p_0'\sin w_{12} + p_1'\sin w_{20} + p_2'\sin w_{01})\\ +(p_0''\sin w_{12} + p_1''\sin w_{20} + p_2''\sin w_{01})\end{array}\right\},$$

$$p_2 \sin w_{01}$$
$$= J + \tfrac{1}{2}(p_2' + p_2'')\sin w_{01} - \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}(p_0'\sin w_{12} + p_1'\sin w_{20} + p_2'\sin w_{01})\\ +(p_0''\sin w_{12} + p_1''\sin w_{20} + p_2''\sin w_{01})\end{array}\right\};$$

folglich offenbar:

$$p_0 = \tfrac{1}{2}(p_0' + p_0''),\quad p_1 = \tfrac{1}{2}(p_1' + p_1''),\quad p_2 = \tfrac{1}{2}(p_2' + p_2'').$$

Durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit dieser Ausdrücke; es kam aber hier darauf an, dieselben ganz allgemein analytisch zu beweisen, wie alle Formeln, auf die uns diese Untersuchungen führen werden.

§. 13.

Wir gehen jetzt zu der Bestimmung der von den beiden durch die Gleichungen

$$Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0,\quad L'p_0 + M'p_1 + N'p_2 = 0$$

charakterisirten Geraden eingeschlossenen Winkel über.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen einer jeden dieser beiden Geraden mit den positiven Theilen der x-Axe und y-Axe einschliesset, respective durch φ, ψ und φ', ψ'; so ist nach §. 7. 8) natürlich ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den

Formeln für $\cos\varphi$, $\cos\psi$ und $\cos\varphi'$, $\cos\psi'$, wohl aber mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den Formeln für $\cos\varphi$, $\cos\psi$ und eben so in den Formeln für $\cos\varphi'$, $\cos\psi'$ auf einander:

$$\cos\varphi = \pm \frac{L\cos\alpha_0 + M\cos\alpha_1 + N\cos\alpha_2}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}},$$

$$\cos\psi = \pm \frac{L\cos\beta_0 + M\cos\beta_1 + N\cos\beta_2}{\sqrt{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}};$$

und:

$$\cos\varphi'$$

$$= \pm \frac{L'\cos\alpha_0 + M'\cos\alpha_1 + N'\cos\alpha_2}{\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2+2L'M'\cos w_{01}+2M'N'\cos w_{12}+2N'L'\cos w_{20}}},$$

$$\cos\psi'$$

$$= \pm \frac{L'\cos\beta_0 + M'\cos\beta_1 + N'\cos\beta_2}{\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2+2L'M'\cos w_{01}+2M'N'\cos w_{12}+2N'L'\cos w_{20}}};$$

also:

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\psi\cos\psi'$$

$$= \pm \frac{\left\{\begin{array}{l}(L\cos\alpha_0+M\cos\alpha_1+N\cos\alpha_2)(L'\cos\alpha_0+M'\cos\alpha_1+N'\cos\alpha_2)\\ +(L\cos\beta_0+M\cos\beta_1+N\cos\beta_2)(L'\cos\beta_0+M'\cos\beta_1+N'\cos\beta_2)\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20})\\ \times(L'^2+M'^2+N'^2+2L'M'\cos w_{01}+2M'N'\cos w_{12}+2N'L'\cos w_{20})\end{array}}}.$$

Bezeichnen wir nun die von den beiden gegebenen Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel im Allgemeinen durch W, so ist bekanntlich:

$$\cos W = \pm(\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\psi\cos\psi'),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos W$$

$$= \pm \frac{\left\{\begin{array}{l}(L\cos\alpha_0+M\cos\alpha_1+N\cos\alpha_2)(L'\cos\alpha_0+M'\cos\alpha_1+N'\cos\alpha_2)\\ +(L\cos\beta_0+M\cos\beta_1+N\cos\beta_2)(L'\cos\beta_0+M'\cos\beta_1+N'\cos\beta_2)\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20})\\ \times(L'^2+M'^2+N'^2+2L'M'\cos w_{01}+2M'N'\cos w_{12}+2N'L'\cos w_{20})\end{array}}}.$$

Leicht ergiebt sich aber, dass

$$(L\cos\alpha_0+M\cos\alpha_1+N\cos\alpha_2)(L'\cos\alpha_0+M'\cos\alpha_1+N'\cos\alpha_2)$$
$$+(L\cos\beta_0+M\cos\beta_1+N\cos\beta_2)(L'\cos\beta_0+M'\cos\beta_1+N'\cos\beta_2)$$
$$=LL'(\cos\alpha_0{}^2+\cos\beta_0{}^2)+MM'(\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2)+NN'(\cos\alpha_2{}^2+\cos\beta_2{}^2)$$
$$+(LM'+ML')(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1)$$
$$+(MN'+NM')(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2)$$
$$+(NL'+LN')(\cos\alpha_2\cos\alpha_0+\cos\beta_2\cos\beta_0)$$
$$=LL'+MM'+NN'$$
$$+(LM'+ML')\cos w_{01}+(MN'+NM')\cos w_{12}+(NL'+LN')\cos w_{20}$$

ist; also ist:

$$\cos W$$
$$=\pm\frac{\left\{\begin{array}{c}LL'+MM'+NN'\\+(LM'+ML')\cos w_{01}+(MN'+NM')\cos w_{12}+(NL'+LN')\cos w_{20}\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{c}(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20})\\ \times(L'^2+M'^2+N'^2+2L'M'\cos w_{01}+2M'N'\cos w_{12}+2N'L'\cos w_{20})\end{array}}},$$

woraus sich auch zugleich ergiebt, dass

$$LL'+MM'+NN'$$
$$+(LM'+ML')\cos w_{01}+(MN'+NM')\cos w_{12}+(NL'+LN')\cos w_{20}$$
$$=0$$

die Bedingungsgleichung der Perpendicularität der beiden durch die Gleichungen:

$$Lp_0+Mp_1+Np_2=0,\quad L'p_0+M'p_1+N'p_2=0$$

charakterisirten Geraden ist. Man kann diese Gleichung auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{r}(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})L'\\+(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})M'\\+(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)N'\end{array}\right\}=0$$

§. 14.

Wir suchen jetzt die Gleichung der Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht, und bestimmen zugleich die Entfernung des gegebenen Punkts von der gegebenen Geraden.

Der gegebene Punkt sei $(p_0'p_1'p_2')$, die Gleichung der gegebenen Geraden sei

$$Lp_0+Mp_1+Np_2=0,$$

und die Gleichung der gesuchten Geraden sei

$$L'p_0+M'p_1+N'p_2=0;$$

so haben wir, weil der gegebene Punkt in der gesuchten Geraden liegen soll, und nach der im vorigen Paragraphen entwickelten Bedingungsgleichung der Perpendicularität zweier Geraden, zur Bestimmung von L', M', N' die folgenden Gleichungen:

$$p_0'L'+p_1'M'+p_2'N'=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})L'\\ +(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})M'\\ +(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)N'\end{array}\right\}=0;$$

aus denen sich, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet, sogleich:

$$L'=G'\left\{\begin{array}{l}p_1'(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)\\ -p_2'(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})\end{array}\right\},$$

$$M'=G'\left\{\begin{array}{l}p_2'(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})\\ -p_0'(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)\end{array}\right\},$$

$$N'=G'\left\{\begin{array}{l}p_0'(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})\\ -p_1'(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})\end{array}\right\}$$

ergiebt, wo es aber offenbar genügt,

$$L'=p_1'(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)-p_2'(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12}),$$
$$M'=p_2'(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})-p_0'(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N),$$
$$N'=p_0'(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})-p_1'(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})$$

zu setzen.

Hieraus findet man mittelst leichter Rechnung:

$$LM'-ML'$$
$$=p_2'(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos \text{[illegible]}\ 2NL\cos w_{20}$$
$$-(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')(L\cos w_{20}+M\cos \text{[illegible]}),$$

$$MN'-NM'$$
$$=p_0'(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}\ \text{[illegible]})$$
$$-(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')(L+M\cos w_{01}+N\cos \text{[illegible]}$$

$$NL'-LN'$$
$$=p_1'(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20})$$
$$-(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12});$$

also, weil bekanntlich

$$p_0'\sin w_{12}+p_1'\sin w_{20}+p_2'\sin w_{01}=J$$

ist:

$$(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}$$
$$=J(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20})$$
$$-(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')\left\{\begin{array}{l}(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})\sin w_{12}\\+(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})\sin w_{20}\\+(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)\sin w_{01}\end{array}\right\}$$
$$=J(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20})$$
$$-(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')\left\{\begin{array}{l}L[\sin w_{12}+\sin(w_{20}+w_{01})]\\+M[\sin w_{20}+\sin(w_{01}+w_{12})]\\+N[\sin w_{01}+\sin(w_{12}+w_{20})]\end{array}\right\},$$

und folglich nach §. 4. 7):

$$(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}$$
$$=J(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}).$$

Bezeichnen wir nun den Fusspunkt des von dem gegebenen Punkte $(p_0'p_1'p_2')$ auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels durch $(p_0p_1p_2)$, so ist hiernach und nach §. 10. offenbar:

$$p_0=p_0'-\frac{(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})}{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}},$$

$$p_1=p_1'-\frac{(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})}{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}},$$

$$p_2=p_2'-\frac{(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)}{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}.$$

Bezeichnen wir das von dem Punkte $(p_0'p_1'p_2')$ auf die gegebene Gerade gefällte Perpendikel durch P, so ist nach §. 11.:

$$P^2=-\left\{\frac{(p_0-p_0')^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{(p_1-p_1')^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{(p_2-p_2')^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right\}.$$

Führt man in diesen Ausdruck aus den vorhergehenden Formeln die Werthe von

$$(p_0-p_0')^2,\quad (p_1-p_1')^2,\quad (p_2-p_2')^2$$

ein, so ist in dem dreitheiligen Factor des dadurch sich ergebenden Ausdrucks der Factor von L^2:

$$\frac{\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{\cos w_{01}{}^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{\cos w_{20}{}^2\cos w_{01}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}$$

$$=\frac{\sin w_{12}\cos w_{12}+\cos w_{01}\cos w_{20}\sin(w_{20}+w_{01})}{\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}$$

$$=\frac{\sin w_{12}(\cos w_{12}-\cos w_{01}\cos w_{20})}{\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}$$

$$=\frac{\sin w_{12}\{\cos(w_{20}+w_{01})-\cos w_{01}\cos w_{20}\}}{\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}=-1,$$

und der Factor von $2LM$ ist:

$$\frac{\cos w_{01}\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}}+\frac{\cos w_{01}\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}}+\frac{\cos w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20}}{\sin w_{20}\sin w_{12}}$$

$$=\cos w_{01}\frac{\sin w_{12}\cos w_{12}+\sin w_{20}\cos w_{20}+\sin w_{01}\cos w_{12}\cos w_{20}}{\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}$$

$$=\cos w_{01}\frac{\sin w_{12}\cos w_{12}+\sin w_{20}\cos w_{20}-\sin(w_{12}+w_{20})\cos w_{12}\cos w_{20}}{\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}$$

$$=\cos w_{01}\frac{\sin w_{12}\sin w_{20}\sin(w_{12}+w_{20})}{\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}=-\cos w_{01}.$$

Auf diese Art findet man leicht, dass der in Rede stehende Factor

$$-(L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}),$$

und dass folglich

$$P^2=\frac{(Lp_0'+Mp_1'+Np_2')^2}{L^2+M^2+N^2+2LM\cos w_{01}+2MN\cos w_{12}+2NL\cos w_{20}}$$

ist.

§. 14.

Die Bedingungsgleichung, dass drei Punkte

$$(p_0'p_1'p_2'),\quad (p_0''p_1''p_2''),\quad (p_0'''p_1'''p_2''')$$

in einer geraden Linie liegen, findet man auf bekannte W[illegible] wenn man aus den drei Gleichungen

$\overline{\omega}_0 \cos\beta_2 - \overline{\omega}_2 \cos\beta_0$, $\overline{\omega}_2 \cos\alpha_0 - \overline{\omega}_0 \cos\alpha_2$, $\cos\alpha_2 \cos\beta_0 - \cos\beta_2 \cos$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha_1 (\overline{\omega}_0 \cos\beta_2 - \overline{\omega}_2 \cos\beta_0)\\
&+ \cos\beta_1 (\overline{\omega}_2 \cos\alpha_0 - \overline{\omega}_0 \cos\alpha_2)\\
&+ \overline{\omega}_1 (\cos\alpha_2 \cos\beta_0 - \cos\beta_2 \cos\alpha_0)\\
= \;&\overline{\omega}_0 (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_2)\\
&+ \overline{\omega}_1 (\cos\alpha_2 \cos\beta_0 - \cos\beta_2 \cos\alpha_0)\\
&+ \overline{\omega}_2 (\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1)\\
= \;&\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}
\end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned}
&M(\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01})\\
&= A(\overline{\omega}_0 \cos\beta_2 - \overline{\omega}_2 \cos\beta_0) + B(\overline{\omega}_2 \cos\alpha_0 - \overline{\omega}_0 \cos\alpha_2) + C \sin w_{2}
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die drei obigen Gleichungen nach der Reihe

$\overline{\omega}_1 \cos\beta_0 - \overline{\omega}_0 \cos\beta_1$, $\overline{\omega}_0 \cos\alpha_1 - \overline{\omega}_1 \cos\alpha_0$, $\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha_2 (\overline{\omega}_1 \cos\beta_0 - \overline{\omega}_0 \cos\beta_1)\\
&+ \cos\beta_2 (\overline{\omega}_0 \cos\alpha_1 - \overline{\omega}_1 \cos\alpha_0)\\
&+ \overline{\omega}_2 (\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1)\\
= \;&\overline{\omega}_0 (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_2)\\
&+ \overline{\omega}_1 (\cos\alpha_2 \cos\beta_0 - \cos\beta_2 \cos\alpha_0)\\
&+ \overline{\omega}_2 (\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1)\\
= \;&\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}
\end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned}
&N(\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01})\\
&= A(\overline{\omega}_1 \cos\beta_0 - \overline{\omega}_0 \cos\beta_1) + B(\overline{\omega}_0 \cos\alpha_1 - \overline{\omega}_1 \cos\alpha_0) + C \sin w_{01}.
\end{aligned}$$

Also ist:

3)

$$L = \frac{A(\overline{\omega}_2 \cos\beta_1 - \overline{\omega}_1 \cos\beta_2) + B(\overline{\omega}_1 \cos\alpha_2 - \overline{\omega}_2 \cos\alpha_1) + C \sin w_{1}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}}$$

$$M = \frac{A(\overline{\omega}_0 \cos\beta_2 - \overline{\omega}_2 \cos\beta_0) + B(\overline{\omega}_2 \cos\alpha_0 - \overline{\omega}_0 \cos\alpha_2) + C \sin w_{2}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin \overline{\omega}_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}}$$

$$N = \frac{A(\overline{\omega}_1 \cos\beta_0 - \overline{\omega}_0 \cos\beta_1) + B(\overline{\omega}_0 \cos\alpha_1 - \overline{\omega}_1 \cos\alpha_0) + C \sin w_{0}}{\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01}}$$

$$P_0'=p_1''p_2'''-p_2''p_1''',\quad P_0''=p_1'''p_2'-p_2'''p_1',\quad P_0'''=p_1'p_2''-p_2'p_1'',$$
$$P_1'=p_2''p_0'''-p_0''p_2''',\quad P_1''=p_2'''p_0'-p_0'''p_2',\quad P_1'''=p_2'p_0''-p_0'p_2'',$$
$$P_2'=p_0''p_1'''-p_1''p_0''';\quad P_2''=p_0'''p_1'-p_1'''p_0';\quad P_2'''=p_0'p_1''-p_1'p_0'''$$

und:

$$Q_0'=P_0'+P_1'\cos w_{01}+P_2'\cos w_{20},$$
$$Q_1'=P_0'\cos w_{01}+P_1'+P_2'\cos w_{12},$$
$$Q_2'=P_0'\cos w_{20}+P_1'\cos w_{12}+P_2';$$

$$Q_0''=P_0''+P_1''\cos w_{01}+P_2''\cos w_{20},$$
$$Q_1''=P_0''\cos w_{01}+P_1''+P_2''\cos w_{12},$$
$$Q_2''=P_0''\cos w_{20}+P_1''\cos w_{12}+P_2'';$$

$$Q_0'''=P_0'''+P_1'''\cos w_{01}+P_2'''\cos w_{20},$$
$$Q_1'''=P_0'''\cos w_{01}+P_1'''+P_2'''\cos w_{12},$$
$$Q_2'''=P_0'''\cos w_{20}+P_1'''\cos w_{12}+P_2''';$$

dann sind nach §. 6. und §. 14. die Gleichungen der von den Ecken

$$(p_0'p_1'p_2'),\quad (p_0''p_1''p_2''),\quad (p_0'''p_1'''p_2''')$$

des Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel respective:

1)

$$(p_1'Q_2'-p_2'Q_1')p_0+(p_2'Q_0'-p_0'Q_2')p_1+(p_0'Q_1'-p_1'Q_0')p_2=0,$$
$$(p_1''Q_2''-p_2''Q_1'')p_0+(p_2''Q_0''-p_0''Q_2'')p_1+(p_0''Q_1''-p_1''Q_0'')p_2=0,$$
$$(p_1'''Q_2'''-p_2'''Q_1''')p_0+(p_2'''Q_0'''-p_0'''Q_2''')p_1+(p_0'''Q_1'''-p_1'''Q_0''')p_2$$
$$=0.$$

Zwischen den Grössen

$$P_0',\ P_1',\ P_2';\quad P_0'',\ P_1'',\ P_2'';\quad P_0''',\ P_1''',\ P_2'''$$

und

$$Q_0',\ Q_1',\ Q_2';\quad Q_0'',\ Q_1'',\ Q_2'';\quad Q_0''',\ Q_1''',\ Q_2'''$$

finden gewisse leicht zu beweisende Relationen Statt, welche wir im Folgenden zusammenstellen wollen.

Der Kürze wegen setzen wir:

$$\Pi=p_0'(p_1''p_2'''-p_2''p_1''')+p_0''(p_1'''p_2'-p_2'''p_1')+p_0'''(p_1'p_2''-p_2'p_1'')$$
$$=p_1'(p_2''p_0'''-p_0''p_2''')+p_1''(p_2'''p_0'-p_0'''p_2')+p_1'''(p_2'p_0''-p_0'p_2'')$$
$$=p_2'(p_0''p_1'''-p_1''p_0''')+p_2''(p_0'''p_1'-p_1'''p_0')+p_2'''(p\ [illegible]\ '''),$$

dann ist, wie man leicht findet:

$$p_0'P_0'+p_0''P_0''+p_0'''P_0'''=\Pi,$$
$$p_1'P_0'+p_1''P_0''+p_1'''P_0'''=0,$$
$$p_2'P_0'+p_2''P_0''+p_2'''P_0'''=0;$$

$$p_0'P_1'+p_0''P_1''+p_0'''P_1'''=0,$$
$$p_1'P_1'+p_1''P_1''+p_1'''P_1'''=\Pi,$$
$$p_2'P_1'+p_2''P_1''+p_2'''P_1'''=0;$$

$$p_0'P_2'+p_0''P_2''+p_0'''P_2'''=0,$$
$$p_1'P_2'+p_1''P_2''+p_1'''P_2'''=0,$$
$$p_2'P_2'+p_2''P_2''+p_2'''P_2'''=\Pi;$$

woraus sich ferner leicht ergiebt:

$$p_0'Q_0'+p_0''Q_0''+p_0'''Q_0'''=\Pi,$$
$$p_1'Q_0'+p_1''Q_0''+p_1'''Q_0'''=\Pi\cos w_{01},$$
$$p_2'Q_0'+p_2''Q_0''+p_2'''Q_0'''=\Pi\cos w_{20};$$

$$p_0'Q_1'+p_0''Q_1''+p_0'''Q_1'''=\Pi\cos w_{01},$$
$$p_1'Q_1'+p_1''Q_1''+p_1'''Q_1'''=\Pi,$$
$$p_2'Q_1'+p_2''Q_1''+p_2'''Q_1'''=\Pi\cos w_{12};$$

$$p_0'Q_2'+p_0''Q_2''+p_0'''Q_2'''=\Pi\cos w_{20},$$
$$p_1'Q_2'+p_1''Q_2''+p_1'''Q_2'''=\Pi\cos w_{12},$$
$$p_2'Q_2'+p_2''Q_2''+p_2'''Q_2'''=\Pi.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass die Summe der drei Gleichungen 1) verschwindet, so dass also, wenn durch gewisse Werthe von p_0, p_1, p_2 zwei dieser Gleichungen erfüllt werden, durch dieselben Werthe von p_0, p_1, p_2 immer auch die dritte Gleichung erfüllt wird. Bestimmt man daher mittelst der Gleichung

$$p_0\sin w_{12}+p_1\sin w_{20}+p_2\sin w_{01}=J$$

und zweier der Gleichungen 1) die Grössen p_0, p_1, p_2, so wird durch die erhaltenen Werthe dieser Grössen immer auch die dritte der Gleichungen 1) erfüllt, woraus sich ergiebt, dass die durch die Gleichungen 1) charakterisirten Geraden, also die von den Spitzen oder Ecken des Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten desselben gefällten Perpendikel, sich immer in einem und demselben Punkte schneiden.

Um nun die Coordinaten p_0, p_1, p_2 des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei in Rede stehenden Perpendikel, nämlich der drei Höhen des Dreiecks, selbst zu bestimmen, müssen wir von der folgenden allgemeinen Betrachtung über drei Gleichungen des ersten Grades von der Form:

$$a_0x+b_0y+c_0z=0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$

ausgehen. Bekanntlich ist in einem solchen Falle immer, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$x=G(b_0c_1-c_0b_1),$$
$$y=G(c_0a_1-a_0c_1),$$
$$z=G(a_0b_1-b_0a_1);$$

wobei die beiden ersten Gleichungen des obigen Systems dreier Gleichungen benutzt worden sind. Finden nun aber die Gleichungen

$$a_0+a_1+a_2=0,\quad b_0+b_1+b_2=0,\quad c_0+c_1+c_2=0$$

Statt, so ist:

$$a_0=-(a_1+a_2),\quad b_0=-(b_1+b_2),\quad c_0=-(c_1+c_2)$$

und

$$a_1=-(a_2+a_0),\quad b_1=-(b_2+b_0),\quad c_1=-(c_2+c_0);$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$b_0c_1-c_0b_1=b_1c_2-c_1b_2=b_2c_0-c_2b_0,$$
$$c_0a_1-a_0c_1=c_1a_2-a_1c_2=c_2a_0-a_2c_0,$$
$$a_0b_1-b_0a_1=a_1b_2-b_1a_2=a_2b_0-b_2a_0;$$

und folglich nach dem Obigen:

$$x=G(b_0c_1-c_0b_1)=G(b_1c_2-c_1b_2)=G(b_2c_0-c_2b_0),$$
$$y=G(c_0a_1-a_0c_1)=G(c_1a_2-a_1c_2)=G(c_2a_0-a_2c_0),$$
$$z=G(a_0b_1-b_0a_1)=G(a_1b_2-b_1a_2)=G(a_2b_0-$$ [illegible]

wo G immer denselben Factor bezeichnet.

Dass bei den Gleichungen 1) die hier gemachte Voraus[illegible] erfüllt ist, braucht nach dem Obigen kaum noch beson[illegible]

merkt zu werden, und wir können also auf diese Gleichungen die vorhergehenden allgemeinen Formeln anwenden.

Zuvörderst hat man sich aber noch die folgenden leicht zu beweisenden Relationen zu merken:

$$\begin{aligned}
p_0'P_0' + p_1'P_1' + p_2'P_2' &= \Pi,\\
p_0''P_0' + p_1''P_1' + p_2''P_2' &= 0,\\
p_0'''P_0' + p_1'''P_1' + p_2'''P_2' &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_0'P_0'' + p_1'P_1'' + p_2'P_2'' &= 0,\\
p_0''P_0'' + p_1''P_1'' + p_2''P_2'' &= \Pi,\\
p_0'''P_0'' + p_1'''P_1'' + p_2'''P_2'' &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_0'P_0''' + p_1'P_1''' + p_2'P_2''' &= 0,\\
p_0''P_0''' + p_1''P_1''' + p_2''P_2''' &= 0,\\
p_0'''P_0''' + p_1'''P_1''' + p_2'''P_2''' &= \Pi.
\end{aligned}$$

Nach den Gleichungen 1) und dem Vorhergehenden ist:

$$\begin{aligned}
p_0 = G\{&(p_2''Q_0'' - p_0''Q_2'')(p_0'''Q_1''' - p_1'''Q_0''')\\
&- (p_0''Q_1'' - p_1''Q_0'')(p_2'''Q_0''' - p_0'''Q_2''')\},\\
p_1 = G\{&(p_0''Q_1'' - p_1''Q_0'')(p_1'''Q_2''' - p_2'''Q_1''')\\
&- (p_1''Q_2'' - p_2''Q_1'')(p_0'''Q_1''' - p_1'''Q_0''')\},\\
p_2 = G\{&(p_1''Q_2'' - p_2''Q_1'')(p_2'''Q_0''' - p_0'''Q_2''')\\
&- (p_2''Q_0'' - p_0''Q_2'')(p_1'''Q_2''' - p_2'''Q_1''')\};
\end{aligned}$$

und folglich, wie man leicht übersieht:

$$\begin{aligned}
&G^{-1}(P_0'p_0 + P_1'p_1 + P_2'p_2)\\
= &\{(P_0'Q_0''+P_1'Q_1''+P_2'Q_2'')p_2''-(p_0''P_0'+p_1''P_1'+p_2''P_2')Q_2''\}\\
&\qquad\times(p_0'''Q_1''' - p_1'''Q_0''')\\
+&\{(P_0'Q_0''+P_1'Q_1''+P_2'Q_2'')p_0''-(p_0''P_0'+p_1''P_1'+p_2''P_2')Q_0''\}\\
&\qquad\times(p_1'''Q_2''' - p_2'''Q_1''')\\
+&\{(P_0'Q_0''+P_1'Q_1''+P_2'Q_2'')p_1''-(p_0''P_0'+p_1''P_1'+p_2''P_2')Q_1''\}\\
&\qquad\times(p_2'''Q_0''' - p_0'''Q_2'''),
\end{aligned}$$

also offenbar:

$$\begin{aligned}
&P_0'p_0 + P_1'p_1 + P_2'p_2\\
&= G(P_0'Q_0'' + P_1'Q_1'' + P_2'Q_2'')(P_0'Q_0''' + P_1'Q_1''' + P_2'Q_2''').
\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$p_0 = G\{(p_2'''Q_0''' - p_0'''Q_2''')(p_0'Q_1' - p_1'Q_0') \\ - (p_0'''Q_1''' - p_1'''Q_0''')(p_2'Q_0' - p_0'Q_2')\},$$

$$p_1 = G\{(p_0'''Q_1''' - p_1'''Q_0''')(p_1'Q_2' - p_2'Q_1') \\ - (p_1'''Q_2''' - p_2'''Q_1''')(p_0'Q_1' - p_1'Q_0')\},$$

$$p_2 = G\{(p_1'''Q_2''' - p_2'''Q_1''')(p_2'Q_0' - p_0'Q_2') \\ - (p_2'''Q_0''' - p_0'''Q_2''')(p_1'Q_2' - p_2'Q_1')\};$$

folglich, wie leicht erhellet:

$$G^{-1}(P_0''p_0 + P_1''p_1 + P_2''p_2)$$

$$= \{(P_0''Q_0''' + P_1''Q_1''' + P_2''Q_2''')p_2''' \\ - (p_0'''P_0'' + p_1'''P_1'' + p_2'''P_2'')Q_2'''\}(p_0'Q_1' - p_1'Q_0')$$

$$+ \{(P_0''Q_0''' + P_1''Q_1''' + P_2''Q_2''')p_0''' \\ - (p_0'''P_0'' + p_1'''P_1'' + p_2'''P_2'')Q_0'''\}(p_1'Q_2' - p_2'Q_1')$$

$$+ \{(P_0''Q_0''' + P_1''Q_1''' + P_2''Q_2''')p_1''' \\ - (p_0'''P_0'' + p_1'''P_1'' + p_2'''P_2'')Q_1'''\}(p_2'Q_0' - p_0'Q_2'),$$

also offenbar:

$$P_0''p_0 + P_1''p_1 + P_2''p_2$$

$$= G(P_0''Q_0''' + P_1''Q_1''' + P_2''Q_2''')(P_0''Q_0' + P_1''Q_1' + P_2''Q_2').$$

Endlich ist:

$$p_0 = G\{(p_2'Q_0' - p_0'Q_2')(p_0''Q_1'' - p_1''Q_0'') \\ - (p_0'Q_1' - p_1'Q_0')(p_2''Q_0'' - p_0''Q_2'')\},$$

$$p_1 = G\{(p_0'Q_1' - p_1'Q_0')(p_1''Q_2'' - p_2''Q_1'') \\ - (p_1'Q_2' - p_2'Q_1')(p_0''Q_1'' - p_1''Q_0'')\},$$

$$p_2 = G\{(p_1'Q_2' - p_2'Q_1')(p_2''Q_0'' - p_0''Q_2'') \\ - (p_2'Q_0' - p_0'Q_2')(p_1''Q_2'' - p_2''Q_1'')\};$$

folglich offenbar:

$$G^{-1}(P_0'''p_0 + P_1'''p_1 + P_2'''p_2)$$

$$= \{(P_0'''Q_0' + P_1'''Q_1' + P_2'''Q_2')p_2' \\ - (p_0'P_0''' + p_1'P_1''' + p_2'P_2''')Q_2'\}(p_0''Q_1'' - p_1''Q_0'')$$

$$+ \{(P_0'''Q_0' + P_1'''Q_1' + P_2'''Q_2')p_0' \\ - (p_0'P_0''' + p_1'P_1''' + p_2'P_2''')Q_0'\}(p_1''Q_2'' - p_2''Q_1'')$$

$$+ \{(P_0'''Q_0' + P_1'''Q_1' + P_2'''Q_2')p_1' \\ - (p_0'P_0''' + p_1'P_1''' + p_2'P_2''')Q_1'\}(p_2''Q_0'' -$$

also:

$$P_0'''p_0+P_1'''p_1+P_2'''p_2$$
$$=G(P_0'''Q_0'+P_1'''Q_1'+P_2'''Q_2')(P_0'''Q_0''+P_1'''Q_1''+P_2'''Q_2'').$$

Daher haben wir jetzt die drei folgenden merkwürdigen Gleichungen:

2)

$$P_0'p_0+P_1'p_1+P_2'p_2$$
$$=G(P_0'Q_0''+P_1'Q_1''+P_2'Q_2'')(P_0'Q_0'''+P_1'Q_1'''+P_2'Q_2''').$$
$$P_0''p_0+P_1''p_1+P_2''p_2$$
$$=G(P_0''Q_0'''+P_1''Q_1'''+P_2''Q_2''')(P_0''Q_0'+P_1''Q_1'+P_2''Q_2'),$$
$$P_0'''p_0+P_1'''p_1+P_2'''p_2$$
$$=G(P_0'''Q_0'+P_1'''Q_1'+P_2'''Q_2')(P_0'''Q_0''+P_1'''Q_1''+P_2'''Q_2'').$$

Man setze der Kürze wegen:

3)

$$A_{12}=P_0'Q_0''+P_1'Q_1''+P_2'Q_2'',\quad A_{21}=P_0''Q_0'+P_1''Q_1'+P_2''Q_2';$$
$$A_{23}=P_0''Q_0'''+P_1''Q_1'''+P_2''Q_2''',\quad A_{32}=P_0'''Q_0''+P_1'''Q_1''+P_2'''Q_2'';$$
$$A_{31}=P_0'''Q_0'+P_1'''Q_1'+P_2'''Q_2',\quad A_{13}=P_0'Q_0'''+P_1'Q_1'''+P_2'Q_2''';$$

so ist:

$$4)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} P_0'p_0+P_1'p_1+P_2'p_2=GA_{12}A_{13},\\ P_0''p_0+P_1''p_1+P_2''p_2=GA_{23}A_{21},\\ P_0'''p_0+P_1'''p_1+P_2'''p_2=GA_{31}A_{32}; \end{array}\right.$$

und folglich, wenn noch

$$5)\qquad B_1=A_{12}A_{13},\quad B_2=A_{23}A_{21},\quad B_3=A_{31}A_{32}$$

und

6)

$$N=P_0'(P_1''P_2'''-P_2''P_1''')+P_0''(P_1'''P_2'-P_2'''P_1')$$
$$+P_0'''(P_1'P_2''-P_2'P_1'')$$
$$=P_1'(P_2''P_0'''-P_0''P_2''')+P_1''(P_2'''P_0'-P_0'''P_2')$$
$$+P_1'''(P_2'P_0''-P_0'P_2'')$$
$$=P_2'(P_0''P_1'''-P_1''P_0''')+P_2''(P_0'''P_1'-P_1'''P_0')$$
$$+P_2'''(P_0'P_1''-P_1'P_0'')$$

gesetzt wird:

7)

$$p_0 = G\frac{B_1(P_1''P_2'''-P_2''P_1''')+B_2(P_1'''P_2'-P_2'''P_1')+B_3(P_1'P_2''-P_2'P_1'')}{N},$$

$$p_1 = G\frac{B_1(P_2''P_0'''-P_0''P_2''')+B_2(P_2'''P_0'-P_0'''P_2')+B_3(P_2'P_0''-P_0'P_2'')}{N},$$

$$p_2 = G\frac{B_1(P_0''P_1'''-P_1''P_0''')+B_2(P_0'''P_1'-P_1'''P_0')+B_3(P_0'P_1''-P_1'P_0'')}{N}.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber:

$$P_1''P_2'''-P_2''P_1'''=p_0'\Pi,$$
$$P_1'''P_2'-P_2'''P_1'=p_0''\Pi,$$
$$P_1'P_2''-P_2'P_1''=p_0'''\Pi;$$

$$P_2''P_0'''-P_0''P_2'''=p_1'\Pi,$$
$$P_2'''P_0'-P_0'''P_2'=p_1''\Pi,$$
$$P_2'P_0''-P_0'P_2''=p_1'''\Pi;$$

$$P_0''P_1'''-P_1''P_0'''=p_2'\Pi,$$
$$P_0'''P_1'-P_1'''P_0'=p_2''\Pi,$$
$$P_0'P_1''-P_1'P_0''=p_2'''\Pi;$$

also nach 7):

$$8) \quad \left\{\begin{array}{l} p_0=\frac{G\Pi}{N}(B_1p_0'+B_2p_0''+B_3p_0'''),\\ p_1=\frac{G\Pi}{N}(B_1p_1'+B_2p_1''+B_3p_1'''),\\ p_2=\frac{G\Pi}{N}(B_1p_2'+B_2p_2''+B_3p_2'''); \end{array}\right.$$

und weil nun bekanntlich

$$p_0\sin w_{12}+p_1\sin w_{20}+p_2\sin w_{01}=J$$

und

$$p_0'\sin w_{12}+p_1'\sin w_{20}+p_2'\sin w_{01}=J,$$
$$p_0''\sin w_{12}+p_1''\sin w_{20}+p_2''\sin w_{01}=J,$$
$$p_0'''\sin w_{12}+p_1'''\sin w_{20}+p_2'''\sin w_{01}=J$$

ist, so ist nach 8):

$$1=\frac{G\Pi}{N}(B_1+B_2+B_3),$$

also

$$\frac{G\Pi}{N}=\frac{1}{B_1+B_2+B_3},$$

und folglich nach 8):

$$9)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} p_0=\dfrac{B_1p_0'+B_2p_0''+B_3p_0'''}{B_1+B_2+B_3}, \\[2ex] p_1=\dfrac{B_1p_1'+B_2p_1''+B_3p_1'''}{B_1+B_2+B_3}, \\[2ex] p_2=\dfrac{B_1p_2'+B_2p_2''+B_3p_2'''}{B_1+B_2+B_3}; \end{cases}$$

oder nach dem Obigen:

$$10)\ \ldots\ \begin{cases} p_0=\dfrac{A_{12}A_{13}p_0'+A_{23}A_{21}p_0''+A_{31}A_{32}p_0'''}{A_{12}A_{13}+A_{23}A_{21}+A_{31}A_{32}}, \\[2ex] p_1=\dfrac{A_{12}A_{13}p_1'+A_{23}A_{21}p_1''+A_{31}A_{32}p_1'''}{A_{12}A_{13}+A_{23}A_{21}+A_{31}A_{32}}, \\[2ex] p_2=\dfrac{A_{12}A_{13}p_2'+A_{23}A_{21}p_2''+A_{31}A_{32}p_2'''}{A_{12}A_{13}+A_{23}A_{21}+A_{31}A_{32}}. \end{cases}$$

Für die Grössen

$$A_{12},\ A_{21};\quad A_{23},\ A_{32};\quad A_{31},\ A_{13}$$

findet man nach dem Obigen auch leicht die folgenden Ausdrücke.

11)

$$\begin{aligned} A_{12}= &\ P_0'P_0''+P_1'P_1''+P_2'P_2''+(P_0'P_1''+P_1'P_0'')\cos w_{01} \\ &+(P_1'P_2''+P_2'P_1'')\cos w_{12}+(P_2'P_0''+P_1'P_2'')\cos w_{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}= &\ P_0'P_0''+P_1'P_1''+P_2'P_2''+(P_0'P_1''+P_1'P_0'')\cos w_{01} \\ &+(P_1'P_2''+P_2'P_1'')\cos w_{12}+(P_2'P_0''+P_0'P_2'')\cos w_{20}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{23}= &\ P_0''P_0'''+P_1''P_1'''+P_2''P_2'''+(P_0''P_1'''+P_1''P_0''')\cos w_{01} \\ &+(P_1''P_2'''+P_2''P_1''')\cos w_{12}+(P_2''P_0'''+P_0''P_2''')\cos w_{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{32}= &\ P_0''P_0'''+P_1''P_1'''+P_2''P_2'''+(P_0''P_1'''+P_1''P_0''')\cos w_{01} \\ &+(P_1''P_2'''+P_2''P_1''')\cos w_{12}+(P_2''P_0'''+P_0''P_2''')\cos w_{20}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31}= &\ P_0'''P_0'+P_1'''P_1'+P_2'''P_2'+(P_0'''P_1'+P_1'''P_0')\cos w_{01} \\ &+(P_1'''P_2'+P_2'''P_1')\cos w_{12}+(P_2'''P_0'+P_0'''P_2')\cos w_{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13}= &\ P_0'''P_0'+P_1'''P_1'+P_2'''P_2'+(P_0'''P_1'+P_1'''P_0')\cos w_{01} \\ &+(P_1'''P_2'+P_2'''P_1')\cos w_{12}+(P_2'''P_0'+P_0'''P_2')\cos w_{20}; \end{aligned}$$

woraus also auch erhellet, dass immer:

$$12) \quad . \quad . \quad . \quad A_{12}=A_{21}, \quad A_{23}=A_{32}, \quad A_{31}=A_{13}$$

ist.

Die drei unser Dreieck bildenden Geraden wollen wir jetzt selbst als Axen annehmen und die den Ecken oder Spitzen

$$(p_0'''p_1'''p_2'''), \quad (p_0'p_1'p_2'), \quad (p_0''p_1''p_2'')$$

gegenüberstehenden Seiten des Dreiecks respective durch a_0, a_1, a_2 bezeichnen; die erste, zweite, dritte Axe sollen beziehungsweise den Seiten a_0, a_1, a_2 entsprechen. Bestimmen wir nun über die positiven Richtungen der drei Axen so, wie aus Fig. 10. von selbst ersichtlich ist, und nehmen, wie es offenbar verstattet ist, die Winkel w_{01}, w_{12}, w_{20} sämmtlich positiv; so ist, wie man sich aus Fig. 10. auf der Stelle überzeugt:

$$p_0' = 0, \quad p_1' = a_2 \sin w_{12} = a_0 \sin w_{01}, \quad p_2' = 0;$$

$$p_0'' = 0, \quad p_1'' = 0, \quad p_2'' = a_0 \sin w_{20} = a_1 \sin w_{12};$$

$$p_0''' = a_1 \sin w_{01} = a_2 \sin w_{20}, \quad p_1''' = 0, \quad p_2''' = 0;$$

also nach dem Obigen:

$$P_0' = 0, \quad P_1' = a_1^2 \sin w_{01} \sin w_{12}, \quad P_2' = 0;$$

$$P_0'' = 0, \quad P_1'' = 0, \quad P_2'' = a_2^2 \sin w_{12} \sin w_{20};$$

$$P_0''' = a_0^2 \sin w_{20} \sin w_{01}, \quad P_1''' = 0, \quad P_2''' = 0;$$

ferner:

$$Q_0' = a_1^2 \sin w_{01} \cos w_{01} \sin w_{12},$$
$$Q_1' = a_1^2 \sin w_{01} \sin w_{12},$$
$$Q_2' = a_1^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \cos w_{12};$$

$$Q_0'' = a_2^2 \sin w_{12} \sin w_{20} \cos w_{20},$$
$$Q_1'' = a_2^2 \sin w_{12} \cos w_{12} \sin w_{20},$$
$$Q_2'' = a_2^2 \sin w_{12} \cos w_{20};$$

$$Q_0''' = a_0^2 \sin w_{20} \sin w_{01},$$
$$Q_1''' = a_0^2 \sin w_{20} \sin w_{01} \cos w_{01},$$
$$Q_2''' = a_0^2 \sin w_{20} \cos w_{20} \sin w_{01};$$

folglich:

$$A_{12} = A_{21} = a_1{}^2 a_2{}^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} . \sin w_{12} \cos w_{12},$$

$$A_{23} = A_{32} = a_2{}^2 a_0{}^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} . \sin w_{20} \cos w_{20},$$

$$A_{31} = A_{13} = a_0{}^2 a_1{}^2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20} . \sin w_{01} \cos w_{01}$$

und hieraus:

$$A_{12} A_{13} + A_{23} A_{21} + A_{31} A_{32}$$

$$= (\tfrac{1}{2} a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 \left\{ \begin{array}{l} a_0{}^2 \sin 2w_{20} \sin 2w_{01} \\ + a_1{}^2 \sin 2w_{01} \sin 2w_{12} \\ + a_2{}^2 \sin 2w_{12} \sin 2w_{20} \end{array} \right\}.$$

Ferner ist:

$$A_{12} A_{13} p_0' + A_{23} A_{21} p_0'' + A_{31} A_{32} p_0''' = A_{31} A_{32} p_0'''$$

$$= (\tfrac{1}{2} a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 . a_0{}^2 \sin 2w_{20} \sin 2w_{01} . \left\{ \begin{array}{l} a_1 \sin w_{01} \\ a_2 \sin w_{20} \end{array} \right.,$$

$$A_{12} A_{13} p_1' + A_{23} A_{21} p_1'' + A_{31} A_{32} p_1''' = A_{12} A_{13} p_1'$$

$$= (\tfrac{1}{2} a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 . a_1{}^2 \sin 2w_{01} \sin 2w_{12} . \left\{ \begin{array}{l} a_2 \sin w_{12} \\ a_0 \sin w_{01} \end{array} \right.,$$

$$A_{12} A_{13} p_2' + A_{23} A_{21} p_2'' + A_{31} A_{32} p_2''' = A_{23} A_{21} p_2''$$

$$= (\tfrac{1}{2} a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 . a_2{}^2 \sin 2w_{12} \sin 2w_{20} . \left\{ \begin{array}{l} a_0 \sin w_{20} \\ a_1 \sin w_{12} \end{array} \right. .$$

Also ist nach 10):

13)

$$p_0 = \frac{a_0{}^2 \sin 2w_{20} \sin 2w_{01} . \left\{ \begin{array}{l} a_1 \sin w_{01} \\ a_2 \sin w_{20} \end{array} \right.}{a_0{}^2 \sin 2w_{20} \sin 2w_{01} + a_1{}^2 \sin 2w_{01} \sin 2w_{12} + a_2{}^2 \sin 2w_{12} \sin 2w_{20}},$$

$$p_1 = \frac{a_1{}^2 \sin 2w_{01} \sin 2w_{12} . \left\{ \begin{array}{l} a_2 \sin w_{12} \\ a_0 \sin w_{01} \end{array} \right.}{a_0{}^2 \sin 2w_{20} \sin 2w_{01} + a_1{}^2 \sin 2w_{01} \sin 2w_{12} + a_2{}^2 \sin 2w_{12} \sin 2w_{20}},$$

$$p_2 = \frac{a_2{}^2 \sin 2w_{12} \sin 2w_{20} . \left\{ \begin{array}{l} a_0 \sin w_{20} \\ a_1 \sin w_{12} \end{array} \right.}{a_0{}^2 \sin 2w_{20} \sin 2w_{01} + a_1{}^2 \sin 2w_{01} \sin 2w_{12} + a_2{}^2 \sin 2w_{12} \sin 2w_{20}}.$$

Durch eine einfache Betrachtung wird man bei dem gleichseitigen und rechtwinkligen Dreieck die Richtigkeit dieser Formeln sogleich bestätigt finden.

Nach dem Obigen ist aber auch:

$$P_0' = 0, \quad P_1' = a_2 a_0 \sin w_{20}^2, \quad P_2' = 0;$$

$$P_0'' = 0, \quad P_1'' = 0, \quad P_2'' = a_0 a_1 \sin w_{01}^2;$$

$$P_0''' = a_1 a_2 \sin w_{12}^2, \quad P_1''' = 0, \quad P_2''' = 0;$$

also:

$$\begin{aligned} Q_0' &= a_2 a_0 \sin w_{20}^2 \cos w_{01}, \\ Q_1' &= a_2 a_0 \sin w_{20}^2, \\ Q_2' &= a_2 a_0 \sin w_{20}^2 \cos w_{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0'' &= a_0 a_1 \sin w_{01}^2 \cos w_{20}, \\ Q_1'' &= a_0 a_1 \sin w_{01}^2 \cos w_{12}, \\ Q_2'' &= a_0 a_1 \sin w_{01}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0''' &= a_1 a_2 \sin w_{12}^2, \\ Q_1''' &= a_1 a_2 \sin w_{12}^2 \cos w_{01}, \\ Q_2''' &= a_1 a_2 \sin w_{12}^2 \cos w_{20}; \end{aligned}$$

und folglich:

$$A_{12} = A_{21} = a_0 a_1 a_2 \sin w_{20}^2 \sin w_{01}^2 . a_0 \cos w_{12},$$

$$A_{23} = A_{32} = a_0 a_1 a_2 \sin w_{01}^2 \sin w_{12}^2 . a_1 \cos w_{20},$$

$$A_{31} = A_{13} = a_0 a_1 a_2 \sin w_{12}^2 \sin w_{20}^2 . a_2 \cos w_{01};$$

also:

$$A_{12} A_{13} + A_{23} A_{21} + A_{31} A_{32}$$

$$= (a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 \left\{ \begin{array}{l} a_0 a_1 \sin w_{01}^2 \cos w_{12} \cos w_{20} \\ + a_1 a_2 \sin w_{12}^2 \cos w_{20} \cos w_{01} \\ + a_2 a_0 \sin w_{20}^2 \cos w_{01} \cos w_{12} \end{array} \right\}$$

und

$$A_{12} A_{13} p_0' + A_{23} A_{21} p_0'' + A_{31} A_{32} p_0''' = A_{31} A_{32} p_0'''$$

$$= (a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 . a_1 a_2 \sin w_{12}^2 \cos w_{20} \cos w_{01} . \left\{ \begin{array}{l} a_1 \sin w_{01} \\ a_2 \sin w_{20} \end{array} \right.,$$

$$A_{12} A_{13} p_1' + A_{23} A_{21} p_1'' + A_{31} A_{32} p_1''' = A_{12} A_{13} p_1'$$

$$= (a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 . a_2 a_0 \sin w_{20}^2 \cos w_{01} \cos w_{12} . \left\{ \begin{array}{l} \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{array} \right.$$

$$A_{12} A_{13} p_2' + A_{23} A_{21} p_2'' + A_{31} A_{32} p_2''' = A_{23} A_{21} p_2''$$

$$= (a_0 a_1 a_2 \sin w_{01} \sin w_{12} \sin w_{20})^2 . a_0 a_1 \sin w_{01}^2 \cos w_{12} \text{[illegible]} \left\{ \begin{array}{l} a_0 \sin \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \sin w_{12} \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir nun die den Seiten a_0, a_1, a_2 entsprechenden Höhen des Dreiecks durch h_0, h_1, h_2, so ist:

$$h_0 = p_0''' = a_1 \sin w_{01} = a_2 \sin w_{20},$$
$$h_1 = p_1' = a_2 \sin w_{12} = a_0 \sin w_{01},$$
$$h_2 = p_2'' = a_0 \sin w_{20} = a_1 \sin w_{12};$$

also offenbar nach dem Vorhergehenden:

14)

$$p_0 = \frac{h_0 h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01}}{h_0 h_1 \cos w_{12} \cos w_{20} + h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01} + h_2 h_0 \cos w_{01} \cos w_{12}},$$

$$p_1 = \frac{h_0 h_1 h_2 \cos w_{01} \cos w_{12}}{h_0 h_1 \cos w_{12} \cos w_{20} + h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01} + h_2 h_0 \cos w_{01} \cos w_{12}},$$

$$p_2 = \frac{h_0 h_1 h_2 \cos w_{12} \cos w_{20}}{h_0 h_1 \cos w_{12} \cos w_{20} + h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01} + h_2 h_0 \cos w_{01} \cos w_{12}}.$$

§. 16.

Um noch ein anderes Beispiel zu geben, wollen wir den Schwerpunkt des Dreiecks $A'A''A'''$ betrachten, indem wir die Coordinaten der Ecken A', A'', A''' respective durch

$$p_0',\ p_1',\ p_2';\quad p_0'',\ p_1'',\ p_2'';\quad p_0''',\ p_1''',\ p_2'''$$

bezeichnen.

Nach §. 12. sind die Coordinaten der Mittelpunkte der Seiten

$$\overline{A'A''},\quad \overline{A''A'''},\quad \overline{A'''A'}$$

respective:

$$\tfrac{1}{2}(p_0'+p_0''),\quad \tfrac{1}{2}(p_1'+p_1''),\quad \tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'');$$
$$\tfrac{1}{2}(p_0''+p_0'''),\quad \tfrac{1}{2}(p_1''+p_1'''),\quad \tfrac{1}{2}(p_2''+p_2''');$$
$$\tfrac{1}{2}(p_0'''+p_0'),\quad \tfrac{1}{2}(p_1'''+p_1'),\quad \tfrac{1}{2}(p_2'''+p_2');$$

und die Gleichungen der durch

A' und den Mittelpunkt von $\overline{A''A'''}$,
A'' „ „ „ „ $\overline{A'''A'}$,
A''' „ „ „ „ $\overline{A'A''}$

gehenden Geraden sind folglich nach §. 6.:

$$\left.\begin{array}{r}\{p_1'(p_2''+p_2''')-p_2'(p_1''+p_1''')\}p_0\\+\{p_2'(p_0''+p_0''')-p_0'(p_2''+p_2''')\}p_1\\+\{p_0'(p_1''+p_1''')-p_1'(p_0''+p_0''')\}p_2\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{p_1''(p_2'''+p_2')-p_2''(p_1'''+p_1')\}p_0\\+\{p_2''(p_0'''+p_0')-p_0''(p_2'''+p_2')\}p_1\\+\{p_0''(p_1'''+p_1')-p_1''(p_0'''+p_0')\}p_2\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{p_1'''(p_2'+p_2'')-p_2'''(p_1'+p_1'')\}p_0\\+\{p_2'''(p_0'+p_0'')-p_0'''(p_2'+p_2'')\}p_1\\+\{p_0'''(p_1'+p_1'')-p_1'''(p_0'+p_0'')\}p_2\end{array}\right\}=0;$$

oder:

1)

$$\left.\begin{array}{r}\{p_1'(p_2'+p_2''+p_2''')-p_2'(p_1'+p_1''+p_1''')\}p_0\\+\{p_2'(p_0'+p_0''+p_0''')-p_0'(p_2'+p_2''+p_2''')\}p_1\\+\{p_0'(p_1'+p_1''+p_1''')-p_1'(p_0'+p_0''+p_0''')\}p_2\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{p_1''(p_2'+p_2''+p_2''')-p_2''(p_1'+p_1''+p_1''')\}p_0\\+\{p_2''(p_0'+p_0''+p_0''')-p_0''(p_2'+p_2''+p_2''')\}p_1\\+\{p_0''(p_1'+p_1''+p_1''')-p_1''(p_0'+p_0''+p_0''')\}p_2\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{p_1'''(p_2'+p_2''+p_2''')-p_2'''(p_1'+p_1''+p_1''')\}p_0\\+\{p_2'''(p_0'+p_0''+p_0''')-p_0'''(p_2'+p_2''+p_2''')\}p_1\\+\{p_0'''(p_1'+p_1''+p_1''')-p_1'''(p_0'+p_0''+p_0''')\}p_2\end{array}\right\}=0.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass die Summe dieser drei Gleichungen verschwindet, so dass also, wenn für gewisse Werthe von p_0, p_1, p_2 zwei dieser Gleichungen erfüllt werden, für dieselben Werthe von p_0, p_1, p_2 immer auch die dritte Gleichung erfüllt ist. Bestimmt man daher mittelst der Gleichung

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J$$

und zweier der Gleichungen 1) die Grössen p_0, p_1, p_2; so wird durch die erhaltenen Werthe dieser Grössen immer auch die dritte der Gleichungen 1) erfüllt, woraus sich ergiebt, dass die durch die Gleichungen 1) charakterisirten Geraden, also die von den Spitzen oder Ecken des Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Geraden, sich immer in einem und demselben Punkte schneiden.

Man überzeugt sich sehr leicht, dass die drei Gleichungen 1), indem G einen gewissen Factor bezeichnet, erfüllt werden, wenn man

$$2) \quad \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l} p_0 = G(p_0' + p_0'' + p_0'''), \\ p_1 = G(p_1' + p_1'' + p_1'''), \\ p_2 = G(p_2' + p_2'' + p_2''') \end{array}\right.$$

setzt, wo es also nur noch darauf ankommt, den Factor G zu bestimmen, wozu man sehr leicht gelangt, wenn man die vorstehenden Werthe von p_0, p_1, p_2 in die Gleichung

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J$$

einführt; denn dadurch erhält man auf der Stelle:

$$\left\{\begin{array}{r} (p_0' + p_0'' + p_0''') \sin w_{12} \\ + (p_1' + p_1'' + p_1''') \sin w_{20} \\ + (p_2' + p_2'' + p_2''') \sin w_{01} \end{array}\right\} G = J$$

oder:

$$\left\{\begin{array}{r} (p_0' \sin w_{12} + p_1' \sin w_{20} + p_2' \sin w_{01}) \\ + (p_0'' \sin w_{12} + p_1'' \sin w_{20} + p_2'' \sin w_{01}) \\ + (p_0''' \sin w_{12} + p_1''' \sin w_{20} + p_2''' \sin w_{01}) \end{array}\right\} G = J,$$

also $3JG = J$, und folglich:

$$3) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad G = \tfrac{1}{3};$$

daher nach 2):

$$4) \quad \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l} p_0 = \tfrac{1}{3}(p_0' + p_0'' + p_0'''), \\ p_1 = \tfrac{1}{3}(p_1' + p_1'' + p_1'''), \\ p_2 = \tfrac{1}{3}(p_2' + p_2'' + p_2'''). \end{array}\right.$$

§. 17.

Wir wollen nun noch den Flächeninhalt F des Dreiecks $\overline{A'A''A'''}$ betrachten, indem wir wiederum die Coordinaten der Ecken A', A'', A''' respective durch

$$p_0', \; p_1', \; p_2'; \quad p_0'', \; p_1'', \; p_2''; \quad p_0''', \; p_1''', \; p_2'''$$

bezeichnen.

Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken A', A'', A''' durch x', y'; x'', y''; x''', y'''; so ist nach einer sehr bekannten Formel:

$$\pm 2F = x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y''),$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um den Umfang des Dreiecks nach der Ordnung der Ecken zu durchlaufen, in gleichem oder ungleichem Sinne mit der Bewegung von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegen muss. Nun ist nach §. 4. 13), 14):

$$x' \sin w_{01} = (p_0' - \overline{\omega}_0)\cos\alpha_1 - (p_1' - \overline{\omega}_1)\cos\alpha_0,$$
$$y' \sin w_{01} = (p_0' - \overline{\omega}_0)\cos\beta_1 - (p_1' - \overline{\omega}_1)\cos\beta_0;$$

$$x'' \sin w_{01} = (p_0'' - \overline{\omega}_0)\cos\alpha_1 - (p_1'' - \overline{\omega}_1)\cos\alpha_0,$$
$$y'' \sin w_{01} = (p_0'' - \overline{\omega}_0)\cos\beta_1 - (p_1'' - \overline{\omega}_1)\cos\beta_0;$$

$$x''' \sin w_{01} = (p_0''' - \overline{\omega}_0)\cos\alpha_1 - (p_1''' - \overline{\omega}_1)\cos\alpha_0,$$
$$y''' \sin w_{01} = (p_0''' - \overline{\omega}_0)\cos\beta_1 - (p_1''' - \overline{\omega}_1)\cos\beta_0;$$

also:

$$(y''-y''')\sin w_{01} = (p_0''-p_0''')\cos\beta_1 - (p_1''-p_1''')\cos\beta_0,$$
$$(y'''-y')\sin w_{01} = (p_0'''-p_0')\cos\beta_1 - (p_1'''-p_1')\cos\beta_0,$$
$$(y'-y'')\sin w_{01} = (p_0'-p_0'')\cos\beta_1 - (p_1'-p_1'')\cos\beta_0;$$

und folglich:

$$\pm 2F\sin w_{01}{}^2$$

$$\begin{aligned}
= \;& (p_0'-\overline{\omega}_0)(p_0''-p_0''')\cos\alpha_1\cos\beta_1 - (p_0'-\overline{\omega}_0)(p_1''-p_1''')\cos\beta_0\cos\alpha_1 \\
& -(p_1'-\overline{\omega}_1)(p_0''-p_0''')\cos\alpha_0\cos\beta_1 + (p_1'-\overline{\omega}_1)(p_1''-p_1''')\cos\alpha_0\cos\beta_0 \\
& +(p_0''-\overline{\omega}_0)(p_0'''-p_0')\cos\alpha_1\cos\beta_1 - (p_0''-\overline{\omega}_0)(p_1'''-p_1')\cos\beta_0\cos\alpha_1 \\
& -(p_1''-\overline{\omega}_1)(p_0'''-p_0')\cos\alpha_0\cos\beta_1 + (p_1''-\overline{\omega}_1)(p_1'''-p_1')\cos\alpha_0\cos\beta_0 \\
& +(p_0'''-\overline{\omega}_0)(p_0'-p_0'')\cos\alpha_1\cos\beta_1 - (p_0'''-\overline{\omega}_0)(p_1'-p_1'')\cos\beta_0\cos\alpha_1 \\
& -(p_1'''-\overline{\omega}_1)(p_0'-p_0'')\cos\alpha_0\cos\beta_1 + (p_1'''-\overline{\omega}_1)(p_1'-p_1'')\cos\alpha_0\cos\beta_0,
\end{aligned}$$

woraus sich sogleich:

$$\pm 2F\sin w_{01}{}^2$$

$$\begin{aligned}
= & -\{p_1'(p_0''-p_0''') + p_1''(p_0'''-p_0') + p_1'''(p_0'-p_0'')\}\cos\alpha_0\cos\beta_1 \\
& -\{p_0'(p_1''-p_1''') + p_0''(p_1'''-p_1') + p_0'''(p_1'-p_1'')\}\cos\beta_0\cos\alpha_1,
\end{aligned}$$

also:

$$\pm 2F\sin w_{01}{}^2$$
$$=\{p_0'(p_1''-p_1''')+p_0''(p_1'''-p_1')+p_0'''(p_1'-p_1'')\}$$
$$\times(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1),$$

folglich nach §. 4. 3):

$$\pm 2F\sin w_{01}=p_0'(p_1''-p_1''')+p_0''(p_1'''-p_1')+p_0'''(p_1'-p_1'')$$

ergiebt.

Auf diese Weise erhalten wir nun aus den Formeln §. 4. 13), 14) überhaupt:

$$\pm 2F\sin w_{01}=p_0'(p_1''-p_1''')+p_0''(p_1'''-p_1')+p_0'''(p_1'-p_1''),$$
$$\pm 2F\sin w_{12}=p_1'(p_2''-p_2''')+p_1''(p_2'''-p_2')+p_1'''(p_2'-p_2''),$$
$$\pm 2F\sin w_{20}=p_2'(p_0''-p_0''')+p_2''(p_0'''-p_0')+p_2'''(p_0'-p_0'').$$

Multiplicirt man aber diese Gleichungen nach der Reihe mit p_2', p_0', p_1' und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$p_0'\sin w_{12}+p_1'\sin w_{20}+p_2'\sin w_{01}=J$$

ist, nach sehr leichter Rechnung die folgende Formel:

$$\begin{aligned}\pm 2JF= \; & p_0'(p_1''p_2'''-p_1'''p_2'')\\ & +p_0''(p_1'''p_2'-p_1'p_2''')\\ & +p_0'''(p_1'p_2''-p_1''p_2');\end{aligned}$$

welche sich noch auf verschiedene Arten würde umgestalten lassen, indem man zugleich für J jeden seiner bekannten Ausdrücke setzen kann. Es ist z. B.:

$$F=$$
$$\pm\frac{p_0'(p_1''p_2'''-p_1'''p_2'')+p_0''(p_1'''p_2'-p_1'p_2''')+p_0'''(p_1'p_2''-p_1''p_2')}{2(\varpi_0\sin w_{12}+\varpi_1\sin w_{20}+\varpi_2\sin w_{01})}.$$

Diese Betrachtung auf jedes beliebige Vieleck zu erweitern, hat nicht die mindeste Schwierigkeit, wenn man nur, in ähnlicher Weise wie vorher bei dem Dreieck, von dem bekannten allgemeinen Ausdrucke für den Flächeninhalt eines jeden Vielecks durch rechtwinklige Coordinaten ausgeht.

XXXVII.

Note über die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$(x+y)^2\frac{d^2z}{dxdy}+m_1(x+y)\frac{dz}{dx}+m_2(x+y)\frac{dz}{dy}+nz=0. \quad (1)$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Wir setzen, um diese Gleichung zu integriren,

$$z=(x+y)^\lambda Z \quad (2)$$

und erhalten hiedurch:

(3)

$$(x+y)^2\frac{d^2Z}{dxdy}+(\lambda+m_1)(x+y)\frac{dZ}{dx}+(\lambda+m_2)(x+y)\frac{dZ}{dy}$$
$$+[\lambda^2+(m_1+m_2-1)\lambda+n]Z=0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für solche Werthe von λ, welche aus der Gleichung

$$\lambda^2+(m_1+m_2-1)\lambda+n=0 \quad (4)$$

hervorgehen, und nimmt dann die Gestalt an:

$$(x+y)\frac{d^2Z}{dxdy}+(\lambda+m_1)\frac{dZ}{dx}+(\lambda+m_2)\frac{dZ}{dy}=0 \quad (5)$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

(6)

$$Z=\frac{d^{\lambda+m_2-1}}{dx^{\lambda+m_2-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{\lambda+m_1}}\right]+\frac{d^{\lambda+m_1-1}}{dy^{\lambda+m_1-1}}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^{\lambda+m_2}}\right],$$

woselbst $\varphi(x)$ eine willkührliche Function von x, $\psi(y)$ eine willkührliche Function von y bedeutet, und $\lambda+m_1$ und $\lambda+m_2$ ganze positive Zahlen sind. Es ist somit:

(7)

$$z=(x+y)^{\lambda}\left\{\frac{d^{\lambda+m_2-1}}{dx^{\lambda+m_2-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{\lambda+m_1}}\right]+\frac{d^{\lambda+m_1-1}}{dy^{\lambda+m_1-1}}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^{\lambda+m_2}}\right]\right\}$$

das vollständige Integral der Gleichung (1). (Siehe hierüber im 33. Bande des Archivs S. 476.)

Euler integrirt die Gleichung (1) im speciellen Falle $m_1=m_2$ durch Reihen. Ist die Gleichung (1) von der Gestalt:

(8)

$$(x+y)^2\frac{d^2z}{dxdy}+m(x+y)\frac{dz}{dx}+m(x+y)\frac{dz}{dy}+(m+k)(m-k-1)z=0$$

so brechen die Reihen ab im Falle k ganz und positiv ist, (siehe Euler's vollst. Anleitung zur Integralrechnung, deutsch von Salomon. 3. Bd. S. 224). Nach der von uns gegebenen Formel (7) hat man aber, da

$$m_1=m_2=m,\quad n=(m+k)(m-k-1)$$

ist, folgende Gleichung für λ:

$$\lambda^2+(2m-1)\lambda+(m+k)(m-k-1)=0,$$

woraus die Werthe:

$$\lambda=-m-k \quad\text{und}\quad \lambda=-m+k+1$$

hervorgehen. Wir finden daher mittelst unserer Formel folgende Integrale der Gleichung (8):

(9)

$$z=(x+y)^{-k-m}\left\{\frac{d^{-k-1}}{dx^{-k-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{-k}}\right]+\frac{d^{-k-1}}{dy^{-k-1}}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^{-k}}\right]\right\}.$$

(10)

$$z=(x+y)^{k-m+1}\left\{\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{k+1}}\right]+\frac{d^k}{dy^k}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^{k+1}}\right]\right\}.$$

$$(x+y)^2 \frac{d^2z}{dx\,dy} + m_1(x+y)\frac{dz}{dx} + m_2(x+y)\frac{dz}{dy} + nz = 0.$$

Das Integral (9) gilt für ganze und negative Werthe von k, das Integral (10) hingegen für ganze und positive Werthe von k, und auch für $k=0$.

Auch die Gleichung

$$(x+y)\frac{d^2z}{dx\,dy} + m\frac{dz}{dx} + m\frac{dz}{dy} = 0 \tag{11}$$

integrirt Euler mittelst Reihen, die für ganze Werthe von m abbrechen. Wir finden mittelst der Formeln (9) und (10), wenn wir in selbe $k=-m$ setzen, folgende Integrale der Gleichung (11):

$$z = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^m}\right] + \frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^m}\right], \tag{12}$$

(13)

$$z = (x+y)^{1-2m}\left\{\frac{d^{-m}}{dx^{-m}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{1-m}}\right] + \frac{d^{-m}}{dy^{-m}}\left[\frac{\psi(y)}{(x+y)^{1-m}}\right]\right\}.$$

Das erste dieser Integrale ist giltig für ganze und positive Werthe von m; das zweite hingegen für ganze und negative Werthe von m. Werden die Differentiationen wirklich ausgeführt, so kömmt man natürlich zu den Reihen, welche Euler als Integrale aufstellte.

Es ist uns geglückt, das vollständige Integral der Gleichung

$$(x+y)\frac{d^2z}{dx\,dy} + m_1\frac{dz}{dx} + m_2\frac{dz}{dy} = 0 \tag{14}$$

auch in den Fällen aufzustellen, wo bloss eine der beiden Zahlen m_1, m_2 ganz ist. — Sei etwa m_2 ganz und positiv, m_1 beliebig, sodann ist das Integral der Gleichung (14):

$$z = \frac{d^{m_2-1}}{dx^{m_2-1}}\left[\frac{1}{(x+y)^{m_1}}\int(x+y)^{m_1-1}\psi(y)dy\right]. \tag{15}$$

Die Richtigkeit dieses Integrales lässt sich leicht darthun. Denn aus (15) folgt:

$$\frac{d^{1-m_2}z}{dx^{1-m_2}} = \frac{1}{(x+y)^{m_1}}\int(x+y)^{m_1-1}\psi(y) \ldots$$

und differenzirt man diese Gleichung nach y, so er[illegible]

$$\frac{d^{2-m_2}z}{dx^{1-m_2}dy} = \frac{\psi(y)}{x+y} - \frac{m_1}{(x+y)^{m_1+1}}\int(x \ldots$$

hieraus folgt:

$$(x+y)\frac{d^{2-m_2}z}{dx^{1-m_2}dy} = \psi(y) - \frac{m_1}{(x+y)^{m_1}}\int (x+y)^{m_1-1}\psi(y)dy,$$

und wenn man die Gleichung (16) berücksichtiget:

$$(x+y)\frac{d^{2-m_2}z}{dx^{1-m_2}dy} = \psi(y) - m_1\frac{d^{1-m_2}z}{dx^{1-m_2}}.$$

Wird diese Gleichung m_2 mal nach x differenzirt, so erhält man.

$$(x+y)\frac{d^2z}{dxdy} + m_2\frac{dz}{dy} = -m_1\frac{dz}{dx},$$

was zu beweisen war. — Es folgt daher in der That für die Gleichung

$$(x+y)\frac{d^2z}{dxdy} + m_1\frac{dz}{dx} + m_2\frac{dz}{dy} = 0, \tag{14}$$

falls m_2 eine ganze positive Zahl ist, folgendes Integral:

$$z = \frac{d^{m_2-1}}{dx^{m_2-1}}\left[\frac{1}{(x+y)^{m_1}}\int (x+y)^{m_1-1}\psi(y)dy\right]; \tag{15}$$

$\psi(y)$ ist hier eine willkührliche Function von y, und wird die hier angezeigte Integration von

$$(x+y)^{m_1-1}\psi(y)dy$$

nach y durchgeführt, so erscheint als Integrationsconstante eine willkührliche Function von x, demnach lässt sich das Integral (15) auch so schreiben:

(17)

$$z = \frac{d^{m_2-1}}{dx^{m_2-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{m_1}} + \frac{1}{(x+y)^{m_1}}\int (x+y)^{m_1-1}\psi(y)dy\right].$$

Eben so lässt sich auch zeigen, dass, falls m_1 ganz und positiv, m_2 ganz beliebig ist, das Integral der Gleichung (14) die Gestalt hat:

(18)

$$z = \frac{d^{m_1-1}}{dy^{m_1-1}}\left[\frac{\varphi(y)}{(x+y)^{m_2}} + \frac{1}{(x+y)^{m_2}}\int (x+y)^{m_2-1}\psi(x)dx\right].$$

$$(x+y)^2 \frac{d^2 z}{dx dy} + m_1(x+y) \frac{dz}{dx} + m_2(x+y) \frac{dz}{dy} + nz = 0.$$

Setzt man in (14)

$$z = (x+y)^{1-m_1-m_2} Z, \tag{19}$$

so erhält man:

$$(x+y) \frac{d^2 Z}{dx dy} + (1-m_2) \frac{dZ}{dx} + (1-m_1) \frac{dZ}{dy} = 0. \tag{20}$$

Dieser Gleichung genügt aber nach dem so eben Bewiesenen, für ganze und negative Werthe von m_1, oder auch für $m_1 = 0$:

$$Z = \frac{d^{-m_1}}{dx^{-m_1}} [(x+y)^{m_2-1} \varphi(x) + (x+y)^{m_2-1} \int \frac{\psi(y) dy}{(x+y)^{m_2}}]$$

und für ganze und negative Werthe von m_2, oder auch für $m_2 = 0$:

$$Z = \frac{d^{-m_2}}{dy^{-m_2}} [(x+y)^{m_1-1} \varphi(y) + (x+y)^{m_1-1} \int \frac{\psi(x) dx}{(x+y)^{m_1}}];$$

folglich erscheint das Integral der Gleichung

$$(x+y) \frac{d^2 z}{dx dy} + m_1 \frac{dz}{dx} + m_2 \frac{dz}{dy} = 0 \tag{14}$$

in folgenden vier verschiedenen Formen:

Erstens:

$$z = \frac{d^{m_2-1}}{dx^{m_2-1}} \left[\frac{\varphi(x)}{(x+y)^{m_1}} + \frac{1}{(x+y)^{m_1}} \int (x+y)^{m_1-1} \psi(y) dy \right],$$

was giltig ist für ganze und positive Werthe von m_2.

Zweitens:

$$z = (x+y)^{1-m_1-m_2} \frac{d^{-m_2}}{dy^{-m_2}} [(x+y)^{m_1-1} \varphi(y) + (x+y)^{m_1-1} \int \frac{\psi(x) dx}{(x+y)^{m_1}}],$$

was giltig ist für ganze und negative Werthe von m_2, oder auch für $m_2 = 0$.

Drittens:

$$z = \frac{d^{m_1-1}}{dy^{m_1-1}} \left[\frac{\varphi(y)}{(x+y)^{m_2}} + \frac{1}{(x+y)^{m_2}} \int (x+y)^{m_2-1} \psi(x) dx \right],$$

was giltig ist für ganze und positive Werthe von m_1.

Viertens:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$f(x+1) = \varphi(x) f(x); \tag{2}$$

[illegible]

$$f(x) = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\ldots\varphi(x-1).f(1), \tag{3}$$

[illegible]

$$f(x+1) = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\ldots\varphi(x-1)\varphi(x).f(1),$$

folglich findet wirklich zwischen $f(x)$ und $f(x+1)$ die Gleichung (2) statt. Hat man die Gleichung:

$$f(x+2) = \varphi(x)f(x), \tag{4}$$

so ist auf ganz ähnliche Weise:

$$f(x) = \varphi(1)\varphi(3)\varphi(5)\ldots\varphi(x-2).f(1). \tag{5}$$

Denn hieraus folgt:

$$f(x+2) = \varphi(1)\varphi(3)\varphi(5)\ldots\varphi(x-2)\varphi(x).f(1),$$

und zwischen $f(x)$ und $f(x+2)$ findet wirklich die Gleichung (4) statt.

Ganz eben so ist aber auch

$$f(x) = \varphi(2)\varphi(4)\varphi(6)\ldots\varphi(x-2).f(2), \tag{6}$$

folglich genügt der Gleichung (4)

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \varphi(1)\varphi(3)\varphi(5)\ldots\varphi(x-2).f(1) \\ & + \varphi(2)\varphi(4)\varphi(6)\ldots\varphi(x-2).f(2); \end{aligned}$$

das erste dieser beiden partikulären Integrale gilt für ungerade, das zweite partikuläre Integral für gerade Werthe von x.

Ganz so hat man auch für die Gleichung dritter Ordnung:

$$f(x+3) = \varphi(x)f(x)$$

die Auflösung:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \varphi(1)\varphi(4)\varphi(7)\ldots\varphi(x-3).f(1) \\ & + \varphi(2)\varphi(5)\varphi(8)\ldots\varphi(x-3).f(2) \\ & + \varphi(3)\varphi(6)\varphi(9)\ldots\varphi(x-3).f(3). \end{aligned}$$

Das 1ste partikuläre Integral gilt, falls x die Form $3n+1$,
„ 2te „ „ „ „ „ „ „ $3n+2$,
„ 3te „ „ „ „ „ „ „ $3n+3$

hat, unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

XXXIX.

Note über Differentialgleichungen der Form:

$$z^{(n)} = x^m(Axz' + Bz). \qquad (1)$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Wir erlauben uns hier zwei Sätze über lineare Differentialgleichungen der Form (1) aufzustellen und zu beweisen.

Der erste Satz lautet: Wenn das Integral der Gleichung (1 bekannt ist, es sei

$$z = \psi(x); \qquad (2)$$

so lässt sich das Integral der Gleichung

$$y^{(n)} = x^m y \qquad (3)$$

aufstellen; es ist nämlich in folgender Form enthalten:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\, V du, \qquad (4)$$

woselbst V eine Function von u, und u_1, u_2 constante Zahlen bedeuten. Um V und sodann u_1, u_2 zu bestimmen, setzen wir den in (4) aufgestellten Werth von y in die Gleichung (3), wir erhalten sodann:

$$\int_{u_1}^{u_2} [u^n \psi^{(n)}(ux) - x^m \psi(ux)]\, V du = 0. \qquad (5)$$

Es ist aber:

$$\psi^{(n)}(x) = x^m[Ax\psi'(x) + B\psi(x)],$$

folglich

$$\psi^{(n)}(ux) = u^m x^m[Aux\psi'(ux) + B\psi(ux)].$$

Daher hat man:

$$\int_{u_1}^{u_2} [Au^{m+n+1}x\psi'(ux) + Bu^{m+n}\psi(ux) - \psi(ux)]\,V du = 0. \tag{6}$$

Mittelst der Methode des theilweisen Integrirens lässt sich

$$\int_{u_1}^{u_2} Au^{m+n+1}x\psi'(ux)\,V du$$

in folgenden Ausdruck umgestalten:

$$A\{u^{m+n+1}\psi(ux)\,V\}_{u_1}^{u_2} - A\int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\frac{d(u^{m+n+1}V)}{du}\,du.$$

Durch diess geht die Gleichung (6) über in:

$$A\{u^{m+n+1}V\psi(ux)\}_{u_1}^{u_2} \tag{7}$$

$$+\int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\left[-A.\frac{d(u^{m+n+1}V)}{du} + Bu^{m+n}V - V\right]du = 0.$$

Setzt man den Theil, der unter dem Integralzeichen steht, gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$A\frac{d(u^{m+n+1}V)}{du} = (Bu^{m+n} - 1)V, \tag{8}$$

aus welcher folgender Werth für V folgt:

$$V = u^{\frac{B}{A}-m-n-1}e^{\frac{1}{A(m+n)u^{m+n}}}, \tag{9}$$

und setzt man diess in die Gleichung

$$u^{m+n+1}V\psi(ux) = 0,$$

so erhält man:

$$u^{\frac{B}{A}}e^{\frac{1}{A(m+n)u^{m+n}}}\psi(ux) = 0, \tag{10}$$

aus welcher Gleichung u zu suchen ist. Ergeben

für u zwei constante Zahlen u_1 und u_2 als Wurzeln, so erhält man, selbe als Integrationsgrenzen gesetzt, für u folgenden Werth:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^{\frac{B}{A} - m - n - 1} e^{\frac{1}{A(m+n)u^{m+n}}} \psi(ux) du, \tag{11}$$

und diess ist richtig, wenn das Integral weder unbestimmt noch unendlich ist.

Der zweite Satz lautet: Wenn das Integral der Gleichung

$$z^{(n)} = x^m (Axz' + Bz) \tag{12}$$

bekannt ist, es sei

$$z = \psi(x); \tag{13}$$

so lässt sich das Integral der Gleichung

$$y^{(n)} = x^m (A_1 xy' + B_1 y) \tag{14}$$

aufstellen, es ist nämlich:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux) V du, \tag{15}$$

woselbst V wieder eine Function von u, und u_1, u_2 constante Zahlen bedeuten. — Um zuerst V, und sodann u_1, u_2 zu bestimmen, setzen wir den in (15) aufgestellten Werth von y in die Gleichung (14), hiedurch erhalten wir:

$$\int_{u_1}^{u_2} [u^n \psi^{(n)}(ux) - A_1 x^{m+1} u \psi'(ux) - B_1 x^m \psi(ux)] V du = 0. \tag{16}$$

Nun ist aber:

$$\psi^{(n)}(x) = x^m [Ax\psi'(x) + B\psi(x)],$$

$$\psi^{(n)}(ux) = u^m x^m [Aux\psi'(ux) + B\psi(ux)],$$

folglich hat man:

$$\int_{u_1}^{u_2} [Au^{m+n+1} x\psi'(ux) + Bu^{m+n} \psi(ux) - A_1 ux\psi'(ux) - B_1 \psi(ux)] V du = 0. \tag{17}$$

Mittelst der Methode des theilweisen Integrirens lässt sich aber der Ausdruck

$$\int_{u_1}^{u_2} (Au^{m+n+1} - A_1 u)\, Vx\psi'(ux)du$$

umgestalten; es ist nämlich derselbe gleich

$$\left\{(Au^{m+n+1} - A_1 u)\, V\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\frac{d}{du}[V(Au^{m+n+1} - A_1 u)]du$$

und setzt man diess in die Gleichung (17), so erhält man:

(18)

$$\left\{(Au^{m+n+1} - A_1 u)\, V\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2}$$
$$+ \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\left\{ V(Bu^{m+n} - B_1) - \frac{d}{du}[V(Au^{m+n+1} - A_1 u)]\right\}du = 0.$$

Setzt man nun

$$V(Bu^{m+n} - B_1) - \frac{d}{du}[V(Au^{m+n+1} - A_1 u)] = 0, \qquad (19)$$

so ergibt sich hieraus folgender Werth für V:

$$V = u^{\alpha-1}(Au^{m+n} - A_1)^{\beta-1}, \qquad (20)$$

wo der Kürze halber

$$\alpha = \frac{B_1}{A_1}, \quad \beta = \frac{A_1 B - AB_1}{AA_1(m+n)}$$

gesetzt wurde; und setzt man diesen Werth von V in die Gleichung

$$(Au^{m+n+1} - A_1 u)\, V\psi(ux) = 0,$$

so erhält man:

$$u^{\alpha}(Au^{m+n} - A_1)^{\beta}\psi(ux) = 0, \qquad (21)$$

aus welcher Gleichung u zu suchen ist. Ergeben sich aus (21) für u zwei constante Zahlen u_1, u_2 als Wurzeln, so erhält man, selbe als Integrationsgrenzen setzend, für y folgenden Werth:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^{\alpha-1}(Au^{m+n} - A_1)^{\beta-1}\psi(ux)du$$

und diess ist richtig, wenn das Integral weder unbestimmt noch unendlich ist.

Aus den beiden so eben aufgestellten Sätzen sieht man, wie zweckmässig es ist, Integrale von Differentialgleichungen der Form (1) zu kennen. Wir erlauben uns daher hier eine bestimmte Differentialgleichung der Form (1) besonders vorzuführen. Es hat nämlich die lineare Differentialgleichung

$$z''' = x^{m-1}(4xz' + 2mz) \tag{23}$$

das Integral

$$z = C_1\varphi(x)\varphi(x) + C_2\varphi(x)\psi(x) + C_3\psi(x)\psi(x),$$

vorausgesetzt, dass C_1, C_2, C_3 willkührliche Constante und $y = \varphi(x)$ sowohl, als $y = \psi(x)$ particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$y'' = x^m y$$

sind.

XL.

Note über die Integration der linearen Differentialgleichung

$$a_2y'' + (a_1 + b_1x)y' + (a_0 + b_0x)y = 0. \tag{1}$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Alle Differentialgleichungen der Form (1) können, wie immer auch die constanten Zahlen a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 beschaffen sind, wenn nur b_1 von Null verschieden ist, auf folgende Form gebracht werden:

$$ny'' + (-n\alpha + m + x)y' + [A - \alpha(m+x)]y = 0, \tag{2}$$

und diese Differentialgleichung wollen wir nun integriren in den beiden Fällen, wo A eine ganze positive oder eine ganze negative Zahl ist.

Integration der Gleichung (2) im Falle A eine ganze positive Zahl ist.

Wir setzen in (2):

$$y = e^{\alpha x} z, \tag{3}$$

unter z eine neue Variable verstanden, und erhalten hiedurch:

$$nz'' + (m + x + n\alpha)z' + Az = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichung differenziren wir nun $-A$mal nach x; hiedurch erhalten wir:

$$nz^{(2-A)} + (m + x + n\alpha)z^{(1-A)} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots . C_A x^{A-1}, \tag{5}$$

unter $C_1, C_2, C_3 \ldots . C_A$ willkührliche Constante verstanden. Aus der Gleichung (5) folgt:

$$z^{(1-A)} = L_1 e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx + L_2 + L_3 x + \ldots . + L_A x^{A-2}, \tag{6}$$

woselbst $L_1, L_2, L_3 \ldots . L_A$ constante Zahlen sind, die von den willkührlichen Constanten $C_1, C_2, C_3 \ldots . C_A$ abhängen, und somit selbst willkührlich sind. Aus (6) geht hervor folgender Werth für z:

$$z = L_1 \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} [e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx]; \tag{7}$$

folglich ist das vollständige Integral der Gleichung (2) für den Fall ganzer und positiver Werthe von A:

$$y = e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} [e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx] \tag{8}$$

und diess lässt sich auch so darstellen:

$$y = K_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} [e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}}] \tag{9}$$

$$+ K_2 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} [e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int_0^x e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx],$$

woselbst K_1 und K_2 willkührliche Constante bedeuten.

Integration der Gleichung (2) im Falle A Null ist oder eine ganze negative Zahl.

Wir setzen in (2):

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} z, \tag{10}$$

wieder unter z eine neue Variable verstanden, und erhalten, da

$$y' = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} (z' - \frac{m+x}{n} z), \tag{11}$$

$$y'' = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} [z'' - 2.\frac{m+x}{n} z' + \left(\frac{m+x}{n}\right)^2 z - \frac{1}{n} z]$$

ist, statt der Gleichung (2) folgende Gleichung:

$$nz'' - (n\alpha + m + x)z' + (A-1)z = 0. \tag{12}$$

Wird diese Gleichung $(A-1)$mal differenzirt, so erhalten wir:

(13)

$$nz^{(A+1)} - (n\alpha + m + x)z^{(A)} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{-A+1} x^{-A},$$

unter C_1, C_2, $C_3 \ldots C_{-A+1}$ willkührliche Constante verstanden. Aus dieser Gleichung folgt:

(14)

$$z^{(A)} = L_1 e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx + L_2 + L_3 x + \ldots + L_{-A+1} x^{-A-1},$$

woselbst L_1, L_2, $L_3 \ldots L_{-A+1}$ constante Zahlen sind, die von den willkührlichen Constanten C_1, C_2, $C_3 \ldots C_{-A+1}$ abhängen, und somit selbst willkührlich sind. Aus (14) geht nun hervor folgen. der Werth für z:

$$z = L_1 \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} [e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx]; \tag{15}$$

somit ist das vollständige Integral der Gleichung (2) für den Fall ganzer und negativer Werthe von A oder auch für $A=0$:

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}}\left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx\right], \quad (16)$$

und diess lässt sich auch so darstellen:

$$y = K_1 e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}}\left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}}\right] \quad (17)$$

$$+ K_2 e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}}\left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int_0^x e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx\right],$$

unter K_1 und K_2 willkührliche Constante verstanden.

Berichtigungen.

Archiv Thl. XXXVIII. S. 77. soll die letzte der Gleichungen (2) statt

$$y = x^2(Ax^2y'' + Bxy' + Cy)$$

lauten:

$$y = x^3(Ax^2y'' + Bxy' + Cy).$$

Seite 134 soll statt

$$y = L_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx\right]$$

stehen:

$$y = L_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B} \int (m+x)^{B-1} e^{(\alpha-\beta)x} dx\right].$$



XLI.

Ueber einen Satz, von welchem der die Zahl π betreffende Satz von Wallis ein besonderer Fall ist.

Von
dem Herausgeber.

Wenn wir der Kürze wegen

$$1) \quad \ldots\ldots \quad X_n = \int_0^x \sin x^n \partial x$$

setzen, so ist nach einer bekannten Formel der Integralrechnung:

$$2) \quad \ldots \quad X_n = -\frac{1}{n}\sin x^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}X_{n-2}.$$

Nehmen wir nun zuerst an, dass n eine gerade Zahl sei, und setzen demzufolge $n = 2\mu$, so erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung die folgenden Gleichungen:

$$X_{2\mu} = -\frac{1}{2\mu}\sin x^{2\mu-1}\cos x + \frac{2\mu-1}{2\mu}X_{2\mu-2},$$

$$\frac{2\mu-1}{2\mu}X_{2\mu-2} = -\frac{2\mu-1}{(2\mu-2)2\mu}\sin x^{2\mu-3}\cos x + \frac{(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-2)2\mu}X_{2\mu-4},$$

$$\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-2)2\mu}X_{2\mu-4} = -\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}\sin x^{2\mu-5}\cos x$$
$$+\frac{(2\mu-5)(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}X_{2\mu-6},$$

u. s. w.

$$\frac{5.7.9\ldots.(2\mu-1)}{6.8.10\ldots.2\mu}X_4=-\frac{5.7.9\ldots.(2\mu-1)}{4.6.8\ldots.2\mu}\sin x^3\cos x+\frac{3.5.7\ldots.(2\mu-1)}{4.6.8\ldots.2\mu}X_2,$$

$$\frac{3.5.7\ldots.(2\mu-1)}{4.6.8\ldots.2\mu}X_2=-\frac{3.5.7\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}\sin x\cos x+\frac{1.3.5\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}X_0,$$

$$X_0=\int_0^x \partial x = x;$$

also, wenn man diese Gleichungen zu einander addirt:

$$3)\quad X_{2\mu}=-\left\{\begin{array}{l}\frac{1.3.5\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}\cdot\frac{\sin x}{1}+\frac{3.5.7\ldots.(2\mu-1)}{4.6.8\ldots.2\mu}\cdot\frac{\sin x^3}{3}\\ +\frac{5.7\ldots.(2\mu-1)}{6.8\ldots.2\mu}\cdot\frac{\sin x^5}{5}\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{2\mu-1}{2\mu}\cdot\frac{\sin x^{2\mu-1}}{2\mu-1}\end{array}\right\}\cos x$$
$$+\frac{1.3.5.7\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6.8\ldots.2\mu}x.$$

Nehmen wir ferner an, dass n eine ungerade Zahl sei, und setzen demzufolge $n=2\mu+1$, so erhalten wir nach der Gleichung 2) die folgenden Gleichungen:

$$X_{2\mu+1}=-\frac{1}{2\mu+1}\sin x^{2\mu}\cos x+\frac{2\mu}{2\mu+1}X_{2\mu-1},$$

$$\frac{2\mu}{2\mu+1}X_{2\mu-1}=-\frac{2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\sin x^{2\mu-2}\cos x+\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}X_{2\mu-3},$$

$$\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}X_{2\mu-3}=-\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}\sin x^{2\mu-4}\cos x$$
$$+\frac{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}X_{2\mu-5},$$

u. s. w.

$$\frac{6.8\ldots.2\mu}{7.9\ldots.(2\mu+1)}X_5=-\frac{6.8\ldots.2\mu}{5.7\ldots.(2\mu+1)}\sin x^4\cos x+\frac{4.6.8\ldots.2\mu}{5.7.9\ldots.(2\mu+1)}X_3,$$

$$\frac{4.6\ldots.2\mu}{5.7\ldots.(2\mu+1)}X_3=-\frac{4.6\ldots.2\mu}{3.5\ldots.(2\mu+1)}\sin x^2\cos x+\frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}X_1;$$

woraus sich, wenn man bedenkt, dass

$$X_1=\int_0^x \sin x\partial x=1-\cos x=2\sin\tfrac{1}{2}x^2$$

ist, durch Addition die folgende Gleichung ergiebt:

4)

$$X_{2\mu+1}=-\left\{\begin{matrix}\frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}\cdot\frac{\sin x^2}{2}+\frac{4.6.8\ldots.2\mu}{5.7.9\ldots.(2\mu+1)}\cdot\frac{\sin x^4}{4}\\ +\frac{6.8.10\ldots.2\mu}{7.9.11\ldots(2\mu+1)}\cdot\frac{\sin x^6}{6}\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{\sin x^{2\mu}}{2\mu}\end{matrix}\right\}\cos x$$

$$+\frac{2.4.6.8\ldots.2\mu}{3.5.7.9\ldots.(2\mu+1)}\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}x^2.$$

Setzen wir, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, $\frac{x}{k}=i$, so ist nach dem Fundamentalsatze der Theorie der bestimmten Integrale für ein in's Unendliche wachsendes k:

$$X_n=\text{Lim}.i(\sin i^n+\sin 2i^n+\sin 3i^n+\ldots.+\sin ki^n),$$

$$X_{n-1}=\text{Lim}.i(\sin i^{n-1}+\sin 2i^{n-1}+\sin 3i^{n-1}+\ldots.+\sin ki^{n-1});$$

und nehmen wir nun an, dass x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liege; so sind

$$\sin i,\quad \sin 2i,\quad \sin 3i,\ldots.\sin ki$$

sämmtlich positiv, und es ist offenbar im Allgemeinen:

$$\sin i^n<\sin i^{n-1},\quad \sin 2i^n<\sin 2i^{n-1},\ldots.,\sin ki^n<\sin ki^{n-1};$$

also nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$X_n<X_{n-1},\text{ und daher } X_{2\mu}>X_{2\mu+1},\quad X_{2\mu+2}<X_{2\mu+1}.$$

Also ist nach 3) und 4) offenbar:

$$5)\ldots\frac{1.3.5\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}x-\frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}.2\sin\tfrac{1}{2}x^2$$

$$>\left\{\begin{matrix}\frac{1.3.5\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}\cdot\frac{\sin x}{1}+\frac{3.5.7\ldots.(2\mu-1)}{4.6.8\ldots.2\mu}\cdot\frac{\sin x^3}{3}+\ldots.\\ \ldots.+\frac{2\mu-1}{2\mu}\cdot\frac{\sin x^{2\mu-1}}{2\mu-1}-\frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}\cdot\frac{\sin x^2}{2}\\ -\frac{4.6.8\ldots.2\mu}{5.7.9\ldots.(2\mu+1)}\cdot\frac{\sin x^4}{4}-\ldots-\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{\sin x^{2\mu}}{2\mu}\end{matrix}\right\}\cos x$$

und:

$$6) \ldots \frac{1.3.5\ldots.(2\mu+1)}{2.4.6\ldots.(2\mu+2)}x - \frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}.2\sin\tfrac{1}{2}x^2$$

$$< \left\{\begin{array}{c} \frac{1.3.5\ldots.(2\mu+1)}{2.4.6\ldots.(2\mu+2)}\cdot\frac{\sin x}{1} + \frac{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}{4.6.8\ldots.(2\mu+2)}\cdot\frac{\sin x^3}{3} \\ + \ldots. + \frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu(2\mu+2)}\cdot\frac{\sin x^{2\mu-1}}{2\mu-1} + \frac{2\mu+1}{2\mu+2}\cdot\frac{\sin x^{2\mu+1}}{2\mu+1} \\ - \frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}\cdot\frac{\sin x^2}{2} - \frac{4.6.8\ldots.2\mu}{5.7.9\ldots.(2\mu+1)}\cdot\frac{\sin x^4}{4} \\ - \ldots. - \frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{\sin x^{2\mu}}{2\mu} \end{array}\right\} \cos x.$$

Weil

$$\frac{2\mu-1}{2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-1} = \frac{1}{2\mu}, \quad \frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2\mu+1}$$

und

$$\frac{1}{2\mu} > \frac{1}{2\mu+1}$$

ist, so ist:

$$\frac{2\mu-1}{2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-1} > \frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu}.$$

Nun ist:

$$\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-2)2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-3} = \frac{2\mu-1}{2\mu-2}\cdot\frac{2\mu-1}{2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-1},$$

$$\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2} = \frac{2\mu}{2\mu-1}\cdot\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu};$$

nach dem Vorhergehenden ist:

$$\frac{2\mu-1}{2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-1} > \frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu},$$

und ausserdem offenbar:

$$\frac{2\mu-1}{2\mu-2} > \frac{2\mu}{2\mu-1}\ {}^{*});$$

also augenscheinlich:

$$\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-2)2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-3} > \frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2}.$$

---

*) Weil nämlich $n^2 > n^2-1$, $n^2 > (n-1)(n+1)$ ist, so ist

$$\frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n}.$$

Ferner ist:

$$\frac{(2\mu-5)(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-5}=\frac{2\mu-3}{2\mu-4}\cdot\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-2)2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-3},$$

$$\frac{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-4}=\frac{2\mu-2}{2\mu-3}\cdot\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2};$$

nach dem Vorhergehenden ist:

$$\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-2)2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-3}>\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2},$$

und ausserdem offenbar:

$$\frac{2\mu-3}{2\mu-4}>\frac{2\mu-2}{2\mu-3};$$

also augenscheinlich:

$$\frac{(2\mu-5)(2\mu-3)(2\mu-1)}{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}\cdot\frac{1}{2\mu-5}>\frac{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist also auch:

$$\frac{1.3.5\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}\cdot\frac{1}{1}>\frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2}.$$

Die Potenzen von $\sin x$ sind sämmtlich positiv, und es ist

$$\sin x>\sin x^2,\quad \sin x^3>\sin x^4,\ldots.,\sin x^{2\mu-1}>\sin x^{2\mu};$$

und da nun unter der gemachten Voraussetzung, dass x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, auch $\cos x$ positiv ist, so ist nach 5) offenbar:

$$7)\qquad \frac{1.3.5\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}x-\frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}.2\sin\tfrac{1}{2}x^2>0$$

oder:

$$8)\qquad \frac{1.3.5\ldots.(2\mu-1)}{2.4.6\ldots.2\mu}x>\frac{2.4.6\ldots.2\mu}{3.5.7\ldots.(2\mu+1)}.2\sin\tfrac{1}{2}x^2.$$

Weil

$$\frac{2\mu+1}{2\mu+2}\cdot\frac{1}{2\mu+1}=\frac{1}{2\mu+2},\quad \frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu}=\frac{1}{2\mu+1}$$

und

$$\frac{1}{2\mu+2}<\frac{1}{2\mu+1}$$

so ist:

$$\frac{2\mu+1}{2\mu+2}\cdot\frac{1}{2\mu+1}<\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu}.$$

Nun ist:

$$\frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu(2\mu+2)}\cdot\frac{1}{2\mu-1}=\frac{2\mu+1}{2\mu}\cdot\frac{2\mu+1}{2\mu+2}\cdot\frac{1}{2\mu+1},$$

$$\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2}=\frac{2\mu}{2\mu-1}\cdot\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu};$$

ch dem Vorhergehenden ist:

$$\frac{2\mu+1}{2\mu+2}\cdot\frac{1}{2\mu+1}<\frac{2\mu}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{2\mu},$$

ıd ausserdem offenbar:

$$\frac{2\mu+1}{2\mu}<\frac{2\mu}{2\mu-1};$$

lso augenscheinlich:

$$\frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu(2\mu+2)}\cdot\frac{1}{2\mu-1}<\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2}.$$

Ferner ist:

$$\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2\mu-2)2\mu(2\mu+2)}\cdot\frac{1}{2\mu-3}=\frac{2\mu-1}{2\mu-2}\cdot\frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu(2\mu+2)}\cdot\frac{1}{2\mu-1},$$

$$\frac{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-4}=\frac{2\mu-2}{2\mu-3}\cdot\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2};$$

nach dem Vorhergehenden ist:

$$\frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{2\mu(2\mu+2)}\cdot\frac{1}{2\mu-1}<\frac{(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-2},$$

und ausserdem offenbar:

$$\frac{2\mu-1}{2\mu-2}<\frac{2\mu-2}{2\mu-3};$$

also augenscheinlich:

$$\frac{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2\mu-2)2\mu(2\mu+2)}\cdot\frac{1}{2\mu-3}<\frac{(2\mu-4)(2\mu-2)2\mu}{(2\mu-3)(2\mu-1)(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu-4}.$$

Wie man auf diese Art weitergehen kann, ist klar, und es ist also auch:

$$\frac{3.5.7\ldots(2\mu+1)}{4.6.8\ldots(2\mu+2)}\cdot\tfrac{1}{2}<\frac{2.4.6\ldots2\mu}{3.5.7\ldots(2\mu+1)}\cdot\tfrac{1}{2}.$$

Weil nun alle Potenzen von $\sin x$ positiv sind und

$$\sin x^3<\sin x^2,\quad \sin x^5<\sin x^4,\ldots,\ \sin x^{2\mu+1}<\sin x^{2\mu}$$

ist, weil ferner auch $\cos x$ positiv ist; so ist nach 6) offenbar:

9)

$$\frac{1.3.5\ldots(2\mu+1)}{2.4.6\ldots(2\mu+2)}x-\frac{2.4.6\ldots2\mu}{3.5.7\ldots(2\mu+1)}\cdot2\sin\tfrac{1}{2}x^2$$
$$<\frac{1.3.5\ldots(2\mu+1)}{2.4.6\ldots(2\mu+2)}\sin x\cos x$$

oder:

10)

$$\frac{1.3.5\ldots(2\mu+1)}{2.4.6\ldots(2\mu+2)}(x-\sin x\cos x)<\frac{2.4.6\ldots2\mu}{3.5.7\ldots(2\mu+1)}\cdot2\sin\tfrac{1}{2}x^2.$$

Nach 8) und 10) ist also:

11)

$$\frac{1.3.5\ldots(2\mu+1)}{2.4.6\ldots(2\mu+2)}(x-\sin x\cos x)<\frac{2.4.6\ldots2\mu}{3.5.7\ldots(2\mu+1)}.2\sin\tfrac{1}{2}x^2<\frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots2\mu}x.$$

Wir wollen der Kürze wegen

$$12)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}A_\mu&=\frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots2\mu},\\ A_{\mu+1}&=\frac{1.3.5\ldots(2\mu+1)}{2.4.6\ldots(2\mu+2)}\end{aligned}\right.$$

setzen, so ist:

$$\frac{2.4.6\ldots2\mu}{3.5.7\ldots(2\mu+1)}=\frac{2.4.6\ldots2\mu}{1.3.5\ldots(2\mu-1)}\cdot\frac{1}{2\mu+1}=\frac{1}{(2\mu+1)A_\mu}$$
$$=\frac{2.4.6\ldots(2\mu+2)}{1.3.5\ldots(2\mu+1)}\cdot\frac{1}{2\mu+2}=\frac{1}{(2\mu+2)A_{\mu+1}},$$

auch

$$A_{\mu+1}=\frac{2\mu+1}{2\mu+2}A_\mu;$$

und man kann also die Relationen 11) auf verschiedene Arten schreiben, unter denen wir für jetzt jedoch nur die folgenden bemerken wollen:

$$13)\quad \begin{cases} A_{\mu+1}(x-\sin x\cos x) < \dfrac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{(2\mu+1)A_\mu} < A_\mu x, \\ A_{\mu+1}(x-\sin x\cos x) < \dfrac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{(2\mu+2)A_{\mu+1}} < A_\mu x; \end{cases}$$

woraus man leicht:

$$14)\quad (2\mu+2)A_{\mu+1}{}^2(2x-\sin 2x) < (2\sin\tfrac{1}{2}x)^2 < (2\mu+1)A_\mu{}^2.2x$$

erhält.

Aus 12) ergiebt sich:

$$x < \frac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{(2\mu+2)A_{\mu+1}{}^2} + \sin x\cos x,$$

$$x > \frac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{(2\mu+1)A_\mu{}^2};$$

also:

$$15)\quad \frac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{(2\mu+1)A_\mu{}^2} < x < \frac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{(2\mu+2)A_{\mu+1}{}^2} + \sin x\cos x.$$

Ob und welche fruchtbaren Folgerungen aus diesen allgemeinen Sätzen sich ziehen lassen, will ich jetzt ausführlicher nicht untersuchen, sondern nur so viel bemerken, dass unter denselben der berühmte Satz von **Wallis** als ein besonderer Fall enthalten ist. Setzt man nämlich, was nach dem Obigen noch verstattet ist, $x=\frac{1}{2}\pi$, so ist $2\sin\frac{1}{2}x^2=1$ und $\sin x\cos x=0$; also nach 15):

$$16)\quad \ldots \quad \frac{1}{(2\mu+1)A_\mu{}^2} < \tfrac{1}{2}\pi < \frac{1}{(2\mu+2)A_{\mu+1}{}^2},$$

folglich nach 12):

$$17)$$

$$\frac{1}{2\mu+1}\cdot\left\{\frac{2.4.6....2\mu}{1.3.5....(2\mu-1)}\right\}^2 < \tfrac{1}{2}\pi < \frac{1}{2\mu+2}\cdot\left\{\frac{2.4.6....(2\mu+2)}{1.3.5....(2\mu+1)}\right\}^2.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{1}{A_{\mu+1}} = \frac{2\mu+2}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{A_\mu}$$

ist, so ist:

$$\frac{1}{(2\mu+2)A_{\mu+1}{}^2} - \frac{1}{(2\mu+1)A_\mu{}^2} = \frac{2\mu+2}{(2\mu+1)^2A_\mu{}^2} - \frac{1}{(2\mu+1)A_\mu{}^2}$$

$$= \frac{1}{2\mu+1}\cdot\frac{1}{(2\mu+1)A_\mu{}^2},$$

Bezeichnen wir nun die den Seiten a_0, a_1, a_2 entsprechenden Höhen des Dreiecks durch h_0, h_1, h_2, so ist:

$$h_0 = p_0''' = a_1 \sin w_{01} = a_2 \sin w_{20},$$
$$h_1 = p_1' = a_2 \sin w_{12} = a_0 \sin w_{01},$$
$$h_2 = p_2'' = a_0 \sin w_{20} = a_1 \sin w_{12};$$

also offenbar nach dem Vorhergehenden:

14)

$$p_0 = \frac{h_0 h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01}}{h_0 h_1 \cos w_{12} \cos w_{20} + h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01} + h_2 h_0 \cos w_{01} \cos w_{12}},$$

$$p_1 = \frac{h_0 h_1 h_2 \cos w_{01} \cos w_{12}}{h_0 h_1 \cos w_{12} \cos w_{20} + h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01} + h_2 h_0 \cos w_{01} \cos w_{12}},$$

$$p_2 = \frac{h_0 h_1 h_2 \cos w_{12} \cos w_{20}}{h_0 h_1 \cos w_{12} \cos w_{20} + h_1 h_2 \cos w_{20} \cos w_{01} + h_2 h_0 \cos w_{01} \cos w_{12}}.$$

§. 16.

Um noch ein anderes Beispiel zu geben, wollen wir den Schwerpunkt des Dreiecks $\overline{A'A''A'''}$ betrachten, indem wir die Coordinaten der Ecken A', A'', A''' respective durch

$$p_0',\ p_1',\ p_2';\quad p_0'',\ p_1'',\ p_2'';\quad p_0''',\ p_1''',\ p_2'''$$

bezeichnen.

Nach §. 12. sind die Coordinaten der Mittelpunkte der Seiten

$$\overline{A'A''},\quad \overline{A''A'''},\quad \overline{A'''A'}$$

respective:

$$\tfrac{1}{2}(p_0'+p_0''),\quad \tfrac{1}{2}(p_1'+p_1''),\quad \tfrac{1}{2}(p_2'+p_2'');$$
$$\tfrac{1}{2}(p_0''+p_0'''),\quad \tfrac{1}{2}(p_1''+p_1'''),\quad \tfrac{1}{2}(p_2''+p_2''');$$
$$\tfrac{1}{2}(p_0'''+p_0'),\quad \tfrac{1}{2}(p_1'''+p_1'),\quad \tfrac{1}{2}(p_2'''+p_2');$$

und die Gleichungen der durch

A' und den Mittelpunkt von $\overline{A''A'''}$,
A'' „ „ „ „ $\overline{A'''A'}$,
A''' „ „ „ „ $\overline{A'A''}$

gehenden Geraden sind folglich nach §. 6.:

XLII.

Ueber eine Aufgabe aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten.

Von
dem Herausgeber.

Bei der Auflösung der Aufgaben vom Grössten und Kleinsten, welche die Bestimmung mehrerer unbekannten Grössen verlangen, unterliegt zwar die Ansetzung der Gleichungen, mittelst welcher die unbekannten Grössen zu bestimmen sind, besonderen Schwierigkeiten meistens nicht, da hiezu nur die Entwickelung gewisser erster partieller Differentialquotienten nöthig ist, die dann sämmtlich der Null gleich zu setzen sind. Die Anwendung der allgemeinen Kriterien, welche in der Differentialrechnung zur Unterscheidung des Maximums und Minimums entwickelt werden, bei nur zwei unbekannten Grössen zwar noch ziemlich leicht, führt aber bei einer grösseren Anzahl unbekannter Grössen oft in Weitläufigkeiten, weshalb diese Unterscheidung sehr häufig ganz bei Seite gesetzt wird, was natürlich aus dem Gesichtspunkte der strengen Theorie nicht gebilligt werden kann. Oefters kann man sich aber zweckmässig specieller, zum Theil ganz elementarer Betrachtungen bedienen, um zu der in Rede stehenden Unterscheidung zu gelangen, was bei der folgenden bekannten Aufgabe zu zeigen der Zweck dieses Aufsatzes ist. Auf die grosse praktische Wichtigkeit dieser Aufgabe brauche ich wohl nicht noch besonders hinzuweisen, bemerke jedoch, dass eben diese praktische Wichtigkeit der Aufgabe mir eine völlig strenge Behandlung derselben, auch in der angedeuteten Beziehung, als wünschenswerth erscheinen liess.

Aufgabe.

Die Werthe einer Reihe von Grössen, welche theoretisch eine gewisse bestimmte, also als gegeben zu betrachtende Summe s haben, seien durch Messungen, Beobachtungen oder Versuche bestimmt worden, und man habe dadurch für diese Grössen die Werthe

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots, a_n$$

erhalten. Weil diese Werthe, als auf dem angegebenen Wege gefunden, nothwendig mit Fehlern behaftet sein

müssen; so werden sie im Allgemeinen nicht die Summe s, sondern die von s verschiedene Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

geben, und man soll nun für die durch Messungen, Beobachtungen oder Versuche bestimmten Werthe

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots, a_n$$

solche Correctionen berechnen, dass, wenn wir diese Correctionen beziehungsweise durch

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \ldots, x_n$$

bezeichnen, und also

$$a_1 + x_1, \quad a_2 + x_2, \quad a_3 + x_3, \quad a_4 + x_4, \ldots, a_n + x_n$$

die corrigirten Werthe sind, genau

$$(a_1 + x_1) + (a_2 + x_2) + (a_3 + x_3) + \ldots + (a_n + x_n) = s,$$

und ausserdem die Summe der Quadrate der Correctionen, nämlich die Grösse

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2,$$

welche wir im Folgenden durch u bezeichnen, also

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2 = u$$

setzen wollen, ein Minimum ist.

Auflösung.

Aus der Gleichung

$$(a_1 + x_1) + (a_2 + x_2) + (a_3 + x_3) + \ldots + (a_n + x_n) = s$$

folgt, wenn wir der Kürze wegen

$$\varDelta = s - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n)$$

setzen:

$$x_n = \varDelta - (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}),$$

also:

$$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \{\varDelta - (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1})^2\},$$

folglich, wenn man u nach

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_{n-1}$$

partiell differentiirt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \ldots + 2x_{n-1} - 2\varDelta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \ldots + 2x_{n-1} - 2\varDelta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \ldots + 2x_{n-1} - 2\varDelta,$$
u. s. w.
$$\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_{n-2} + 4x_{n-1} - 2\varDelta.$$

Die dem Maximum und Minimum gemeinschaftlichen Bedingungsgleichungen sind nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = 0;$$

also, nach Vorstehendem, wenn man die sämmtlichen Gleichungen durch 2 dividirt:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} - \varDelta = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} - \varDelta = 0,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} - \varDelta = 0,$$
u. s. w.
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-2} + 2x_{n-1} - \varDelta = 0;$$

woraus sich durch Subtraction

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad x_1 = x_2,$$
$$x_2 - x_3 = 0, \qquad x_2 = x_3,$$
$$x_3 - x_4 = 0, \quad \text{also:} \quad x_3 = x_4,$$
u. s. w. u. s. w.
$$x_{n-2} - x_{n-1} = 0; \qquad x_{n-2} = x_{n-1}$$

oder

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1},$$

und folglich wegen der ersten der obigen Gleichungen:

$$nx_1 = \varDelta, \quad x_1 = \frac{\varDelta}{n}; \text{ also: } x_1 = \frac{\varDelta}{n}, \quad x_2 = \frac{\varDelta}{n}, \quad x_3 = \frac{\varDelta}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{\varDelta}{n}$$

ergiebt. Weil aber nach dem Obigen

$$x_n = \varDelta - (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1})$$

ist, so ist:

$$x_n = \varDelta - \frac{n-1}{n}\varDelta = \frac{\varDelta}{n},$$

also:

$$x_1=\frac{\Delta}{n},\quad x_2=\frac{\Delta}{n},\quad x_3=\frac{\Delta}{n},\ldots,\ x_n=\frac{\Delta}{n}$$

oder:

$$x_1=\frac{s-(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n)}{n},$$

$$x_2=\frac{s-(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n)}{n},$$

$$x_3=\frac{s-(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n)}{n},$$

u. s. w.

$$x_n=\frac{s-(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n)}{n}.$$

Wären z. B. a_1, a_2, a_3 die durch Messung bestimmten Winkel eines ebenen Dreiecks, für welche bekanntlich die theoretische Summe $s=180^0$ ist; so wäre

$$s-(a_1+a_2+a_3)=180^0-(a_1+a_2+a_3),$$

und die Correctionen der durch Messung bestimmten Winkel wären also nach dem Obigen:

$$x_1=\frac{\Delta}{3}=\frac{180^0-(a_1+a_2+a_3)}{3},$$

$$x_2=\frac{\Delta}{3}=\frac{180^0-(a_1+a_2+a_3)}{3},$$

$$x_3=\frac{\Delta}{3}=\frac{180^0-(a_1+a_2+a_3)}{3};$$

folglich die corrigirten Winkel selbst:

$$a_1+x_1=a_1+\frac{180^0-(a_1+a_2+a_3)}{3}=60^0+\tfrac{2}{3}a_1-\tfrac{1}{3}a_2-\tfrac{1}{3}a_3,$$

$$a_2+x_2=a_2+\frac{180^0-(a_1+a_2+a_3)}{3}=60^0-\tfrac{1}{3}a_1+\tfrac{2}{3}a_2-\tfrac{1}{3}a_3,$$

$$a_3+x_3=a_3+\frac{180^0-(a_1+a_2+a_3)}{3}=60^0-\tfrac{1}{3}a_1-\tfrac{1}{3}a_2+\tfrac{2}{3}a_3.$$

Dass nun die hier gegebene Auflösung für die Grösse

$$u=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+\ldots+x_n^2,$$

wie es sein soll, wirklich ein Minimum liefert, kann auf folgende Art gezeigt werden *).

---

*) Die Anwendung der Differentialrechnung in dem Falle $n=3$ s. m. in Thl. XXXI. S. 479. Nr. III.

Zuvörderst bemerke ich, dass es verstattet ist, im Folgenden anzunehmen, dass die Grösse

$$\Delta = s - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n)$$

nicht verschwindet; denn verschwände Δ, so würden die Correctionen

$$x_1 = \frac{\Delta}{n}, \quad x_2 = \frac{\Delta}{n}, \quad x_3 = \frac{\Delta}{n}, \ldots., x_n = \frac{\Delta}{n};$$

also auch die Summe ihrer Quadrate

$$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots. + x_n^2$$

verschwinden, folglich letztere natürlich ein Minimum sein, was also in diesem Falle eines weiteren Beweises nicht bedürfen würde.

Bezeichnen wir nun gewisse, von

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ldots., x_n$$

beliebig verschiedene Correctionen der durch Messungen, Beobachtungen oder Versuche bestimmten Werthe

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ldots., a_n$$

unserer Grössen, welche letzteren die theoretische Summe s haben, beziehungsweise durch

$$x_1', \ x_2', \ x_3', \ x_4', \ldots., x_n';$$

die entsprechenden corrigirten Werthe dieser Grössen also durch

$$a_1 + x_1', \quad a_2 + x_2', \quad a_3 + x_3', \ldots., a_n + x_n';$$

so werden wir, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots., \alpha_n$ beliebige Factoren bezeichnen, offenbar im Allgemeinen

$$x_1' = \alpha_1 \frac{\Delta}{n}, \quad x_2' = \alpha_2 \frac{\Delta}{n}, \quad x_3' = \alpha_3 \frac{\Delta}{n}, \ldots., x_n' = \alpha_n \frac{\Delta}{n}$$

setzen können, und haben also, weil

$$(a_1 + x_1') + (a_2 + x_2') + (a_3 + x_3') + \ldots. + (a_n + x_n') = s$$

sein muss, die Gleichung:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots. + \alpha_n)\frac{\Delta}{n} = s,$$

folglich:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots. + \alpha_n)\frac{\Delta}{n} = s - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n),$$

also:

$$(1-\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_n)}{n})\Delta=0;$$

folglich, weil nach dem Obigen Δ als nicht verschwindend angenommen werden kann:

$$1-\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_n}{n}=0 \text{ oder } \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_n}{n}=1.$$

Nun ist nach dem Obigen:

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+\ldots.+x_n'^2=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots.+\alpha_n^2)\left(\frac{\Delta}{n}\right)^2$$

und

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots.+x_n^2=n\left(\frac{\Delta}{n}\right)^2$$

also:

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+\ldots.+x_n'^2$$
$$=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots.+\alpha_n^2}{n}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots.+x_n^2).$$

Offenbar ist aber:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_n)^2\\
&+(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\alpha_1-\alpha_4)^2+\ldots.+(\alpha_1-\alpha_n)^2\\
&\qquad+(\alpha_2-\alpha_3)^2+(\alpha_2-\alpha_4)^2+\ldots.+(\alpha_2-\alpha_n)^2\\
&\qquad\qquad+(\alpha_3-\alpha_4)^2+\ldots.+(\alpha_3-\alpha_n)^2\\
&\qquad\qquad\text{u. s. w.}\\
&\qquad\qquad\qquad+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2\\
&=n(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots.+\alpha_n^2),
\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots.+\alpha_n^2}{n}\\
=&\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_n}{n}\right)^2\\
&+\frac{1}{n^2}\left\{\begin{aligned}
&(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\alpha_1-\alpha_4)^2+\ldots.+(\alpha_1-\alpha_n)^2\\
&\qquad+(\alpha_2-\alpha_3)^2+(\alpha_2-\alpha_4)^2+\ldots.+(\alpha_2-\alpha_n)^2\\
&\qquad\qquad+(\alpha_3-\alpha_4)^2+\ldots.+(\alpha_3-\alpha_n)^2\\
&\qquad\qquad\text{u. s. w.}\\
&\qquad\qquad\qquad+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2
\end{aligned}\right\};
\end{aligned}$$

und sind nun die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots., \alpha_n$ nicht sämmtlich unter einander gleich, so ist hiernach offenbar:

$$\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots.+\alpha_n^2}{n}>\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_n}{n}\right)^2,$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2+\ldots\ldots+\alpha_n{}^2}{n}>1;$$

daher nach dem Obigen:

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+\ldots\ldots+x_n'^2>x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\ldots\ldots+x_n{}^2.$$

Man wird also zu dem Schlusse berechtigt sein, dass $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\ldots\ldots+x_n{}^2$ wirklich ein Minimum ist, wenn man nur annehmen darf, dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots; \alpha_n$ nicht sämmtlich einander gleich sind. Wollte man nun aber annehmen, dass $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\ldots\ldots=\alpha_n$ wäre, so würde wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n}{n}=1$ offenbar $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\ldots\ldots=\alpha_n=1$, also nach dem Obigen:

$$x_1'=\frac{\Delta}{n},\quad x_2'=\frac{\Delta}{n},\quad x_3'=\frac{\Delta}{n},\ldots\ldots,\ x_n'=\frac{\Delta}{n}$$

und folglich $x_1'=x_1$, $x_2'=x_2$, $x_3'=x_3, \ldots\ldots, x_n'=x_n$ sein; es würde also zwischen den Correctionen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ und $x_1', x_2', x_3', \ldots\ldots, x_n'$ gar keine Verschiedenheit Statt finden, indem es ja doch eben in der Natur unserer ganzen vorstehenden Betrachtung lag, anzunehmen, dass $x_1', x_2', x_3', x_4', \ldots\ldots, x_n'$ von den Correctionen $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$ verschiedene Correctionen sind. Die Summe $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\ldots\ldots+x_n{}^2$ ist also wirklich ein Minimum, wie behauptet wurde.

XLIII.

Miscellen.

Allgemeiner Satz vom Viereck und Satz vom umschriebenen Viereck.

Von dem Herausgeber.

Wenn *abcd* (Taf. IX. Fig. 3.) ein Viereck ist und der Punkt *o* eine solche Lage hat, dass, wenn man *oa*, *ob*, *oc*, *od* zieht, $\Delta oab+\Delta ocd=\Delta obc+\Delta oad$ ist; so liegt der Punkt *o* immer in der durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen *ac*, *bd* des Vierecks [illegible] enden.

Beweis. Aus der Gleichung

$\Delta oab + \Delta ocd = \Delta obc + \Delta oad$ folgt: $\Delta oab - \Delta obc = \Delta oad - \Delta ocd$.

Ist nun m der Mittelpunkt der Diagonale ac und man denkt sich von a, c, m auf ob die Perpendikel aa', cc', mm' gefällt, so ist offenbar:

$$mm' = \tfrac{1}{2}(aa' - cc'),$$

und folglich:

$$\Delta oab - \Delta obc = \tfrac{1}{2}.ob.(aa' - cc') = ob.mm',$$

also:

$$\Delta oab - \Delta obc = 2.\Delta obm.$$

Denkt man sich ferner von a, c, m auf od die Perpendikel aa'', cc'', mm'' gefällt, so ist offenbar:

$$mm'' = \tfrac{1}{2}(aa'' - cc''),$$

und folglich:

$$\Delta oad - \Delta ocd = \tfrac{1}{2}.od.(aa'' - cc'') = od.mm'',$$

also: $\Delta oad - \Delta ocd = 2.\Delta odm$. Daher ist:

$$2.\Delta obm = 2.\Delta odm, \quad \Delta obm = \Delta odm.$$

Die beiden gleichen Dreiecke obm und odm haben aber die gemeinschaftliche Grundlinie om, und müssen also in Bezug auf dieselbe gleiche Höhen haben, oder ihre Spitzen b und d müssen von om gleich weit entfernt sein, woraus sich durch eine einfache Betrachtung rechtwinkliger congruenter Dreiecke auf der Stelle ergiebt, dass die Linie om, gehörig verlängert, die Diagonale bd in ihrem Mittelpunkte n treffen muss, womit der Satz bewiesen ist.

Ist nun $abcd$ ein um einen Kreis, dessen Mittelpunkt o ist, beschriebenes Viereck, so ist der Punkt o von den vier Seiten ab, bc, cd, da gleich weit entfernt, und nach einer bekannten Eigenschaft des um den Kreis beschriebenen Vierecks ist

$ab + cd = bc + ad$, also offenbar: $\Delta oab + \Delta ocd = \Delta obc + \Delta oad$.

Also ergiebt sich aus dem vorher bewiesenen Satze unmittelbar die merkwürdige Eigenschaft des um den Kreis beschriebenen Vierecks, dass der Mittelpunkt des Kreises immer auf der durch die Mittelpunkte seiner beiden Diagonalen gehenden Geraden liegt.

(Dem Wesentlichen nach entlehnt aus: **Des methodes en Géométrie, par Paul Serret.** Paris. 1855. p. 9. Der letzte,

eine Eigenschaft des um einen Kreis beschriebenen Vierecks aussprechende Satz wird von Serret als „Théorème de Newton“ bezeichnet.)

Einige Sätze der Elementar-Geometrie.

Von dem Herausgeber.

In demselben interessanten Buche führt Herr Paul Serret p. 14. auf als: **Neuvième méthode.** Par les lignes, les aires ou les volumes auxiliaires, und erläutert diese Methode, wie er bei allen Methoden meistens in sehr instructiver Weise thut, durch die folgenden Elementarsätze, von denen wenigstens die beiden ersten natürlich allgemein bekannt sind, hier es jedoch nur auf die von Herrn S. zur Erläuterung der Methode gegebenen Beweise ankommt, die vielleicht nicht so allgemein bekannt sind und deshalb hier mitgetheilt werden sollen, um zugleich die Leser auf das genannte Buch aufmerksam zu machen.

Theorem I. Von den sechs Segmenten, welche eine geradlinige Transversale auf den Seiten eines Dreiecks abschneidet, ist das Product dreier nicht zusammenstossender dem Producte der drei anderen gleich.

Beweis. Bezeichnen wir (Taf. IX. Fig. 4.) die Flächenräume der Dreiecke bAc, cBa, aCb respective durch ΔA, ΔB, ΔC; so hat man nach einem bekannten Elementarsatze der ebenen Geometrie *):

---

*) Gewöhnlich wird der hier zur Anwendung kommende Elementarsatz nur für Parallelogramme und Dreiecke bewiesen, welche einen Winkel gemein haben oder in denen zwei Winkel einander gleich sind; dass aber der Satz auch für Parallelogramme und Dreiecke gilt, in denen zwei Winkel zusammen zwei rechte Winkel betragen, erhellet sehr leicht. Sind nämlich in Taf. IX. Fig. 5. etwa ABC und BDE zwei Dreiecke, in denen die Summe der Winkel ABC und DBE zwei rechte Winkel beträgt, so dass diese Winkel Nebenwinkel von einander sind oder als solche betrachtet werden können; so ziehe man CE und hat dann unmittelbar die folgenden Proportionen:

$$\Delta ABC : \Delta BCE = AB : BE,$$
$$\Delta BCE : \Delta BDE = BC : BD;$$

also durch Zusammensetzung:

$$\Delta ABC : \Delta BDE = AB.BC : BD.BE,$$

wie bewiesen werden sollte.



$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{Ac.bc}{Bc.ca},$$
$$\frac{\Delta B}{\Delta C}=\frac{Ba.ca}{Ca.ab},$$
$$\frac{\Delta C}{\Delta A}=\frac{Cb.ab}{Ab.bc}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen in einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man auf der Stelle die Gleichung:

$$1=\frac{Ac.Ba.Cb}{Bc.Ca.Ab}, \text{ also: } Ac.Ba.Cb=Bc.Ca.Ab,$$

wie bewiesen werden sollte.

Theorem II. Die drei Geraden, welche aus den Ecken eines Dreiecks sämmtlich durch einen und denselben Punkt gezogen sind, bestimmen auf den Seiten des Dreiecks sechs Segmente, von denen das Product dreier nicht zusammenstossender dem Producte der drei anderen gleich ist.

Beweis. Mit Rücksicht auf Taf. IX. Fig. 6. wollen wir die Flächenräume der sechs Dreiecke

$$BOa,\ COa;\ COb,\ AOb;\ AOc,\ BOc$$

respective durch

$$\Delta a,\ \Delta a';\ \Delta b,\ \Delta b';\ \Delta c,\ \Delta c'$$

bezeichnen; dann hat man nach einem bekannten Elementarsatze die Gleichungen:

$$\frac{\Delta a}{\Delta a'}=\frac{Ba}{Ca},\quad \frac{\Delta b}{\Delta b'}=\frac{Cb}{Ab},\quad \frac{\Delta c}{\Delta c'}=\frac{Ac}{Bc};$$

also durch Multiplication:

$$1)\ \ldots\ldots\ \frac{\Delta a.\Delta b.\Delta c}{\Delta a'.\Delta b'.\Delta c'}=\frac{Ba.Cb.Ac}{Ca.Ab.Bc}.$$

Nach dem bei dem Beweise von Theorem I. angewandten Elementarsatze hat man aber ferner:

$$\frac{\Delta a}{\Delta b'}=\frac{OB.Oa}{OA.Ob},\quad \frac{\Delta b}{\Delta c'}=\frac{OC.Ob}{OB.Oc},\quad \frac{\Delta c}{\Delta a'}=\frac{OA.Oc}{OC.Oa};$$

also durch Multiplication:

$$2)\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{\Delta a.\Delta b.\Delta c}{\Delta a'.\Delta b'.\Delta c'}=1.$$

Durch Vergleichung der Gleichungen 1) und 2) folgt unmittelbar:

$$\frac{Ba.Cb.Ac}{Ca.Ab.Bc}=1,$$

also:

$$Ba.Cb.Ac=Ca.Ab.Bc$$

oder:

$$Ac.Ba.Cb=Ab.Bc.Ca,$$

wie bewiesen werden sollte.

Theorem III. Wenn in Taf. IX. Fig. 7. der Punkt O eine Ecke eines regelmässigen Octaeders ist, und der derselben entsprechende Winkel des Octaeders von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, welche die in O zusammenstossenden Kanten des Octaeders in den Punkten A, B, C, D schneidet; so findet immer die Gleichung:

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}=\frac{1}{OB}+\frac{1}{OD}$$

Statt *).

Beweis. Man ziehe die Diagonalen AC und BD des Vierecks $ABCD$, so hat man die Identität:

$$\text{Pyr. } OABC+\text{Pyr. } OACD=\text{Pyr. } OBDA+\text{Pyr. } OBCD.$$

Bezeichnet man nun die Höhen der Pyramiden $OABC$, $OACD$ in Bezug auf die gemeinschaftliche Basis AOC durch H_b, H_d; die Höhen der Pyramiden $OBDA$, $OBCD$ in Bezug auf die gemeinschaftliche Basis BOD durch H_a, H_c, so ist:

$$\begin{aligned}
\text{Pyr. } OABC &= \tfrac{1}{3}.H_b.\Delta AOC,\\
\text{Pyr. } OACD &= \tfrac{1}{3}.H_d.\Delta AOC;\\
\text{Pyr. } OBDA &= \tfrac{1}{3}.H_a.\Delta BOD,\\
\text{Pyr. } OBCD &= \tfrac{1}{3}.H_c.\Delta BOD.
\end{aligned}$$

Weil nach den Eigenschaften des Octaederwinkels die Dreiecke AOC und BOD bei O gleiche Winkel haben, so ist:

$$\frac{\Delta BOD}{\Delta AOC}=\frac{OB.OD}{OA.OC},$$

also:

$$\Delta BOD=\frac{OB.OD}{OA.OC}.\Delta AOC,$$



*) Der Erfinder des Satzes ist Levy.

folglich:

$$\text{Pyr. } OABC = \tfrac{1}{6}.H_b.\Delta AOC,$$

$$\text{Pyr. } OACD = \tfrac{1}{6}.H_d.\Delta AOC;$$

$$\text{Pyr. } OBDA = \tfrac{1}{6}.H_a.\frac{OB.OD}{OA.OC}.\Delta AOC,$$

$$\text{Pyr. } OBCD = \tfrac{1}{6}.H_c.\frac{OB.OD}{OA.OC}.\Delta AOC.$$

Offenbar sind ferner OA, OB, OC, OD gegen die Ebenen AOC und BOD sämmtlich gleich geneigt, und es ist also:

$$H_a:H_b:H_c:H_d = OA:OB:OC:OD$$

oder

$$H_b = \frac{OB}{OA}.H_a, \quad H_c = \frac{OC}{OA}.H_a, \quad H_d = \frac{OD}{OA}.H_a;$$

folglich:

$$\text{Pyr. } OABC = \tfrac{1}{6}.\frac{OB}{OA}.H_a.\Delta AOC,$$

$$\text{Pyr. } OACD = \tfrac{1}{6}.\frac{OD}{OA}.H_a.\Delta AOC;$$

$$\text{Pyr. } OBDA = \tfrac{1}{6}.\frac{OB.OD}{OA.OC}.H_a.\Delta AOC,$$

$$\text{Pyr. } OBCD = \tfrac{1}{6}.\frac{OB.OD}{OA.OC}.\frac{OC}{OA}.H_a.\Delta AOC.$$

Setzt man nun diese Ausdrücke in die identische Gleichung, von welcher wir ausgingen, so ergiebt sich, wenn man durch

$$\tfrac{1}{6}.H_a.\Delta AOC$$

dividirt, die Gleichung:

$$\frac{OB}{OA} + \frac{OD}{OA} = \frac{OB.OD}{OA.OC} + \frac{OB.OD}{OA.OC}.\frac{OC}{OA},$$

also, wenn man mit

$$OA.OC.OA$$

multiplicirt:

$$OA.OB.OC + OA.OC.OD = OA.OB.OD + OB.OC.OD,$$

und, wenn man nun mit

$$OA.OB.OC.OD$$

dividirt:

$$\frac{1}{OD}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{OC}+\frac{1}{OA}$$

oder

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}=\frac{1}{OB}+\frac{1}{OD},$$

wie bewiesen werden sollte.

Conjugirte Punkte der Ellipse.

Von dem Herausgeber.

Zwei Punkte einer Ellipse, deren Halbaxen wie gewöhnlich durch a, b bezeichnet werden, seien (xy) und $(x'y')$; so sind die Gleichungen der Normalen der Ellipse in diesen Punkten, wenn die laufenden Coordinaten durch u, v bezeichnet werden, bekanntlich:

$$v-y=\frac{a^2y}{b^2x}(u-x),$$

$$v-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(u-x');$$

oder, wie man leicht findet:

$$v-\frac{a^2y}{b^2x}u+\frac{e^2}{b^2}y=0,$$

$$v-\frac{a^2y'}{b^2x'}u+\frac{e^2}{b^2}y'=0.$$

Bezeichnet man die Entfernungen dieser beiden Normalen von dem Mittelpunkte der Ellipse durch p, p'; so ist nach einer bekannten Grundformel der analytischen Geometrie:

$$p^2=\frac{e^4x^2y^2}{a^4y^2+b^4x^2},\quad p'^2=\frac{e^4x'^2y'^2}{a^4y'^2+b^4x'^2};$$

oder, wie man mittelst der Gleichung der Ellipse leicht findet:

$$p^2=\frac{e^4x^2y^2}{b^2(a^4-e^2x^2)},\quad p'^2=\frac{e^4x'^2y'^2}{b^2(a^4-e^2x'^2)}$$

Sollen nun die beiden Punkte (xy) und $(x'y')$ der [illegible] solche Lage haben, dass die beiden denselben entsprech[illegible] malen gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt sind; [illegible]

$$\frac{x^2y^2}{a^4-e^2x^2}=\frac{x'^2y'^2}{a^4-e^2x'^2},$$

oder, weil

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\quad y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2)$$

ist:

$$x^2(a^2-x^2)(a^4-e^2x'^2)=x'^2(a^2-x'^2)(a^4-e^2x^2)$$

sein.

Ordnet man diese Gleichung nach x, so erhält man:

$$(a^4-e^2x'^2)x^4-\{a^2(a^4-e^2x'^2)+e^2x'^2(a^2-x'^2)\}x^2$$
$$=-a^4x'^2(a^2-x'^2)$$

oder:

$$(a^4-e^2x'^2)x^4-(a^6-e^2x'^4)x^2=-a^4x'^2(a^2-x'^2);$$

und löst man nun diese Gleichung in Bezug auf x^2 als unbekannte Grösse wie eine quadratische Gleichung auf, so erhält man zuvörderst auf der Stelle:

$$\left\{x^2-\frac{a^6-e^2x'^4}{2(a^4-e^2x'^2)}\right\}^2=\frac{(a^6-e^2x'^4)^2-4a^4x'^2(a^2-x'^2)(a^4-e^2x'^2)}{4(a^4-e^2x'^2)^2},$$

und hieraus ferner mittelst leichter Rechnung:

$$\left\{x^2-\frac{a^6-e^2x'^4}{2(a^4-e^2x'^2)}\right\}^2=\frac{e^4x'^8-4a^4e^2x'^6+2a^6(e^2+2a^2)x'^4-4a^{10}x'^2+a^{12}}{4(a^4-e^2x'^2)^2}.$$

Zieht man aber aus dem Zähler des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus, so findet man leicht, dass dieser Zähler das vollkommene Quadrat

$$(e^2x'^4-2a^4x'^2+a^6)^2$$

ist, und dass man also die Gleichung

$$\left\{x^2-\frac{a^6-e^2x'^4}{2(a^4-e^2x'^2)}\right\}^2=\left\{\frac{e^2x'^4-2a^4x'^2+a^6}{2(a^4-e^2x'^2)}\right\}^2$$

hat.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich durch Ausziehung der Quadratwurzel:

$$x^2 = \frac{a^6 - e^2x'^4 \pm e^2x'^4 \mp 2a^4x'^2 \pm a^6}{2(a^4 - e^2x'^2)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^4(a^2 - x'^2)}{a^4 - e^2x'^2} \\ \dfrac{x'^2(a^4 - e^2x'^2)}{a^4 - e^2x'^2} = x'^2. \end{cases}$$

Aus der Gleichung $x^2 = x'^2$ folgt $x = \pm x'$, und diese symmetrisch auf beiden Seiten der Nebenaxe liegenden Punkte der Ellipse, von denen sich von selbst versteht, dass die ihnen entsprechenden Normalen gleich weit von dem Mittelpunkte der Ellipse entfernt sind, wollen wir natürlich nicht weiter betrachten, indem wir vielmehr unser Augenmerk lediglich auf die durch die Gleichung

$$x^2 = \frac{a^4(a^2 - x'^2)}{a^4 - e^2x'^2}$$

bestimmten Punkte der Ellipse, in denen die Normalen auch gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt sind, und die man wohl **conjugirte Punkte** der Ellipse genannt hat, richten werden.

Man findet leicht:

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2(a^2 - e^2)x'^2}{a^4 - e^2x'^2} = \frac{a^2b^2x'^2}{a^4 - e^2x'^2},$$

also:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^4x'^2}{a^4 - e^2x'^2};$$

und weil

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2), \text{ also } a^2 - x'^2 = \frac{a^2y'^2}{b^2}$$

ist, so ist nach dem Obigen auch:

$$x^2 = \frac{a^6y'^2}{b^2(a^4 - e^2x'^2)}$$

oder

$$x^2 = \frac{a^4y'^2}{b^2\left(a - \frac{ex'}{a}\right)\left(a + \frac{ex'}{a}\right)};$$

folglich, wenn ϱ', ϱ_1' die beiden Vectoren des Pun[...] bezeichnen:

$$x^2 = \frac{a^4y'^2}{b^2\varrho'\varrho_1'} \ldots$$

Die Gleichung

$$x^2=\frac{a^4(a^2-x'^2)}{a^4-e^2x'^2}$$

bringt man leicht auf die symmetrische Form:

$$a^4(x^2+x'^2)-e^2x^2x'^2=a^6;$$

und setzt man nun:

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2),\quad x'^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y'^2);$$

so erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$b^4(y^2+y'^2)+e^2y^2y'^2=b^6;$$

hat also die beiden bemerkenswerthen Gleichungen:

$$a^4(x^2+x'^2)-e^2x^2x'^2=a^6,$$
$$b^4(y^2+y'^2)+e^2y^2y'^2=b^6;$$

oder:

$$a^4(x^2+x'^2-a^2)=\quad e^2x^2x'^2,$$
$$b^4(y^2+y'^2-b^2)=-e^2y^2y'^2;$$

folglich:

$$\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{x^2+x'^2-a^2}{y^2+y'^2-b^2}=-\frac{x^2x'^2}{y^2y'^2}$$

oder:

$$a^4(x^2+x'^2-a^2)y^2y'^2+b^4(y^2+y'^2-b^2)x^2x'^2=0.$$

Bezeichnet man jetzt die ersten Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Normalen mit der Hauptaxe der Ellipse durch u, u'; so ist nach den aus dem Obigen bekannten Gleichungen der Normalen:

$$-y=\frac{a^2y}{b^2x}(u-x),\quad -y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(u'-x');$$

also, wie man leicht findet:

$$u=\frac{e^2x}{a^2},\quad u'=\frac{e^2x'}{a^2};$$

oder:

$$x=\frac{a^2u}{e^2},\quad x'=\frac{a^2u'}{e^2};$$

folglich:

$$x^2 + x'^2 = \frac{a^4(u^2 + u'^2)}{e^4}, \quad x^2 x'^2 = \frac{a^8 u^2 u'^2}{e^8};$$

also nach dem Obigen:

$$a^2 e^2 (u^2 + u'^2) - a^2 u^2 u'^2 = e^6$$

oder:

$$\left\{\left(\frac{u}{e}\right)^2 + \left(\frac{u'}{e}\right)^2\right\} - \left(\frac{u}{e}\right)^2 \cdot \left(\frac{u'}{e}\right)^2 = \left(\frac{e}{a}\right)^2.$$

Bezeichnet man die Abscissen der Durchschnittspunkte der Normalen mit der Abscissenaxe in Bezug auf die Fusspunkte der Ordinaten als Anfangspunkte der Abscissen, — nämlich die mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Subnormalen, — durch s und s'; so ist:

$$s = u - x = \left(1 - \frac{a^2}{e^2}\right) u = -\frac{b^2 u}{e^2},$$

$$s' = u' - x' = \left(1 - \frac{a^2}{e^2}\right) u' = -\frac{b^2 u'}{e^2};$$

also:

$$u = -\frac{e^2 s}{b^2}, \quad u' = -\frac{e^2 s'}{b^2};$$

folglich:

$$u^2 + u'^2 = \frac{e^4 (s^2 + s'^2)}{b^2}, \quad u^2 u'^2 = \frac{e^8 s^2 s'^2}{b^8};$$

und daher nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$a^2 b^4 (s^2 + s'^2) - a^2 e^2 s^2 s'^2 = b^8$$

oder:

$$b^4 (s^2 + s'^2) - e^2 s^2 s'^2 = \frac{b^8}{a^2}.$$

Bezeichnet man die den Punkten (xy) und $(x'y')$ entsprechenden Krümmungshalbmesser der Ellipse durch r und r', so ist bekanntlich:

$$r = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}, \quad r' = \frac{(b^4 x'^2 + a^4 y'^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4};$$

also:

$$a^4 b^4 r = (b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}, \quad r' = (b^4 x'^2 + a^4 y'^2)^{\frac{3}{2}};$$

folglich:

$$a^2 b^2 (abr)^{\frac{2}{3}} = b^4 x^2 + a^4 y^2, \quad a^2 b^2 (abr')^{\frac{2}{3}} = b^4$$

oder:

$$(abr)^{\frac{2}{3}}=\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2-\frac{e^2x^2}{a^2},$$

$$(abr')^{\frac{2}{3}}=\frac{b^2}{a^2}x'^2+\frac{a^2}{b^2}y'^2=a^2-\frac{e^2x'^2}{a^2};$$

und hieraus:

$$x^2=\frac{a^2}{e^2}\{a^2-(abr)^{\frac{2}{3}}\},\quad x'^2=\frac{a^2}{e^2}\{a^2-(abr')^{\frac{2}{3}}\}.$$

Folglich ist:

$$x^2+x'^2=\frac{2a^4}{e^2}-\frac{a^2}{e^2}\{(abr)^{\frac{2}{3}}+(abr')^{\frac{2}{3}}\},$$

$$x^2x'^2=\frac{a^4}{e^4}\{a^2-(abr)^{\frac{2}{3}}\}\{a^2-(abr')^{\frac{2}{3}}\};$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{2a^6}{e^2}-\frac{a^6}{e^2}\{(abr)^{\frac{2}{3}}+(abr')^{\frac{2}{3}}\}-\frac{a^4}{e^2}\{a^2-(abr)^{\frac{2}{3}}\}\{a^2-(abr')^{\frac{2}{3}}\}=a^6,$$

oder:

$$2a^4-a^2\{(abr)^{\frac{2}{3}}+(abr')^{\frac{2}{3}}\}-\{a^2-(abr)^{\frac{2}{3}}\}\{a^2-(abr')^{\frac{2}{3}}\}=a^2e^2,$$

woraus sich die Gleichung:

$$a^4-(abr)^{\frac{2}{3}}.(abr')^{\frac{2}{3}}=a^2e^2,$$

also die Gleichung:

$$a^2b^2=(abr)^{\frac{2}{3}}.(abr')^{\frac{2}{3}},$$

oder, wie hieraus sogleich folgt, die Gleichung: $ab=rr'$, oder die Proportion $a:r=r':b$ ergiebt.

Der Inhalt der Ellipse ist bekanntlich $ab\pi$, also nach dem Vorstehenden $rr'\pi$.

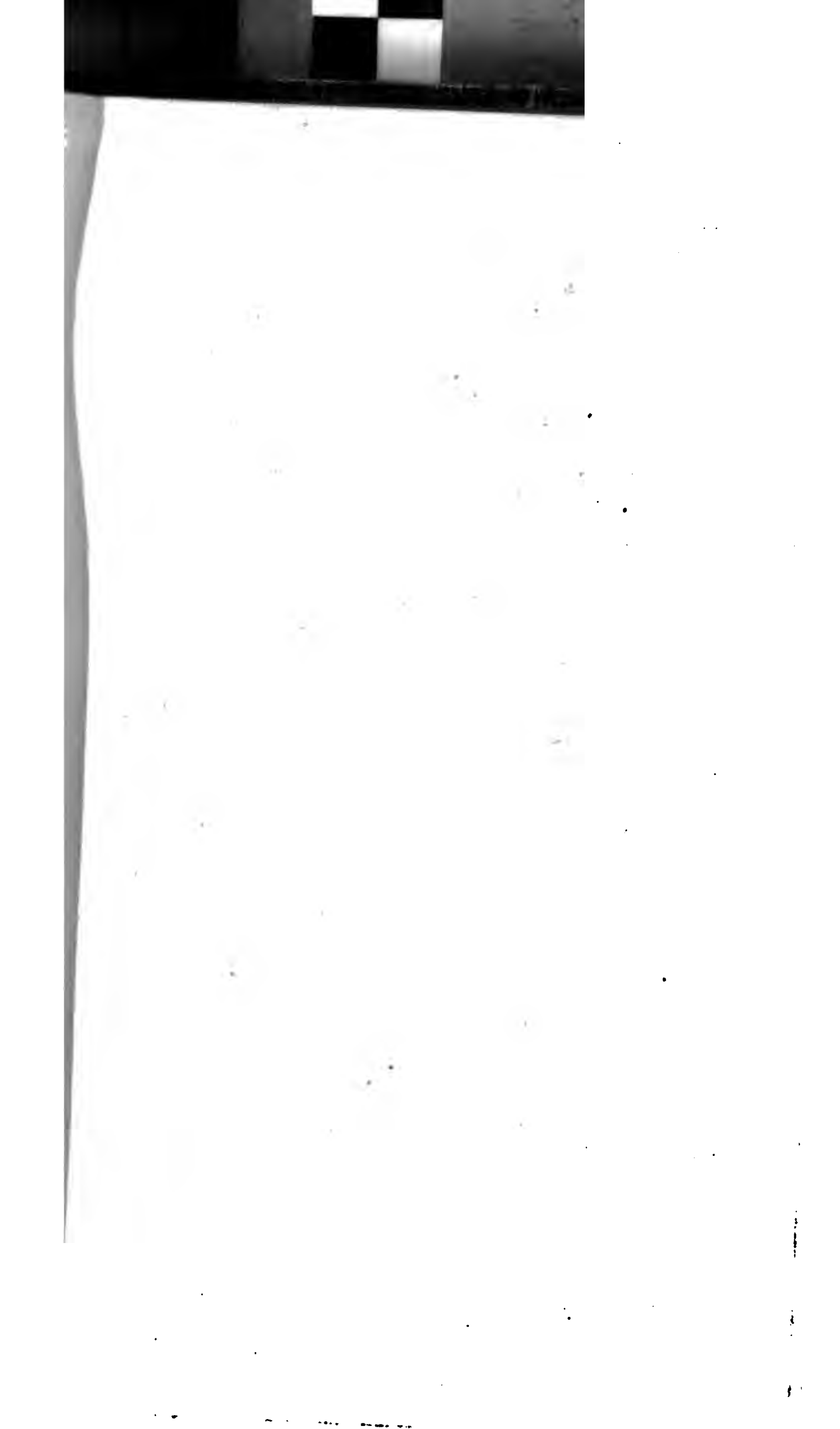
Diese leicht noch weiter zu führenden Bemerkungen haben nur den Zweck, diesen Gegenstand, namentlich auch mit Rücksicht auf die übrigen Kegelschnitte, zur Verwendung zu Uebungsaufgaben zu empfehlen, wozu mir derselbe nicht ungeeignet zu sein scheint.

Berichtigung.

S. 340. Z. 5 v. u. muss es in dem Integral-Ausdrucke von z im Zähler des Bruchs unter dem Integralzeichen $2dy$ statt $2ydy$ heissen.















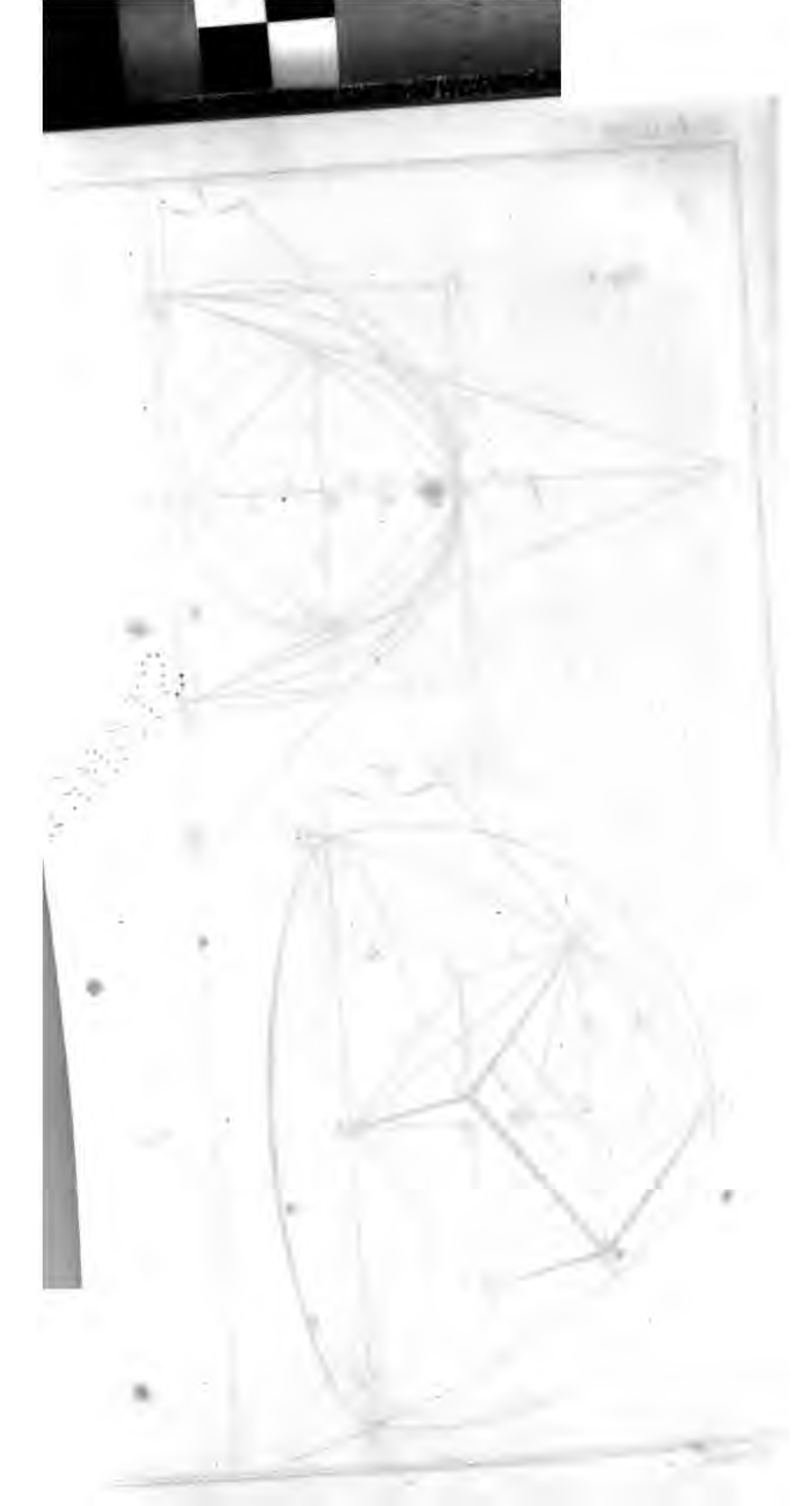




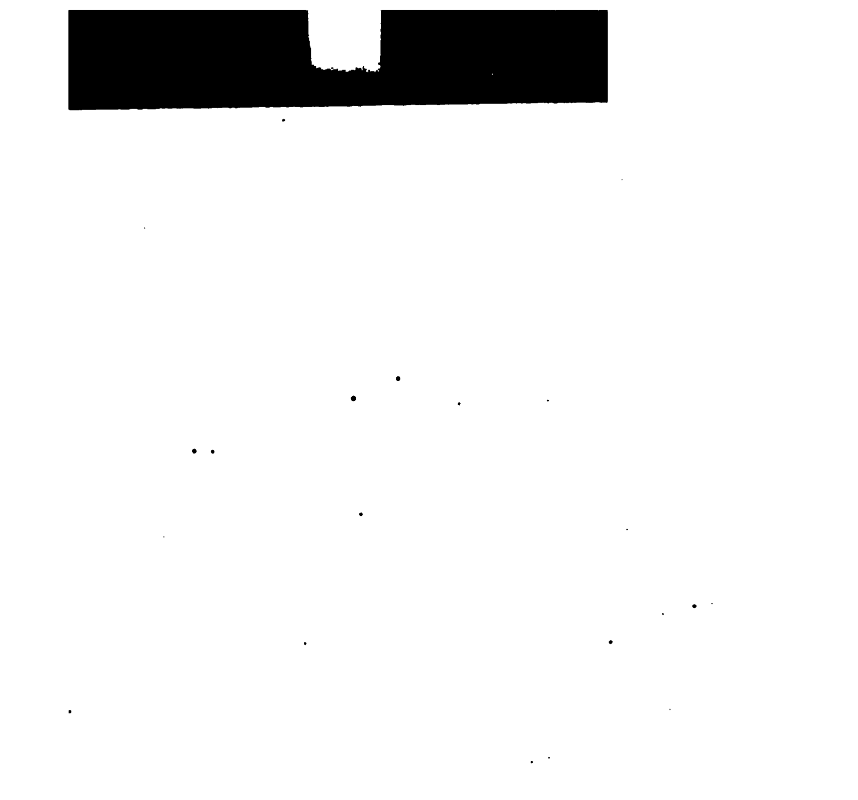




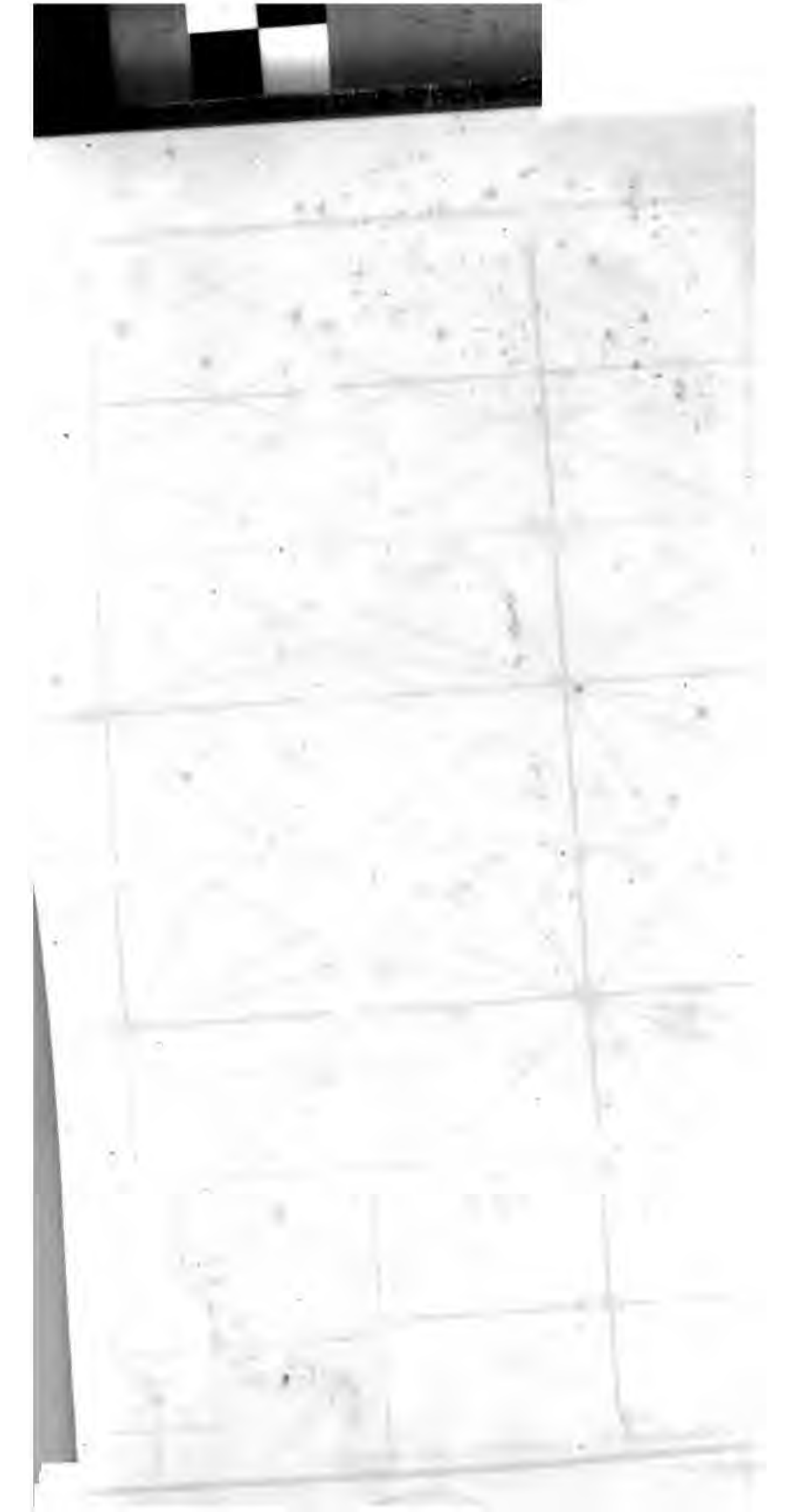


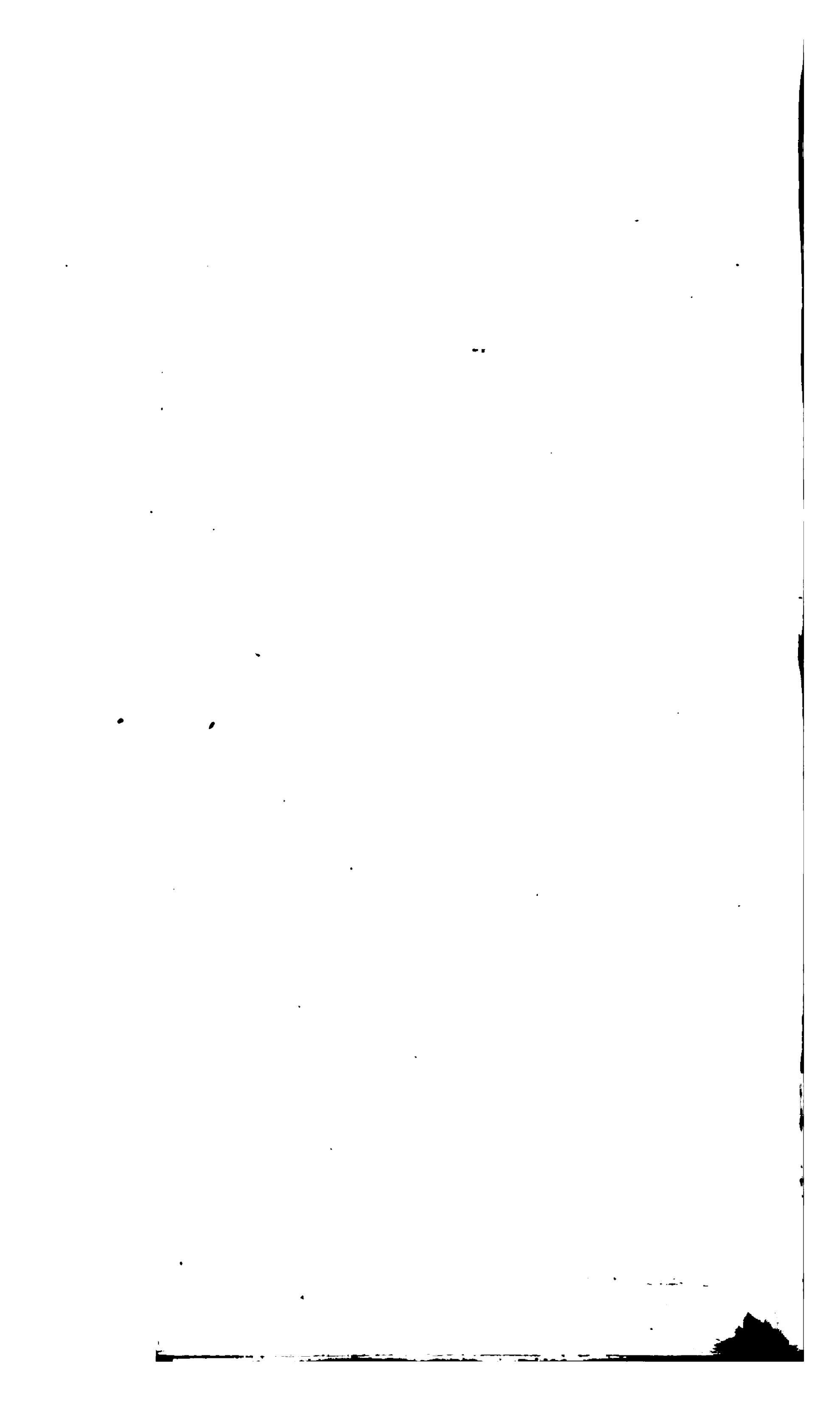


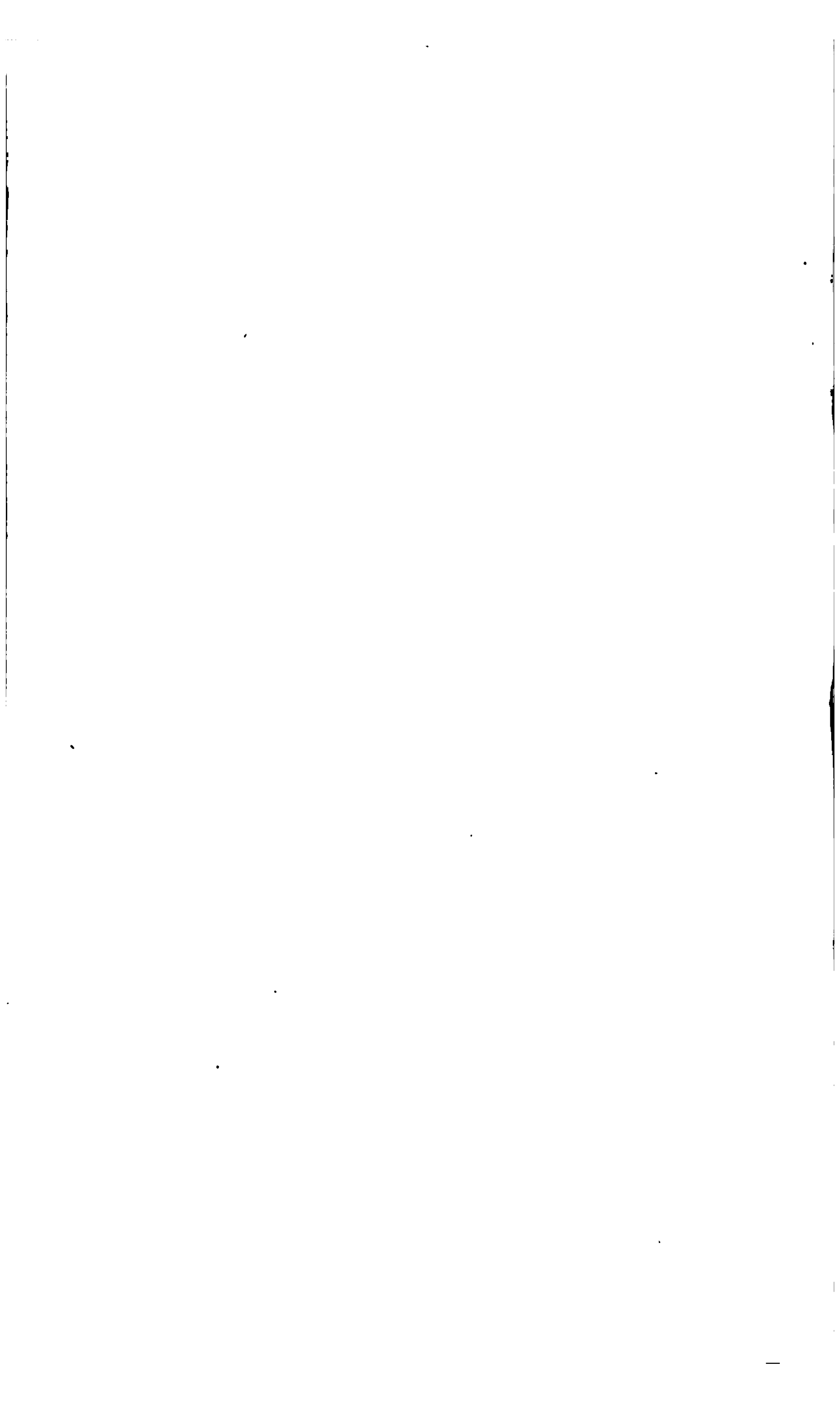












Literarischer Bericht

CLII.

In der Nacht vom 27.—28. April 1862 starb

Dr. Johann Heinrich Traugott Müller,

Oberschulrath in Wiesbaden. Das Archiv verdankt ihm mehrere werthvolle Beiträge, und wir wünschen sehr, dass uns ein Necrolog des vielfach verdienten Mannes recht bald mitgetheilt werden möge.

Am 27. Mai 1862 starb in der Blüthe der Jahre der am 4. Januar 1834 zu Verden im Königreich Hannover geborene

Dr. Carl Ferdinand Pape,

nach gründlicher Vorbereitung in den mathematischen und astronomischen Wissenschaften seit dem Jahre 1856 Calculator für die dänische Gradmessung und Observator an der Sternwarte in Altona. Er hat sich durch mehrere ausgezeichnete, in den astronomischen Nachrichten niedergelegte Arbeiten um die Wissenschaft verdient gemacht, und sein Andenken wird in Seegen bleiben. Er war der Schwiegersohn des hochverdienten Herausgebers des genannten Journals; eine trauernde Wittwe und zwei Kinder in zartem Alter überleben den trefflichen Mann.

In demselben Monat ist der Wissenschaft leider auch entrissen worden

Terquem,

der hochverdiente Herausgeber der Nouvelles Annales de Mathématiques. Einen besonderen Necrolog hoffen wir späterhin bringen zu können.

Geometrie.

Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. Memoria del Prof. Luigi Cremona, letta ai 7. di Marzo 1861 davanti all' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Estratta dagli Annali di Matematica pura ed applicata tom. IV. N. 2. Roma. Tipografia della S. Congreg. di propaganda fide. 1862. 4.

Eine vorläufige ganz kurze Anzeige dieser damals noch nicht erschienenen Schrift ist im Literar. Ber. Nr. CXLIII. nach einer im „Rendiconto. 1860—1861." der Akademie der Wissenschaften in Bologna abgedruckten Analyse derselben gegeben worden. Dieselbe liegt in einem vollständigen Abdrucke aus den „Annali di Matematica pura ed applicata" jetzt vor uns und liefert einen neuen Beweis für den Erfolg und den Scharfsinn, womit Herr L. Cremona sich der weiteren Ausbildung der reinen höheren Geometrie, namentlich rücksichtlich der allgemeinen Theorie der Curven widmet, und dadurch zur weiteren Verbreitung dieses schönen Theils der Mathematik in seinem Vaterlande wesentlich beiträgt. Der Herr Verfasser schliesst sich bei dieser Untersuchung hauptsächlich an die früheren Arbeiten von Cayley (Journal de Liouville. 1845.), Salmon (On the classification of curves of double curvature. Cambridge and Dublin Math. Journal. Vol. V. 1850. p. 23. und On the degree of the surface reciprocal to a given one. Transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXIII. Dublin. 1857) und Steiner (Ueber Flächen dritten Grades. Crelle's Journal. Thl. LIII. 1857.), zugleich mit Rücksicht auf die älteren Arbeiten von Plücker, an. In Folge der Untersuchungen dieser Mathematiker unterscheidet Herr L. Cremona zwei wesentlich verschiedene doppelt gekrümmte Curven der vierten Ordnung, welche als Durchschnitte zweier Flächen des zweiten Grades und einer Fläche der zweiten mit einer Fläche der dritten Ordnung aufzufassen sind. Die Existenz der zweiten doppelt gekrümmten Curve der vierten Ordnung ist zuerst von Salmon und Cayley nachgewiesen worden, und der Untersuchung dieser zweiten Curve ist die vorliegende Schrift gewidmet, in welcher nicht bloss die schon von Salmon und Steiner gefundenen Eigenschaften, sondern auch verschiedene andere neue Eigenschaften dieser Curve bewiesen, so wie namentlich auch eine (lineare) geometrische Construction (mediante intersezioni de' piani omologhi di tre fasci projettivi) gegeben worden. Ohne allen Calcul werden diese Untersuchungen, unstreitig mit grossem Scharf-

sinne, durchaus nur mittelst allgemeiner rein geometrischer Betrachtungen durchgeführt, wodurch denselben jedenfalls ein ganz besonderer Reiz und ein eigenthümliches Interesse verliehen wird. Näher auf das Detail dieser schönen Untersuchungen einzugehen, verbietet uns die Beschränktheit des Raums und der Zweck dieser literarischen Berichte, weshalb wir uns mit der vorstehenden allgemeinen Angabe der Tendenz der ausgezeichneten Schrift begnügen, aber Alle, die sich solchen rein geometrischen Betrachtungen mit Vorliebe widmen, dringend auf diese Schrift aufmerksam machen müssen, welche jedenfalls ein schönes Zeugniss von dem Scharfsinne ihres Verfassers und von dem Erfolge, mit welchem diese reine Geometrie der Curven auch in Italien gepflegt und bearbeitet wird, liefert.

Arithmetik.

Die Differential- und Integralrechnung, umfassend und mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule in Karlsruhe. 2te umgearbeitete Auflage. Stuttgart, Metzler'sche Buchhandlung. 1862. 8.

Die im Jahre 1857 erschienene erste Auflage dieses Werks, welche auch in's Russische übersetzt worden ist, ist im Literar. Ber. Nr. CXXII. S. 1. angezeigt worden. Die jetzt vollständig erschienene, aus drei Bänden bestehende zweite Auflage ist aber unbedingt als ein ganz neues Werk zu betrachten, in verschiedenen Punkten verbessert und nach allen Richtungen vervollständigt, so dass wir, und zwar nicht bloss in der deutschen Literatur, gegenwärtig kein Werk wüssten, welches die Differential- und Integralrechnung nach ihrem neuesten Zustande, namentlich auch mit Rücksicht auf die Arbeiten deutscher Mathematiker, so vollständig darstellte wie das vorliegende, das wir daher der weitesten Beachtung angelegentlichst empfehlen, und das nach unserer Ueberzeugung Niemand wird entbehren können, der die genannten Wissenschaften, ohne auf die eigentlichen Quellen zurückzugehen, in einigermaassen umfassender Weise kennen lernen will. Hiebei ist noch ganz besonders hervorzuheben, dass, ausser allen wichtigeren geometrischen Anwendungen, die Leser auch eine ziemlich grosse Anzahl lehrreicher und interessanter Anwendungen auf physikalische Gegenstände in dem Werke finden,

die mit besonderem Danke aufzunehmen und sehr dienlich sind, das tiefere Eindringen in die eigentliche Natur der Wissenschaft zu vermitteln. Ganz besonders verdienstlich ist jedenfalls die im dritten Bande enthaltene selbstständige Darstellung der Integration der partiellen Differentialgleichungen, die sehr dazu beitragen wird, die Bekanntschaft mit dieser wichtigen Partie der Integralrechnung zu erleichtern und weiter zu verbreiten, und in der sich, natürlich ganz mit Recht und der Natur der Sache völlig entsprechend, besonders viele Anwendungen auf Mechanik und Physik finden. Ueberall hat sich der Herr Verfasser einer völlig wissenschaftlichen Strenge der Darstellung in der anerkennungswerthesten Weise befleissigt, und dass er die Methode der Gränzen zu der Basis der ganzen Wissenschaft macht, bedarf einer Bemerkung wohl gar nicht weiter, da alle anderen Methoden gegenwärtig eine wissenschaftliche Berechtigung völlig verloren haben, als ganz antiquirt zu betrachten sind, und von gründlicheren Mathematikern auch nur einer Erwähnung nicht mehr für werth gehalten werden, insofern es sich nicht um die Geschichte der Wissenschaft handelt. Wir halten hiernach das vorliegende neue Werk, auf dessen Besprechung im Einzelnen bei seinem grossen Umfange wir hier natürlich nicht eingehen können, jedenfalls für eine Bereicherung unserer Literatur und empfehlen dasselbe nochmals dringend zu sorgfältigster Beachtung. Bei der Wichtigkeit des Werks halten wir es für nöthig, unseren Lesern durch die folgende Angabe des Hauptinhalts den grossen Umfang desselben vor die Augen zu führen.

Erster Band. (Mit 52 in den Text eingedruckten Figuren.) *Erstes Buch.* Differentialrechnung für Functionen mit einer unabhängig Veränderlichen. Integration solcher Functionen. Bestimmte einfache Integrale und Anwendungen derselben. I. Einleitung. Sätze aus der niedern Analysis. Gränzwerthe. II. Differentialquotient für Functionen einer einzigen unabhängigen Veränderlichen. III. Differentialquotienten höherer Ordnung. Bedeutung gewisser Differentialquotienten. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen. IV. Untersuchung der scheinbar unbestimmten Formen. V. Von den grössten und kleinsten Werthen für Functionen einer unabhängig Veränderlichen. VI. Das unbestimmte Integral. VII. Das bestimmte Integral. VIII. Anwendung der bestimmten Integrale auf Berechnung von Flächen- und Körper-Inhalten, so wie von Bogenlängen. IX. Die Theoreme von Taylor und Maclaurin, nebst deren Anwendungen. X. Die Sätze von Bürmann und Lagrange. XI. Näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals. — *Zweites*

Buch. Differentialrechnung für Functionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vielfache Integrale und deren Anwendung. XII. Differentialquotienten für Functionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vertauschung dieser letztern. Analytische Anwendungen. XIII. Vielfache Integrale. Anwendungen. XIV. Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale.

Zweiter Band. (Mit 15 in den Text eingedruckten Figuren.) *Drittes Buch.* Integration der Differentialgleichungen. XV. Die Differentialgleichungen erster Ordnung. XVI. Die Differentialgleichungen höherer Ordnung. XVII. Von den besondern Auflösungen der Differentialgleichungen. XVIII. Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen. *Viertes Buch.* Untersuchungen über bestimmte Integrale. Anhang. XIX. Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange. XX. Die elliptischen Integrale. XXI. Die Eulerschen Integrale oder die Gammafunctionen, so wie einige andere Functionen. XXII. Reduction vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden. Anhang: Uebungen und Zusätze enthaltend.

Dritter Band. Integration der partiellen Differentialgleichungen. I. Integration gleichzeitiger Differentialgleichungen mit partiellen Differentialquotienten erster Ordnung. II. Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. III. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen drei Veränderlichen. IV. Differentialgleichungen zwischen drei Veränderlichen zweiter Ordnung und nicht linearer Form, oder höherer Ordnung. V. Partielle Differentialgleichungen mit mehr als drei Veränderlichen. VI. Auflösung einiger Probleme der Hydrodynamik. VII. Die Laplace'sche Functionen. Anhang (welcher vorzüglich Probleme der höhern Mechanik, auch aus der physischen Astronomie, namentlich in Rücksicht auf das Störungsproblem, enthält).

Maschinenlehre.

Allgemeine Maschinenlehre. Ein Leitfaden für Vorträge, sowie zum Selbststudium des heutigen Maschinenwesens, mit besonderer Berücksichtigung seiner Entwickelung. Für angehende Techniker, Cameralisten, Landwirthe und Gebildete jeden Standes. Von Dr. Moritz Rühlmann, Professor an der polytechnischen Schule in Hannover. Mit zahlreichen Holzschn.

1. Bandes 2. Hälfte. Braunschweig. Schwetschke und Sohn. 1862. 8.

Die erste Hälfte des ersten Bandes dieses sehr verdienstlichen Werks ist im Literar. Ber. Nr. CXLVII. S. 4. angezeigt, und der allgemeine Charakter und die Tendenz desselben, wie wir glauben, dort schon so deutlich von uns dargelegt worden, dass hier etwas Weiteres darüber zu sagen überflüssig sein würde. Bemerken wollen wir daher nur, dass der Herr Verfasser seinen Zweck, vorzugsweise eine Beschreibung der Maschinen in mehr populärer Darstellungsweise zu liefern, unverrückt vor Augen behalten und sich, bei aller Kürze, doch der grössten Deutlichkeit und Klarheit befleissigt hat, welche die trefflichen Holzschnitte und überhaupt die in jeder Beziehung ausgezeichnete äussere Ausstattung nur noch zu erhöhen geeignet sind. Den sehr interessanten und instructiven geschichtlichen Einleitungen, die in einem Werke dieser Tendenz ganz an ihrem Orte sind, scheint in dieser zweiten Hälfte des ersten Bandes fast noch mehr Aufmerksamkeit gewidmet worden zu sein als in der ersten Hälfte dieses Bandes. Die in der früheren Anzeige von uns ausgesprochene Empfehlung dieses unserer Literatur Ehre machenden Werks können wir daher hier nur aus vollkommener Ueberzeugung wiederholen, und wollen nun im Folgenden für unsere Leser noch eine Uebersicht der Hauptheile des Inhalts dieser zweiten Hälfte geben:

Sechstes Kapitel. Theilmaschinen (Kreistheilmaschinen, Längentheilmaschinen nach vorausgeschickter sehr interessanter geschichtlicher Einleitung wie in allen Kapiteln, was wir nachher nicht überall noch besonders bemerken werden). **Zweite Abtheilung. Maschinen zur Verrichtung nützlicher mechanischer Arbeiten.** — I. Abschnitt. Erstes Kapitel. Maschinen zur Aufnahme der Menschenkräfte (Hebel, Kurbel, Lauf-, Tret- und Sprossenräder, Coignet-Maschinen). Zweites Kapitel. Maschinen zur Aufnahme der Thierkräfte (Göpel, Tretwerke, Trittmaschinen). — II. Abschnitt. Erstes Kapitel. Verticale Wasserräder (Eintheilung der Wasserräder, Räder in geradem Gerinne, Räder in gekrümmtem Gerinne, unterschlägige Wasserräder in freiem Strome; Kropfräder mit Durchlassschützen, mit Ueberfalleinlauf, mit Coulisseneinlauf; rückenschlägige Wasserräder, oberschlägige Wasserräder). Zweites Kapitel. Horizontale Wasserräder (Eintheilung, Fourneyron-Vollturbinen, Fourneyron-Partialturbinen, Henschel-Jonval-Turbinen, Turbinen ohne Leit-Curven-Apparate, die Turbinen im Vergleich mit den verticalen Wasserrädern).

Drittes Kapitel. Wassersäulenmaschinen (Reichenbachs Wassersäulenmaschinen, die neuesten Wassersäulenmaschinen). — III. **Abschnitt. Windräder. Erstes Kapitel.** (Geschichtliche Einleitung.) **Zweites Kapitel.** Die Bockwindmühle. **Drittes Kapitel.** Die holländische Windmühle (Allgemeines über Windräder). — IV. **Abschnitt. Dampfmaschinen. Erstes Kapitel.** (Geschichtliche Einleitung.) **Zweites Kapitel.** (Eintheilung der Dampfmaschinen, Steuerungen bei Dampfmaschinen im Allgemeinen, verschiedene Expansions-Anordnungen, Condensatoren, Vorwärmer, Leistungsbestimmung der Dampfmaschinen durch directe und indirecte Messung). **Drittes Kapitel.** Dampfkessel und Zubehör (verschiedene Dampfkesselformen und deren Beurtheilung: Kofferkessel, Cylinderkessel, Kessel mit Sicderöhren, Kessel mit Vorwärmern, Kessel mit inwendigem Feuerheerde, Albansche und Henschelsche Kessel, beste Kessel für den Gewerbe- und Fabrikbetrieb, Dimensionsverhältnisse der Dampfkessel und zugehörige Feuerungs-Anlagen, Sicherheits-Vorrichtungen bei Dampfkesseln: Sicherheitsventile, Wasserstandsgläser, Probirhähne, Manometer; über Kesselsteinbildungen, Kessel-Explosionen). **Zusatz-Kapitel** (besondere Dampfmaschinen und andere Betriebsmaschinen zum Ersatze derselben).

Wir sehen den weiteren Fortsetzungen des verdienstlichen, einem Bedürfnisse in zweckmässiger Weise abhelfenden Werkes mit besonderem Verlangen entgegen, und werden dieselben sogleich zur Anzeige bringen, so bald sie zu unserer Kenntniss gelangen.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Liter. Ber. Nr. CLI. S. 6.)

29me Année, 2me Sér. T. IX. 1859. Occultation des pléiades, le 8 décembre 1859; notice de M. Ad. Quetelet. p. 11. — Note sur l'écoulement des eaux qui circulent à la surface de la terre; par M. Lamarle. p. 12. — Note sur la vitesse du bruit du tonnerre; par M. Montigny. p. 56. — Note sur quelques propriétés des lignes tracées sur une surface quelconque; par M. Ph. Gilbert. p. 46. — Sur la période annuelle de l'intensité horizontale du magnetisme terrestre; par M. Lamont. p. 116. — Ob-

servations de la lune et des étoiles de même culmination faites en 1859. Notice de M. Ernest Quetelet. p. 120. — Solution géométrique d'une série de problèmes relatifs à l'art des constructions; par M. Lamarle. p. 127. — Orage du 19 février 1860; note de M. Ad. Quetelet. p. 263. — Communication relative aux moyens de prémunir les édifices contre les ravages de la foudre; par M. de Vaux. p. 277. — Suite des observations sur la lumière zodiacale, faites à Münster, du 20 decembre 1859 et 23 février 1860, par M. Heis. p. 359. — Solution géométrique d'une série de problèmes relatifs à l'art des constructions; par M. Lamarle. (Suite et fin.) p. 361. — Projet de conférence internationale, pour étendre, sur le globe entier, le système des observations météorologiques adopté pour la mer, dans la Conférence de 1853. Lettre de M. Maury à M. Ad. Quetelet. p. 415. — Phénomènes météorologiques; par MM. Ad. Quetelet et Ernest Quetelet. p. 433.

29me Année, 2me Sér., T. X. 1860. Sur un nouveau système enregistreur des observations de tous les instruments météorologiques; par M. Ch. Noël. Rapport de M. Duprez. p. 6. — Recherches sur la capillarité, par M. Bède. Rapport de M. Plateau. p. 47. — Télégraphes. Note sur les effets de l'orage du 15 mai 1860, aux environs de Tirlemont; par M. Vinchent. p. 56. — Note sur l'éclypse de soleil du 18 juillet 1860, observée à l'Observatoire royal de Bruxelles; par M. Ernest Quetelet. p. 181. — Note sur l'éclipse partielle du soleil, observée à Kensington le 18 juillet 1860; par M. Ad. Quetelet. p. 185. — Détermination et comparaison des hauteurs barométriques sous l'influence des differents vents, avec les intensités et les temperatures de ces vents, d'après les observations faites à Bruxelles; par M. Ch. Montigny. p. 187. — Notice sur les paratonnerres; par M. Jaspar. p. 396. — Sur les étoiles filantes du 7 au 11 août 1860; notice de M. Ad. Quetelet. p. 410. — Sur les étoiles filantes du 10 août; Lettre de M. Duprez à M. Ad. Quetelet. p. 412. — Sur les étoiles du 10 août et sur les phénomènes périodiques en général. Lettre de M. Herrick à M. Ad. Quetelet. p. 414. — Note sur les principales perturbations magnétiques de 1860, par M. Ad. Quetelet. p. 420. — Aurores boréales observées pendant le mois d'août 1860; communication de M. Heis. p. 422. — Relevé des perturbations qui ont été constatées à Bruxelles dans le service des lignes télégraphiques les 8, 9, 10, 11 et 12 août 1860; communiqué le 13 août par M. Vinchant. p. 423. — Occultation des pléiades, observée à Bruxelles le 6 septembre 1860. p. 425. — Sur les protubérances rouges

observées pendant l'éclipse de soleil du 18 juillet 1860. Lettre de M. Lamont à M. Ad. Quetelet. p. 426. (Sehr richtig sagt Herr Lamont rücksichtlich der bekannten Frage wegen der Natur dieser Erscheinungen: „il faut convenir que l'application des lois connues de l'optique offre de grandes difficultés, parce qu'il est impossible dans l'expérience d'imiter les conditions qui existent dans la nature", worin wir ihm vollkommen beistimmen, und jedes Unternehmen, diese Erscheinungen auf dem Wege des Experiments nachahmen zu wollen, für ganz verfehlt und für von keiner richtigen Kenntniss und Erkenntniss, ja völliger Unkenntniss dessen, worauf es hier ankommt, zeugend halten. G.) — Intensité des vents, observée à Utrecht pendant les années 1849 à 1854. p. 510. — Sur les phénomènes périodiques des plantes et des animaux; par M. Ad. Quetelet. p. 518. — Note sur le développement homolographique des surfaces de révolution; par M. E. Lamarle. p. 530. — Sur la construction des paratonnerres; par M. Sacré. Rapport du major Liagre. p. 604. — Sur une nouvelle fonction génératrice des fonctions symmetriques, par M. F. Meier. p. 608. — Sur la construction des paratonnerres. Note de M. E. Sacré. p. 631. — Rapports der Herren Ad. Quetelet, Duprez, Liagre über zwei eingegangene Bearbeitungen der Aufgabe: „On demande d'exposer la théorie probable des étoiles filantes, et d'indiquer les hauteurs où elles se forment, apparaissent et s'éteignent, en appuyant cette théorie sur les faits observés.

30me Année, 2me Sér., T. XI. Sur le minimum de température à Bruxelles; par M. Ad. Quetelet. p. 9. — Extension générale du procédé suivi pour le développement homolographique des surfaces de révolution; par M. E. Lamarle. p. 42. — Sur une note de M. Florimond, concernant l'électricité atmosphérique. Rapport des MM. de Montigny et Gloesener. p. 156. — Sur une note de M. Ph. Gilbert, concernant la théorie des équations différentielles lineaires. Rapport de M. Timmermans. p. 176. — Sur la physique du globe; par M. Ad. Quetelet. p. 178. — Remarques sur la théorie des équations différentielles linéaires; par M. Ph. Gilbert. p. 200. — Observation de l'occultation des pléiades et du passage au méridien de la lune et des étoiles de même culmination, le 17 février 1861. Notice de M. A. Quetelet. p. 289. — Note sur l'inclinaison et la déclinaison de l'aiguille aimantée en 1860 et 1861. p. 316. — Note sur une aurore boréale observée le 9 mars 1861; par M. Ad. Quetelet. p. 317. — Note sur l'orage du 28 mars 1861; par le même. p. 318. — De l'état de la feuillaison et de la floraison, au com-

mencement de 1861; par le même. p. 319. — Note sur la détermination géométrique des hélicoïdes gauches susceptibles de s'appliquer l'un sur l'autre sans déchirure ni duplicature; par M. Lamarle. p. 321. — Sur la mesure de l'arc de parallèle européen de plus grand développement; par M. le général Nerenburger. p. 457. — Recherches sur la cause de l'influence du vent sur la pression atmosphérique; par M. Montigny. p. 467. (Ausführliche, wohl zu beachtende Abhandlung.) — Note sur des appareils servant à faciliter l'étude de la théorie des ondes lumineuses ou de la théorie des ondes sonores; par M. E. Rousseau. p. 507. — Observations sur les effets de la chaleur dans les siphons renversés à trois branches, qui fonctionnent à Bardonnèche au mont Cenis et du coté de Modane; par M. A. de Caligny. p. 627. — Note sur l'invention et la disposition, des vannes cylindriques dans les siphons renversés à trois branches qui fonctionnent à Bardonnèche; par le même. p. 633. — Suite des observations de la lumière zodiacale faites à Münster; par M. Heis. p. 640. — Étoiles filantes du mois d'août et du mois de novembre 1860; par le même. p. 642. — Aurores boréales en 1860 et 1861, observations recueillies; par le même. p. 644.

30me Année, 2me Sér. T. XII. 1861. Sur la grande comète de juillet 1861; par M. Ad. Quetelet. p. 14. — Variations des instruments de météorologie, pendant les orages du 20 et du 21 juin 1861; par M. Ad. Quetelet. p. 16. — Sur la statistique générale des différents pays; par M. Ad. Quetelet. p. 99. — Sur le système décimal; par M. Ad. Quetelet. p. 110. — Comète II de 1861. Observations de M. Ernest Quetelet. p. 111. — Étoiles filantes du mois d'août 1861. Notice de M. Ad. Quetelet. p. 173. — Sur le même phénomène observé aux États-Unis. Lettre adressée à M. Ad. Quetelet; par M. E. C. Herrick. p. 175. — Sur le même phénomène observé à Rome; par Mme Cather. Scarpellini. Lettre adressée à M. Ad. Quetelet. p. 180. — Sur la variation de l'inclinaison annuelle à l'Observatoire de Bruxelles; par M. Hansteen. Lettre à M. Ad. Quetelet. p. 186. — Aufmerksam machen wir noch auf die in der öffentlichen Sitzung vom 16. December 1861 von dem Präsidenten der Akademie Herrn Major Liagre gehaltene Rede über Stellar-Astronomie, worin natürlich hauptsächlich die Verdienste Herschel's und Struve's nach ihrem grossen Verdienst gewürdigt werden.

Literarischer Bericht
CLI.

Anzeige einer Büste von Kopernikus.

Ich erlaube mir Gipsabgüsse einer Büste von Nikolaus Kopernikus, die ich im Auftrage der Universität zu Krakau für das dortige Museum ausgeführt habe, zum Verkaufe anzubieten.

Dem Kopfe ist das Porträt von M. Baseti zu Grunde gelegt. Den Sockel bilden zwei Bücher mit den Aufschriften: Regiomontanus und Purbach. Die eigentliche Console zeigt vorn die Originalzeichnung des Weltsystemes von Kopernikus, die abgestumpften Ecken sind mit dem Astrolabium und der Armillarsphäre verziert, die linke Seitenfläche hat die Namen: Philolaus, Nicetas, Aristarchus, die rechte die Namen: Rheticus, Galilei, Kepler eingegraben. Das Ganze wird von einer Eule getragen, die das Jagellonische Wappen in ihren Klauen hält. Die Rückwand soll sich an einer Mauer befinden.

Ein Exemplar der etwas mehr als lebensgrossen, dem Originale völlig gleichen Büste liefere ich zu 50 Gulden österreichischer Währung in Banknoten; ein Exemplar der kleineren Nachbildung, sammt Tragstein 10 Zoll hoch, zu 6 fl., Verpackung und Spedition werden besonders verrechnet. — Geehrte Aufträge erbitte ich mir unter meiner Adresse bis letzten Juli d. J. nach Wien (Akademie der bildenden Künste) vom 1. August an nach Krakau.

Wien, den 28. Juni 1862.

Franz M. Wyspiański,
Bildhauer.

Nachschrift des Herausgebers.

Herr Bildhauer Wyspiański in Wien hat mir eine Photographie der im Vorstehenden angezeigten Büste von Kopernikus eingesandt, und ich muss sagen, dass ich durch die Schönheit derselben, namentlich durch den Ausdruck des Edelmuths und des Tiefsinns, welchen der talentvolle junge Künstler dem schönen Gesicht des unsterblichen Mannes zu geben verstanden hat, sehr erfreut worden bin, so dass ich für mich selbst ungesäumt ein kleineres Exemplar dieses Kunstwerkes bestellt habe, da das grössere für die bescheidenen Räume meiner Wohnung nicht passend ist. Es macht mir ganz besondere Freude, *alle* Mathematiker und Astronomen auf diese Büste aufmerksam machen zu können, und empfehle ihnen dieselbe recht sehr zur Anschaffung.

Greifswald, den 2. Juli 1862.

Grunert.

Geometrie.

Analytische Geometrie des Raumes, enthaltend *die* allgemeine Theorie der krummen Flächen, der gewundenen Kurven und der Linien auf den Flächen; die Eigenschaften der (homofokalen) Flächen zweiten Grades und der Linien auf denselben. Von Dr. Otto Böklen. Mit Figuren in Holzschnitten. Stuttgart. Becher's Verlag. 1861. 8.

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, von Dr. Otto Hesse, ordentl. Professor an der Universität zu Heidelberg. Leipzig. B. G. Teubner. 1861. 8.

Diese im vorigen Jahre erschienenen Schriften betreffen beide die Analytische Geometrie des Raumes, unterscheiden sich aber sowohl in Bezug auf den Inhalt, als auch in Bezug auf die Form oder die Methode der Behandlung, mehrfach wesentlich von einander. Beide sind nach unserer Ueberzeugung mit besonderem Dank aufzunehmende Erscheinungen auf dem Gebiete der deutschen mathematischen Literatur, und müssen einem Jeden, der sich für die neueren Fortschritte der analytischen Geometrie des Raumes interessirt, zu besonderer Beachtung empfohlen werden.

Das Buch des Herrn Böklen hat vorzugsweise die allgemeinsten Eigenschaften der Flächen und der Linien auf denselben

im Auge, ohne dabei in eingehender, vorzugsweise aber immer hauptsächlich das Allgemeinere im Auge behaltender Weise, eine besondere Betrachtung der Flächen des zweiten Grades auszuschliessen, und wir sind der Meinung, dass man jetzt in keinem anderen Buche eine gleich vollständige Darstellung aller dieser höchst merkwürdigen allgemeinen Eigenschaften der Flächen finden dürfte, unter denen keine geringe Anzahl von dem Herrn Verfasser selbst gefundener neuer Sätze vorkommt. Die Methode der Behandlung kann man eine rein analytische nicht nennen, indem der Herr Verfasser vielmehr seinen Untersuchungen häufig geometrische Anschauungsweisen zu Grunde legt und vielfach die Hülfe des sogenannten Unendlichkleinen in Anspruch nimmt. Eben deshalb kommen auch, wenigstens nicht besonders hervortretend, allgemeine analytische Transformationen nicht vielfach vor, wenn man nicht hierher den allerdings in sehr grosser Ausdehnung gemachten Gebrauch der sogenannten elliptischen Coordinaten rechnen will. Wir gestehen, dass diese, um so zu sagen, mehr geometrische Seite des Buchs uns, wenn wir auch selbst die rein analytische Behandlung mit Vorliebe pflegen, ein ganz besonderes Interesse abgewonnen und uns von Neuem gezeigt hat, wie leicht diese Behandlungsweise oft zu überraschenden Resultaten führt. Es ist also, ausser der ungemein grossen Reichhaltigkeit des Stoffs, namentlich auch diese Art der Behandlung, welche das Buch für einen Jeden, der die neuere Geometrie der Flächen kennen lernen will, so empfehlenswerth macht. Die folgende Angabe des Inhalts wird den Lesern zeigen, was sie rücksichtlich des Stoffs in dem Buche zu erwarten haben: §. 1. Von den Winkeln zwischen Geraden und Ebenen. §. 2. Die Tangentialebene und Normale einer Fläche. §. 3. Konjugirte Tangenten. §. 4. Die Krümmungslinien. §. 5. Ueber die unendlich nahen Normalen einer Fläche. §. 6. Die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte. §. 7. Die Grössen δ und γ. §. 8. Die Krümmungshalbmesser der schiefen Schnitte. §. 9. Die Suroskulations-Normalkreise. §. 10. Ueber konjugirte Liniensysteme. §. 11. Andere Form der Gleichungen für die Normale und Tangentialebene. §. 12. Die gewundenen Kurven. §. 13. Die gewundenen Kurven. Fortsetzung. § 14. Die gewundenen Kurven. Schluss. §. 15. Die Linien auf den Flächen. §. 16. Die Linien auf den Flächen. Fortsetzung. §. 17. Die Linien auf den Flächen. Schluss. §. 18. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grades. Das Ellipsoid und die Hyperboloide. §. 19. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grades. Fortsetzung. Der Kegel. §. 20. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grades. Schluss. Die Paraboloide. §. 21. Die homofokalen

centrischen Flächen zweiten Grades. Das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide. §. 22. Die homofokalen centrischen Flächen zweiten Grades. Fortsetzung. §. 23. Die Krümmungslinien der centrischen homofokalen Flächen. §. 24. Die geodätischen Linien auf den centrischen homofokalen Flächen. §. 25. Die geodätischen Linien auf den centrischen homofokalen Flächen. Fortsetzung. §. 26. Allgemeine Gleichung der Linien auf den centrischen Flächen zweiten Grades. §. 27. Die homofokalen Flächen zweiten Grades. Homofokale Kegel. §. 28. Die homofokalen Flächen zweiten Grades. Homofokale Paraboloide. §. 29. Die homofokalen Flächen zweiten Grades. Homofokale Paraboloide. Schluss. §. 30. Ueber krummlinige Coordinaten und coordinirte Flächen. Anhang.

Man muss den Reichthum unserer Wissenschaft wahrhaft bewundern, wenn man die vielen überaus merkwürdigen allgemeinen Eigenschaften kennen lernt, welche keineswegs nach bestimmten Gesetzen, sondern überhaupt nur in irgend einer Weise gesetzmässig gekrümmte Flächen und Linien haben; und diesen Reichthum zu documentiren, scheint uns das vorliegende Buch besonders geeignet.

Das Buch des Herrn Hesse, in seiner Art jedenfalls eben so empfehlenswerth wie das vorhergehende, beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie der Flächen nicht (nur die Vorlesungen XXVII, XXVIII, XXIX enthalten Allgemeineres über Flächen), sondern ist fast ausschliesslich den Flächen der zweiten Ordnung gewidmet. Die Darstellung ist nicht bloss eine rein analytische zu nennen, sondern enthält zugleich einen sehr grossen Reichthum scharfsinniger und höchst interessanter allgemeiner analytischer Transformations- und Substitutions-Methoden, denen der Herr Verfasser überall eine solche Allgemeinheit verleihet, dass sie, um so zu sagen, den Charakter allgemeiner analytischer Untersuchungs-Methoden erhalten und annehmen, wobei zugleich verschiedene Coordinatensysteme in Anwendung gebracht und in analytischer Allgemeinheit dargestellt werden, in welcher Beziehung wir namentlich eine in mehrfacher Beziehung meisterhafte Darstellung der elliptischen Coordinaten in der Ebene und der elliptischen Raumcoordinaten in der 21sten und 22sten Vorlesung, so wie ganz besonders auch die darauf gegründete Theorie der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid, wo auf S. 81. auch das vollständige Integral dieser Linien vorkommt, hervorheben. Dass unter den allgemeinen Transformations-Methoden auch die Determinanten eine grosse Rolle spielen, versteht sich bei einem Verfasser, dem die Theorie dieser Grössenformen so wesentliche

Bereicherungen verdankt, ganz von selbst. Wir glauben hiedurch das ausgezeichnete und in jeder Beziehung dringend zur Beachtung zu empfehlende Buch, so weit es hier der Raum gestattet, im Allgemeinen hinreichend charakterisirt zu haben, und wollen nur noch durch die folgende Angabe des Hauptinhalts dem Leser zeigen, wie viel Wichtiges und Interessantes ihm hier geboten wird: I. Einleitung. II. Die Ebene im Raume. III. Ebenen im Raume. IV. Das Pascal'sche Sechseck und damit verwandte Figuren. V. Der Punkt im Raume und Punkte im Raume. VI. Homogene Coordinaten. Gerade Linien im Raume. VII. Determinanten. VIII. Ganze homogene Functionen. IX. Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. X. Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung. XI. Weitere allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung. XII. Fortsetzung der zehnten Vorlesung über Pole und Polarebenen der Oberflächen zweiter Ordnung. Reciprocität. XIII. Mittelpunkt der Oberfläche zweiter Ordnung. Transformation der Coordinaten mit Beibehaltung der Richtung der Coordinatenaxen. XIV. Criterium des Kegels zweiter Ordnung. Tangenten-Pol der Oberfläche zweiter Ordnung. XV. Criterium der Grenzfläche zweiter Ordnung. Die Schnittcurven einer Ebene und einer Oberfläche zweiter Ordnung als Grenzfläche zweiter Ordnung aufgefasst. XVI. Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen. XVII. Grenzflächen zweiter Ordnung, welche acht beliebig gegebene Ebenen berühren. XVIII. Transformation homogener Functionen zweiter Ordnung durch lineare homogene Substitutionen. XIX. Lineare Coordinaten-Transformation. Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkt. XX. Transformation der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen. XXI. Das Problem der Hauptaxen der Curven zweiter Ordnung. Confocale Kegelschnitte und elliptische Coordinaten in der Ebene. XXII. Das Problem der Hauptaxen der Oberflächen zweiter Ordnung. Confocale Oberflächen zweiter Ordnung. Confocale Oberflächen zweiter Ordnung und elliptische Raumcoordinaten. XXIII. Kürzeste Linien auf dem Ellipsoid. XXIV. Focalcurven der Oberflächen zweiter Ordnung. XXV. Geometrische Deutung der kubischen Gleichung $\Delta=0$, von welcher die Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängen. XXVI. Bedingungen für die Rotationsoberflächen zweiter Ordnung. XXVII. Schnitte von Oberflächen zweiter Ordnung mit Ebenen. Kreisschnitte. XXVIII. Krümmungsradien der Normalschnitte und schiefen ebenen Schnitte der Oberflächen. XXIX. Krümmungs-Curven der Oberflächen. XXX. Das Theorem von Dupin.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CL. S. 15).

28me Année, 2me Sér. T. VI. 1859. Théorie *géométrique* des rayons et centre de courbure; par M. Lamarle. p. 11. (*alle* diese geometrischen Untersuchungen des Herrn Lamarle zeichnen sich durch grosse Einfachheit aus und verdienen nach unserer Ueberzeugung alle Beachtung, was wir früher, auch im Archiv selbst, schon öfter ausgesprochen haben). — Sur la théorie analytique des coniques; par M. Schaar. p. 42. (allgemeine Sätze über die Kegelschnitte, die Herr Schaar mit grösserer Einfachheit zu beweisen sucht, als dies durch das Cartesische Coordinatensystem möglich ist). — Sur les observations météorologiques faites à Gand en 1858; par M. Duprez. p. 68. — Sur un mémoire de M. Steichen concernant les cinq polyèdres réguliers. Rapports de MM. Timmermans, Lamarle, Nerenburger (betrifft den Satz, dass das Trägheitsmoment eines homogenen regulären Polyeders für alle durch den Mittelpunkt gehende Axen constant ist, welchen Herr St. schärfer als dies gewöhnlich geschieht zu begründen sucht). p. 152. — Influence du son des cloches sur la hauteur du baromètre; par M. Montigny. p. 159. — Sur les variations des éléments des orbites planétaires; par M. Schaar. p. 171. — Note sur une classe particulière de surfaces à aire minima; par M. Lamarle. p. 329. (guter Beitrag zur Variationsrechnung, worin Herr L. auch Bezug auf Physik nimmt). — Table de mortalité pour le Brabant, d'après les documents du recensement de 1856; par M. Ad. Quetelet. p. 345. — Sur le magnétisme terrestre; par M. Hansteen. p. 348. — Sur les étoiles filantes périodiques du mois d'août 1858, observées en Allemagne. Lettre de M. Heis à M. Quetelet. p. 360. — Recherches sur la capillarité; par M. E. Bède. p. 405. — Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation; par M. Lamarle (Suite). p. 412. — Sur l'intensité magnétique; par M. Hansteen. p. 462.

28me Année, 2me Sér. T. VII. 1859. Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation; par M. Lamarle. p. 7. — Sur les variations des éléments des orbites planétaires; par M. Schaar. p. 44. (Beide Abhandlungen sind sehr wohl zu beachten). — Note sur l'aurore boréale du 21 avril 1859; par

M. **Ern. Quetelet.** p. 72. — Notice sur les aimants de fer de fonte trempée; par M. **Florimond.** p. 332. Rapport de M. **Gloesener.** — Occultation de Saturne par la lune, le 8. mai 1859, à l'Observatoire royal de Bruxelles. p. 337. — Grêle extraordinaire observée à Bruxelles; par M. A. **Quetelet.** p. 352. — Réduction du temps des oscillations d'une aiguille aimantée à un arc evanouissant. Lettre de M. **Hansteen** à M. **Ernest Quetelet.** p. 356. — Note sur les aimants de fer de fonte trempée et sur la fragilité des fils de laiton exposés à l'air sous l'influence de certaines variations de temperature; par M. **Florimond.** p. 368. — Annales de l'Observatoire royal de Bruxelles. Communication de M. **Ad. Quetelet.** p. 406. — Sur la variation des éléments magnétiques. Lettre du Père A. **Secchi,** directeur de l'Observatoire de Rome, à M. **Quetelet.** p. 520. — Note sur un arc-en-ciel remarquable; par M. A. **Quetelet.** p. 528. — Tableau des angles fondamentaux des corps simples, observés et calculés d'après la formule: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{s}$; par M. **Zenger.** p. 608.

28me Année, 2me Sér., T. VIII. M. **Gloesener** donne lecture du rapport sur un mémoire de M. **Zenger,** sous le titre: Recherches sur la vitesse de la lumière et sur sa dépendance de l'action des forces moléculaires. p. 55. — Sur le magnétisme terrestre et spécialement sur la déclinaison observée à Bruxelles. Lettre de M. **Lamont** à M. **Ad. Quetelet.** p. 59. — Sur la déclinaison magnétique à Bruxelles; par M. **Ern. Quetelet.** p. 75. — Aurore boréale, perturbations magnétiques à l'Observatoire et sur les lignes télégraphiques de l'État; par M. **Ad. Quetelet.** p. 77. — Aurore boréale observée à Porto-Rico. Lettre de M. **Th. Du Colombier** à M. **Ad. Quetelet.** p. 81. — Observations sur les aurores boréales, la lumière zodiacale et les étoiles filantes, recueillies par M. **Heis,** et communiquées par M. **Ad. Quetelet.** p. 82. — Sur la différence de longitude des observatoires de Bruxelles et de Berlin, determinée, en 1857, par des signaux galvaniques. p. 155. — Sur les mouvements propres des étoiles et du soleil; par M. **Liagre.** p. 158. — Note sur la détermination du rayon vecteur d'une planéte nouvelle; par M. J. C. **Houzeau.** p. 172. — Note sur un opuscule peu connu de Simon Stevin de Bruges. Lettre à M. **Ad. Quetelet,** par M. **Gilbert.** (Die Schrift betrifft die numerische Auflösung der Gleichungen aller Grade, natürlich durch Näherung). p. 192. — Réduction des observations magnétiques de M. E. **Quetelet,** par M. **Hansteen.** p. 314. — Sur les étoiles filantes du 10 août 1859, l'aurore boréale du 28. août 1859 et la lumière zodiacale;

lettre de M. Herrick à M. Ad. Quetelet. p. 322. — Lettre de M. Heis à M. Ad. Quetelet sur les perturbations magnétiques et la lumière zodiacale observées en 1857, 1858 et 1859. p. 373. — Besonders machen wir auch noch aufmerksam auf eine schöne von Herrn Liagre in der Séance publique du 17. décembre 1859 gehaltene Rede: sur la pluralité des mondes. p. 383.

Fortsetzung nächstens.

Literarischer Bericht
CL.

Arithmetik.

Tables de Logarithmes a cinq Décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des logarithmes d'addition et de soustraction ou logarithmes de Gauss et de diverses tables usuelles. Par J. Hoüel, Ancien Élève de l'École Normale, Docteur ès Sciences (jetzt Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux). L'Introduction de cet ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes, en date du 22 Août 1859. Paris. Mallet-Bachelier. 1858. 8.

Wir bedauern, dass diese im Jahre 1858 erschienenen Tafeln fünfstelliger Logarithmen uns erst jetzt bekannt geworden sind, halten uns aber ihrer Vortrefflichkeit wegen für verpflichtet, dieselben auch jetzt noch einer ausführlicheren Anzeige zu unterziehen. Man weiss, dass man mit fünfstelligen Logarithmen in sehr vielen Fällen vollkommen ausreicht, — indem in solchen Fällen der Gebrauch mehrziffriger Tafeln völlig überflüssig sein würde, — und dass dieselben eine grosse Bequemlichkeit gewähren; aber freilich müssen die Tafeln dann auch so eingerichtet oder mit solchen Einrichtungen versehen sein, dass die in ihrer Ausdehnungs-Sphäre überhaupt zu erreichende Genauigkeit sich durch sie auch wirklich erreichen lässt. Und so glauben wir denn in der That ohne Uebertreibung sagen zu können, dass die vorliegenden, durch mehrere eigenthümliche Einrichtungen von früheren fünfstelligen Tafeln sich unterscheidenden, Tafeln in Rücksicht der mit solchen

Tafeln zu erreichenden Genauigkeit — bei dem jetzigen Stande der Sache — das non plus ultra leisten. In dem „Avertissement" bezeichnet der Herr Verfasser selbst seine Tafeln in sehr bescheidener Weise „principalement" als „une reproduction des Tables de Lalande"*), giebt aber zugleich sieben Punkte an, in denen dieselben sich von diesen letzteren Tafeln unterscheiden. Wir halten uns an diese Angaben des Herrn Verfassers nicht weiter, sondern wollen selbst — freilich nur in der *Kürze*, wie unsere literarischen Berichte dies fordern — die Punkte bezeichnen, welche nach unserer Meinung diesen Tafeln *vorzugsweise* zur Empfehlung dienen.

Jede Seite der Tafel der Logarithmen der Zahlen besteht aus fünf Colonnen, in denen die Zahlen in ununterbrochener Folge von 0 bis 10800 fortschreiten und unmittelbar daneben stehen die Logarithmen mit Weglassung der Kennziffer. Diese Einrichtung (die übrigens die Lalande'schen Tafeln auch haben, aber nur bis 10000 gehen und die völlig unnütze Kennziffer enthalten) halten wir für einen besonderen Vorzug vor anderen fünfstelligen Tafeln (z. B. den bekannten von August, welche die gewöhnliche Einrichtung haben und auch nur bis 10000 gehen), und zwar namentlich deshalb, weil durch diese Einrichtung besonders der Gebrauch der Tafel als antilogarithmische Tafel jedenfalls sehr erleichtert wird, insbesondere das Aufsuchen wesentlich an Bequemlichkeit gewinnt. Von S. 5. an steht zwischen jeden zwei Logarithmen die Differenz, und die zur Seite befindlichen Täfelchen der Producte dieser Differenzen in 0, 1; 0, 2; 0, 3; .... 0, 9 dienen natürlich sehr zur Abkürzung der Rechnungen.

Die Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Linien oder Functionen schreitet, wie bei nur fünfstelligen Tafeln es sich von selbst versteht, von Minute zu Minute fort, enthält aber die Differenzen und die Proportionaltheile in einer solchen dem Rechner sein Geschäft erleichternden Vollständigkeit, Bequemlichkeit und Genauigkeit wie keine andere der uns bekannten Tafeln dieser Art. Ausserdem zeichnet sich die Tafel vor allen anderen Tafeln auch dadurch aus, dass sie die Logarithmen der Secanten und Cosecanten enthält, was für viele Rechnungen von Wichtigkeit ist. Zu den Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten ist nach altem Gebrauch und aus bekannten Gründen überall 10 addirt; die Logarithmen der Secanten und Cosecanten sind aber

*) Die in einer stereotypirten, durch den Baron Reynaud besorgten Ausgabe (Paris. Bachelier. 1829) uns vorliegen und zur Vergleichung mit den neuen Hoüel'schen Tafeln dienen.

— natürlich vollkommen zweckmässig — sogleich für den der Einheit gleichen Halbmesser angegeben. Es findet sich also z. B.

$$\log\cos 42^\circ.4' = 9{,}87062,$$

d. h. eigentlich für den Radius Eins:

$$\log\cos 42^\circ.4' = 9{,}87062 - 10,$$

also für denselben Radius

$$\log\sec 42^\circ.4' = -\log\cos 42^\circ.4' = 10 - 9{,}87062 = 0{,}12938$$

und überall auf dieselbe Weise, auch bei den Cosecanten. So leicht auch die Logarithmen der Secanten und Cosecanten aus denen der Cosinus und Sinus abgeleitet werden können, halten wir nach unseren Erfahrungen im numerischen Calcul dieselben doch in der so eben bezeichneten Weise für eine überaus dankenswerthe Zugabe in diesen Tafeln; bei Tafeln der sogenannten natürlichen Linien würde, wie sich von selbst versteht, die Aufnahme der natürlichen Secanten und Cosecanten ganz von selbst durch die möglichste Bequemlichkeit des Gebrauchs solcher Tafeln geboten sein, wie wir schon öfters zu erinnern Veranlassung genommen haben*). Rücksichtlich des Gebrauchs der trigonometrischen Tafel müssen wir ganz besonders auch auf die in vielen Beziehungen ungemein lehrreiche Einleitung verweisen, wo dieser Gebrauch nach zwei verschiedenen Methoden gelehrt wird, wenn man möglichste Genauigkeit erreichen will. Um die Anwendung der zweiten Methode zu erleichtern enthält die Tafel der Logarithmen der Zahlen (Table I) in der obersten Horizontalreihe auf jeder Seite noch gewisse Zahlen, die in keiner anderen Tafel sich finden, auf die wir aber unsere Leser ganz besonders aufmerksam machen, ohne dass leider der Raum hier erlaubt, auf nähere Erläuterungen uns einzulassen.

In der dritten Tafel hat der Herr Verfasser die Tafeln der sogenannten Additions- und Subtractions-Logarithmen getrennt von einander geliefert, indem er im Allgemeinen die Anordung von Zech adoptirt, jedoch in sofern eine Abänderung hat eintreten lassen, als er in der zweiten Tafel die Zahl C als Argument genommen hat, wodurch die Ausdehnung der Tafel verkürzt wird, ohne der Genauigkeit zu schaden. Ueber die Erfindung dieser

*) Namentlich wünschen wir sehr, dass Herr Rühlmann bei einer neuen Ausgabe seiner recht hübschen Tafeln die Aufnahme der natürlichen Secanten und Cosecanten nicht unterlasse. Sie brauchen bloss z. B. aus den trefflichen Tafeln von Sherwin abgeschrieben zu werden.

Tafeln bemerkt der Herr Verfasser auf pag. VI. Folgendes: „Les logarithmes d'addition et de soustraction, connus généralement sous le nom de logarithmes de Gauss, ont pour but de faire trouver, par une seule lecture dans la Table, le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres, donnés par leurs logarithmes. Ils ont été inventés, au commencement de ce siècle, par l'Italien **Leonelli**, qui exposa sa découverte dans un opuscule très-rare, imprimé à Bordeaux, *en l'an* XI, sous le titre de Supplément logarithmique. Mais *le* peu de faveur avec lequel ses travaux furent d'abord acueillis, *le* fit renoncer à la construction, ou du moins à la publication de cette Table. Cependant une traduction allemande du Supplément logarithmique, faite en 1806, tomba entre les mains de Gauss, qui, non moins habile calculateur que profond géomètre, comprit l'utilité pratique de cette nouvelle méthode, et construisit lui-même de petites Tables à cinq décimales sur le plan proposé par l'inventeur. Ces Tables, publiées pour la première fois en 1812, dans la Correspondance de Zach, ont été reproduites, quelquefois avec des modifications plus ou moins heureuses, dans la plupart des recueils de Tables imprimés depuis cette époque, en Allemagne, en Angleterre et même en Italie." — **Suum cuique!** ist der preussische Wahlspruch und auch der unserige; deshalb haben wir das Vorstehende vollständig mitgetheilt, indem wir noch auf die Nouvelles Annales de Mathématiques. Tome X. page 288 und Tome XII page 171 verweisen.

Ausser diesen drei den Hauptinhalt bildenden Tafeln enthält das treffliche Buch noch eine grosse Anzahl anderer für den praktischen Gebrauch sehr nützlicher Tafeln, worüber wir schliesslich noch Folgendes bemerken. Als Anhang zu Tafel I. finden wir zuerst ein sehr gut eingerichtetes Täfelchen zur Verwandlung der Grade, Minuten und Secunden in Decimaltheile des Halbmessers und des Quadranten; der Minuten und Secunden in Decimaltheile des Grades; der Grade und Minuten in Secunden und umgekehrt. Der Tafel II. geht eine Tafel der wichtigsten Formeln zur Auflösung der ebenen und sphärischen Dreiecke voraus, und als Anhang ist dieser Tafel beigegeben ein Täfelchen der natürlichen Sinus und Cosinus, Tangenten, Cotangenten und auch der Secanten und Cosecanten für die einzelnen Grade, so wie ein Täfelchen zur Verwandlung der Stunden, Minuten und Secunden in Sexagesimaltheile des Kreises und Decimaltheile des Tages. Ferner finden die Leser Tafeln zur Verwandlung der natürlichen Logarithmen in gemeine und umgekehrt, eine Tafel einer grösse-

ren Anzahl in der Mathematik und Astronomie häufig in Anwendung kommender Zahlen nebst ihren Logarithmen, auch eine Tafel zur Erleichterung bei Zinszinsrechnungen, Tafeln der Logarithmen von $1.2.3 \ldots n$, $1.3.5 \ldots (2n-1)$, 2^n, alle Logarithmen mit 8 Decimalen; eine Tafel der achtstelligen Logarithmen der Zahlen von 100—1000; eine Tafel zur Berechnung der Logarithmen auf 20 Decimalen; Täfelchen der Logarithmen und Antilogarithmen mit 4 und 3 Decimalen; eine Tafel der kleinsten Divisoren der durch 2, 3, 5, 11 nicht theilbaren zusammengesetzten Zahlen von 49 bis 10841. Auf Seite 114—116 sind ferner noch eine ungemein grosse Anzahl wichtiger Zahlen nebst ihren Logarithmen zusammengestellt (auch Anciennes mesures françaises; Mesures anglaises; Densités des solides et liquides; Densités des gaz et des vapeurs, celles de l'air étant 1); und den Beschluss macht eine in Quartformat besonders beigefügte Table antilogarithmique à 4 Décimales.

Das Format dieser sehr schönen Tafeln ist zwar etwas gross, aber keineswegs unbequem, wenn man nur beachtet, dass eine Tafel von der ganzen Tendenz der vorliegenden nicht in der Tasche, sondern auf dem Tische gebraucht werden soll. Der Druck ist sehr deutlich und scharf, das Papier billigen Ansprüchen vollkommen genügend; der Umfang der ganzen Tafel nur 116 Seiten.

Wir fassen unser Urtheil dahin zusammen, dass dieser Tafel der Vorrang vor allen uns bekannten jetzt vorhandenen fünfstelligen Tafeln gebührt; dass dieselbe eine grössere Anzahl dem Herrn Verfasser eigenthümlicher Einrichtungen besitzt, welche der Genauigkeit des Gebrauchs in vielen Beziehungen förderlich sind; dass die Tafeln Alles enthalten, worauf der numerische Calcul zu seiner möglichsten Erleichterung und Abkürzung bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft Ansprüche zu erheben berechtigt ist, natürlich immer innerhalb der den Tafeln gegebenen Ausdehnung von nur fünf Decimalen; und dass die Einleitung sehr viel Lehrreiches enthält, was in anderen Tafeln sich nicht findet, und dem Herrn Verfasser eigenthümlich ist.

Wir empfehlen daher diese Tafeln namentlich auch unseren deutschen Schulen recht sehr zur Beachtung, und möchten wohl wünschen, dass Hr. Mallet-Bachelier sich entschlösse, eine besondere Ausgabe mit deutscher Einleitung u. s. w. zu veranstalten, wozu natürlich er allein in commercieller Hinsicht berechtigt ist. Empfange der Herr Verfasser noch unseren besonderen Dank für das treffliche Büchlein, das, seitdem es uns bekannt geworden,

Fläche eingeschlossenen Körper, in welchem die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht sich nach einem gewissen Gesetze verändert *), indem er übrigens natürlich überall das Newton'sche Attractions-Gesetz zu Grunde legt. Nachdem er der sich mehr im Bereiche specieller Fälle haltenden Auflösungen von Newton, Maclaurin, d'Alembert und Lagrange kurz gedacht, spendet er den allgemeinen Auflösungen von Legendre, Laplace, Poisson das gebührende Lob und nennt diese, freilich einen grossen Apparat des Calculs in Anspruch nehmenden Lösungen „*soluzioni dirette*", wogegen er die Lösungen von Ivory, Gauss, Rodrigues, Chasles, welche durch besondere Kunstgriffe — (um uns der Kürze wegen dieses, wenn auch nicht ganz passenden Worts zu bedienen) — die Schwierigkeit und Länge der directen Auflösungen zu vermeiden gesucht haben, mit dem Namen „soluzioni indirette" belegt, und zwar, indem wir zur Vermeidung jedes Missverständnisses uns der eigenen Worte des Herrn Verfassers bedienen, den Grund für diese Benennung dadurch ausspricht, dass er von diesen Lösungen p. 5. sagt: „lasciano nel fondo alcun che d'incompleto, non svelando tutte le intime e segrete attinenze delle varie parti del problema."

Der Herr Verfasser giebt nun in dieser Abhandlung *eine* neue Auflösung des berühmten Problems, welche den von ihm für dieselbe in Anspruch genommenen Namen einer völlig directen Auflösung in der That vollständig verdient, indem er, von den ersten und einfachsten Principien ausgehend, auf völlig directem, natürlich analytischem, Wege zu allen Bestimmungen, auf die es hier ankommt, gelangt, ohne — um so zu sagen — alle besonderen Kunstgriffe (s. vorher) und ohne allen weitläufigen Calcul, so wie denn überhaupt die ganze hier gegebene Darstellung durch besondere Einfachheit der Rechnung sich in der vortheilhaftesten Weise auszeichnet. In der ersten „Preliminari" überschriebenen Abtheilung werden die allgemeinsten Ausdrücke für das Potential und die Anziehung eines Massen-Systems in Bezug auf einen gegebenen Punkt, zuerst in Bezug auf rechtwinklige, dann aber vorzüglich für polare Coordinaten, von welchen letzteren überhaupt in dieser Abhandlung der vielfachste und vortheilhafteste Gebrauch gemacht wird, entwickelt, wobei natürlich auch die Besprechung der Niveau-Flächen sich von selbst darbietet. Die ganze Untersuchung ist dann zunächst in zwei Kapitel getheilt, nämlich: **Capo I.** Generalità risguardanti l'at-

---

*) M. s. u. A. auch eine frühere Schrift von Schlömilch: Der Attractionscalcül. Eine Monographie. Halle 1851. 8°.

trazione di un Ellissoide. Art. 1°: Formole differenziali relative all' attrazione ed al potenziale di uno strato ellittico. Art. 2°. Indicazione del metodo più diretto per determinare la legge onde un Ellissoide eterogeneo irradia al di fuori la sua forza attrattiva. — **Capo II.** Applicazione del metodo ad un Ellissoide eterogeneo. Art. 1°. Assi principali de' coni (K), e superficie di livello nell' attrazione esterna della strato ellittico dE. Art. 2°. Formole generali rappresentanti la legge onde un Ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione da punto a punto. — Diesen beiden, vorzugsweise die eigene Lösung des Herrn Verfassers enthaltenden Kapiteln ist nun aber noch beigefügt: **Capo III.** Soluzioni indirette del problema relativo all' attrazione di un Ellissoide. Art. 1°. Soluzione indiretta d' Ivory. Art. 2°. Soluzione indiretta del Sig. Chasles. Art. 3°. Soluzione indiretta, desunta da quelle di Gauss e di O. Rodrigues. — In diesem dritten Kapitel entwickelt also der Herr Verfasser die von den genannten Geometern gefundenen besonderen Sätze und Formeln in eigenthümlicher, denselben manche neue Seite abgewinnender Weise, wodurch er sich noch das besondere Verdienst erwirbt, dass man in dieser Schrift zugleich in consequenter, für und durch sich selbst verständlicher Darstellung das Wichtigste beisammen findet, was in Bezug auf das in Rede stehende berühmte Problem geleistet worden ist.

Wir machen hiernach alle Mathematiker auf diese neue Schrift des Herrn Professor Chelini dringend aufmerksam, und wünschen sehr, dass dieselbe durch einen völlig sachkundigen Uebersetzer auf deutschen Boden verpflanzt werden möge, ein Wunsch, den wir auch schon in Bezug auf andere Schriften desselben geehrten Herrn Verfassers uns in diesen literarischen Berichten auszusprechen erlaubt haben. Vielleicht gelingt es dem Herausgeber, einen seiner ausgezeichnetsten Schüler, Herrn Curtze, der zu seiner eigenen Belehrung und seinem eigenen Vergnügen schon die trefflichen Elementi di Calcolo infinitesimale di Barnaba Tortolini. Tom. I. Calcolo differenziale. Roma. 1844. 8° in sehr anerkennenswerther Weise übersetzt hat, zu einer solchen Arbeit zu veranlassen; aber freilich hält es in Deutschland jetzt schwerer als jemals, für solche Werke Verleger zu finden, da bei uns die populäre und der gewöhnlichen Praxis dienende mathematische und physikalische Literatur, in Verbindung mit einer wahren Fluth der gewöhnlichsten Elementar-Bücher, Alles von höherer wissenschaftlicher Bedeutung zu verschlingen droht, natürlich mit einigen — leider möchten wir fast wenigen sagen — rühmlichen Ausnahmen.

Krystallographie.

Sulle forme crystalline di alcuni Sali derivati dall' Ammoniaca per Quintino Sella, Membro della Reale Accademia delle Scienze. Torino. Stamperia Reale. 1861. 4°.

Herr Quintino Sella in Turin hat sich bekanntlich schon durch mehrere, auch in den Literarischen Berichten unseres Archivs früher angezeigte Untersuchungen auf dem Gebiete der theoretischen und praktischen Krystallographie, so wie durch seine schöne, so viel wir wissen, auch in's Deutsche übertragene Darstellung der verschiedenen Methoden der zeichnenden oder darstellenden Geometrie, seine auch im Literar. Ber. angezeigte Teorica e Pratica del Regolo calcolatore u. s. w., sehr verdient gemacht. Die vorliegende, 70 Seiten starke Schrift mit 4 grossen Figurentafeln, gehört ganz dem Gebiete der praktischen Krystallographie an, und enthält eine Menge genauer und höchst sorgfältiger Messungen und krystallographischer Bestimmungen der auf dem Titel genannten Körper. Wir können, wie aus dieser Natur der Schrift von selbst hervorgeht, ihrem Inhalte hier leider nicht weiter folgen, sondern müssen uns begnügen, Alle, die sich für solche Untersuchungen interessiren, zu besonderer Beachtung derselben aufzufordern, welche dieselbe mit dem grössten Rechte für sich in Anspruch nehmen kann. Nach einer Einleitung besteht dieselbe aus zwei Theilen, nämlich: **Parte Prima.** Descrizione delle forme cristalline di ciascun Sale (in 22 Kapiteln). — **Parte Seconda.** Paragone tra le forme cristalline dei Sali descritti. — **Quadro 1.** Sopra alcune Diamine e Diamidi monocline. **Quadro 2.** Joduri romboedrici. **Quadro 3.** Sopra alcuni Sali Aloidi trimetrici. **Quadro 4.** Riassunto delle forme dei Sali descritti in questa memoria. Noch genauer auf den Inhalt einzugehen gestatten der Raum und der Zweck dieser literarischen Berichte leider nicht.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vgl. Literar. Ber. Nr. CXLIX. S. 7.)

Band XLIV. Heft III. October 1861. Schmidt: Neuere

Beobachtungen von Sternschnuppen-Schweifen. S. 227. — Haidinger: Bemerkungen über vorhergehende Abhandlung. S. 229. — Jelinek: Theorie der Pendelabweichung. S. 241. (Der Herausgeber des Archivs hat bekanntlich in zwei Abhandlungen Archiv Theil XXVII. Nr. XXV. S. 224. und Archiv Theil XXVIII. Nr. II. S. 223. eine ihm eigenthümliche neue Theorie des Foucault'schen Pendelversuchs geliefert, in beiden Abhandlungen im Wesentlichen ganz auf dieselbe Weise, aber mit dem Unterschiede, dass die erste Abhandlung die Erde als eine Kugel, die zweite dieselbe als ein Ellipsoid voraussetzt, was freilich im vorliegenden Falle streng genommen auf dasselbe hinauskommt, und bei der zweiten Voraussetzung nur die Einführung der bekannten Modification des Begriffs der Breite erfordert. Die Untersuchung ist in beiden Fällen mit aller dem Herausgeber möglichen Eleganz mit Hülfe der Formeln der analytischen Geometrie im Raume geführt, und überall ist auf ganz strenge Gränzenbestimmungen zurückgegangen worden. Der Herausgeber dankt dem Herrn Professor Jelinek recht sehr für das gute über seine Arbeit gefällte Urtheil; die Nachsicht, mit welcher er dieselbe aufgenommen, und die ihr von ihm gewidmete Aufmerksamkeit. Zu noch grösserem Danke aber ist der Herausgeber demselben auch im Namen der Wissenschaft verpflichtet, dass er diese Theorie von Neuem auf eigenthümliche Weise bloss mittelst der sphärischen Trigonometrie entwickelt hat, und dadurch allerdings auf noch etwas kürzerem Wege, — was der Herausgeber gern anerkennt — aber freilich durch mancherlei geometrische, an eine Figur nothwendig sich anschliessende Betrachtungen, genau zu denselben Resultaten wie er selbst gelangt ist, namentlich genau zu demselben Ausdrucke eines Elements der Pendelabweichung, was Herr Jelinek im zweiten Theile seiner Abhandlung auf interessante Weise besonders nachweist. Der Herausgeber freu't sich sehr, die von ihm entwickelte Theorie, auf welche er einen gewissen Werth zu legen keinen Anstand nimmt, von einem so geschickten Mathematiker durch eine schöne eigenthümliche Untersuchung vollkommen bestätigt zu sehen, und erlaubt sich allen, die sich für die völlig strenge Theorie des berühmten Versuchs, dessen sonstige Theorien, wie Herr Professor Jelinek mehrfach ganz richtig bemerkt und hervorhebt, an sehr grossen Mängeln, Dunkelheiten und Ungenauigkeiten laboriren, interessiren und in solche strenge mathematische Untersuchungen wirklich einzugehen verstehen und den aufrichtigen Willen haben, diese uns beiden gemeinschaftliche Theorie zur Beachtung und weiteren Anwendung zu empfehlen). — Knochenhauer: Ueber den Gebrauch des Luftthermometers. Zweite Abtheilung. S. 259. —

Studnicka: Ueber die Identität der Licht- und Wärmestrahlen von gleicher Brechbarkeit. S. 289. — Zenger: Mikroskopische Messungen der Krystallgestalten einiger Metalle. S. 297.

Band XLIV. Heft IV. November. 1861. Winkler: Nachweisung einiger Eigenschaften einer ausgedehnten Klasse transcendenter Functionen. S. 477. — Rochleder: Mittheilungen aus dem Laboratorium zu Prag. S. 493. — Schönfeld: Beobachtungen von veränderlichen Sternen. (Fortsetzung aus dem *XLII.* Bande). S. 503. — v. Waltenhofen: Notiz über Johann Kravogl's Quecksilber-Luftpumpe. S. 603.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1861. Juli—December. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXLV. S. 18).

S. 23. Herr Professor Jos. Ritter von Hasner hielt einen Vortrag: Zur Geschichte der Kunstaugen, und legte sein automatisches Auge vor. (Der Vortrag ist in einem ziemlich ausführlichen Aufsatze mitgethetheilt und das neue automatische Auge durch eine Zeichnung erläutert worden; wir halten diesen Aufsatz für in vieler Beziehung sehr interessant, und machen, so wie auf den Aufsatz, auch auf das automatische Auge, welches von Herrn Mechanikus Spitra in Prag verfertigt *wird,* aufmerksam). — S. 28. Herr Pierre liefert Mittheilungen über das sogenannte unsichtbare Licht, namentlich über einige Weidele'sche Versuche (Moser in Königsberg bezog die bekannte merkwürdige Erscheinung auf die Wirkung von Lichtstrahlen, welche, unserem Auge nicht wahrnehmbar, selbst im Dunkeln ihren Einfluss äussern, und nannte diese Erscheinung deshalb, freilich nicht sehr sprachrichtig, das unsichtbare Licht. Herr Weidele in Wien hat durch sehr sorgfältige Untersuchungen bewiesen, dass diese Erscheinung mit der Lichtwirkung gar nichts zu thun hat, sondern sich auf Flächenwirkungen und die Anziehungskräfte der feinsten Molecüle zurückführen lässt.) — S. 29. Herr Karlinski: Ueber die Verbesserung der Bahnelemente des Planeten (46) Hestia. (Ziemlich ausführlicher Aufsatz mit Mittheilung von Formeln und sorgfältigen Rechnungen).

Monatsbericht der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. S. Literar. Ber. Nr. CXLIX. S. 11.

September, October 1861. Christoffel: Ueber die Dispersion des Lichts, mitgetheilt von Herrn Weierstrass. S. 906—921. — Encke: Ueber den Pons'schen Kometen. S. 926—928. — Kronecker: Ueber die Theorie der algebraischen Functionen. S. 933. (Blosse Mittheilung, dass eine Abhandlung über den genannten Gegenstand gelesen). — Weierstrass: Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid. S. 986 — S. 997. (Wir machen auf diesen, den ersten Theil einer grösseren Arbeit über die geodätischen Linien bildenden Aufsatz, worin Herr W. von der Eigenschaft der geodätischen Linie ausgeht, dass dieselbe als der Weg betrachtet werden kann, den ein Punkt durchläuft, welcher gezwungen ist, auf der Fläche zu bleiben, aber von keiner beschleunigenden Kraft getrieben wird, aufmerksam und hoffen auf diese Arbeit später im Archiv selbst zurückzukommen). — Christoffel: Nachtrag zu der am 14. October vorgetragenen Abhandlung über die Dispersion des Lichts, mitgetheilt von Herrn Weierstrass. S. 997 — S. 999.

November 1861. Schönemann: Ueber den Druck im fliessenden Wasser, vorgelegt von Herrn Weierstrass. S. 1010. (Blosse Mittheilung, dass die Abhandlung vorgelegt worden). — Dove: Ueber eine graphische Methode, das Verhältniss des Festen und Flüssigen auf der Erde darzustellen. S. 1043. (Blosse Mittheilung, dass ein betreffender Vortrag gehalten). — R. Baltzer: Zur Geschichte des Euler'schen Satzes von den Polyedern und der regulären Sternpolyeder. (Sich anschliessend an eine Mittheilung, die Herr Prouhet am 23. April 1860 der Pariser Akademie gemacht hat, weiset Herr Baltzer in diesem interessanten Aufsatze nach, dass bereits Descartes das über hundert Jahre später 1752 entdeckte Grundgesetz der Theorie der Polyeder vollständig gekannt hat, und schliesst seine lehrreiche Mittheilung mit den Worten:

„Demnach ist es nicht zweifelhaft, dass zu den glänzenden Leistungen, welche Descartes' Namen verherrlichen, auch die Entdeckung des Grundgesetzes der Polyedrometrie gehört, und dass Euler hinfort gemeinschaftlich mit dem grossen Vorgänger der neueren Analysis den Ruhm jener Entdeckung haben wird."

Ausserdem nimmt Herr Baltzer rücksichtlich der Erfindung der regulären Sternpolyeder Keppler gegen Herrn Bertrand in Paris in Schutz, welcher behauptet hatte, dass Keppler bei der Erfindung solcher Polyeder genannt zu werden kein Recht habe.

Wir würden gern Herrn Baltzer's Aufsatz hier vollständig

mittheilen, glauben aber dies nicht ohne Erlaubniss der Königl. Akademie der Wissenschaften thun zu dürfen, und müssen uns daher vorbehalten, später auf denselben zurückzukommen).

December 1861. Kummer: Ueber die Klassenzahl der aus $n$ten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen. S. 1051—1053. (Bezugnehmend auf die Arbeiten der Herren Reuschle in Stuttgart und Fuchs in Berlin. Eine ausführlichere Mittheilung wird in Aussicht gestellt). — Dove: Ueber die bei binocularer Betrachtung durch Rotation entstehender Lichtlinien durch verschiedenartige Gläser hervortretenden Farben. S. 1054 — S. 1055. — Magnus: Ueber den Durchgang der Wärmestrahlen durch feuchte Luft und über die hygroskopischen Eigenschaften des Steinsalzes. S. 1128—S. 1132. — Schönemann: Ueber den Druck im fliessenden Wasser. S. 1136 — S. 1146. (S. vorher November).

Januar 1862. Dove: Ueber anometrische Bestätigung des Drehungsgesetzes auf Bermuda in Australien. S. 5 — S. 6. — Kronecker: Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln. S. 8. — Borchardt: Ueber vollkommene Zahlen. S. 8. — (Zwei blosse Mittheilungen, dass betreffende Abhandlungen gelesen worden).

Februar 1862. Encke: Berechnungen der hiesigen (Berliner) Beobachtungen des Cometen von Pons bei seiner Wiedererscheinung. S. 91 — S. 97. — Dove: Ueber das Hörbarmachen von Beitönen durch Interferenz. S. 97 — S. 100. — Kiepert: Darstellung des Landäquators und Seeäquators, vorgelegt von Herrn Dove. S. 100. — Dove: Ueber die Witterungsverhältnisse des Jahres 1861 und die damit zusammenhängenden ungewöhnlichen Ueberschwemmungen im Winter $18^{61}/_{62}$. S. 100. — Weierstrass: Bemerkungen über die Integration der hyperelliptischen Differential-Gleichungen. S. 127 — S. 133. — Dove: Ueber die diesjährigen Ueberschwemmungen und ihre Gründe. S. 142. (Blosse Mittheilung, dass ein betreffender Vortrag gehalten). — Paalzow: I. Ueber die Richtung und Art der Entladung der Leydner Batterie. II. Ueber die Magnetisirung der Stahlnadeln durch den Strom einer Leydner Batterie; mitgetheilt von Herrn Magnus. S. 152 — S. 156.

März 1862. Rüdorff: Ueber das Gefrieren von Salzlösungen, mitgetheilt von Herrn Magnus. S. 163 — S. 165. — Dove: Ueber die nicht periodischen Veränderungen der Temperatur, dargestellt durch fünftägige Mittel (zweite Abhandlung) und dargestellt durch monatliche Mittel (siebente Abhandlung). S. 170. (Ohne Auszug). — In der in der öffentlichen Sitzung vom 27. März

gehaltenen Rede (S. 172—S. 182) macht Herr **Encke** u. A. interressante Mittheilungen über die berühmte Entdeckung von **Bunsen** und **Kirchhoff** mit Rücksicht auf ihr Verhältniss zur Astronomie.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXXVI. S. 11).

Die grosse Anzahl anzuzeigender Schriften hat zu meinem grössten Bedauern eine längere Unterbrechung in der Anzeige dieser wichtigen „**Bulletins**" herbeigeführt. Das Versäumte soll nun aber ohne Unterbrechung schnell nachgeholt werden. G.

27me **Année**, 2me Sér. T. IV. 1858. Exposé d'un principe concernant l'intersection des surfaces avec application à la recherche des propriétés des surfaces du second ordre; par M. **Meier**. Rapport de M. **Timmermans**. p. 6. — Perturbations magnétiques. Aurore boréale. Violent tremblement de terre en Italie; communications de M. A. **Quetelet**. p. 7. — Sur l'état météorologique de la ville de Gand, pendant l'année 1857; par M. F. **Duprez**. p. 11. — Memoire sur la classification des lignes du 3me degré; par M. **Dagoreau**. Rapport de M. **Brasseur**. p. 80. — Recherches sur les propriétés géométriques de mouvemens plans; par M. **Gilbert**. Rapport de M. **Lamarle**. p. 82. — Eclipse de lune du 27 Févrièr 1858, et occultations d'étoiles par la lune, observés an 1857. p. 237. — Note sur un théorème relatif à la théorie des roulettes; par M. **Lamarle**. p. 239. (Sehr beachtenswerth). — Eclipse de soleil du 15 mars 1858; notice par M. A. **Quetelet**. p. 282. — Mémoire sur le calendrier arabe avant l'islamisme, par **Mahmoud Effendi**, astronome égyptien. Rapport du capitaine **Liagre**. p. 371. — Magnétisme terrestre (M. **Ernest Quetelet**). p. 378.

27me **Anné**, 2me Ser. T. V. 1858. Sur un appareil à levier substitué au micromètre des instruments de précision; par M. A. **Bohlin**. Rapport du capitaine **Liagre**. p. 3. — Théorie géométrique des rayons et centres de courbure. Application au limaçon de Pascal. Rectification. Rayons et centres de courbure; par M. **Lamarle**. p. 5 (in geometrischer Rücksicht sehr beachtenswerth). — Note sur un principe remarquable en géométrie; par M. **Ernest Quetelet**. p. 15. (Bezieht sich auf die Curven der dritten Ordnung; im Eingange sagt der Herr Verfasser: „Il y a quelque temps, m'occupant de la détermination des courbes par un certain nombres de leurs points, mon attention fut attiré

sur ce fait assez curieux: une courbe de troisième ordre est complétement déterminée, quand on connait neuf de ses points, et cependant deux courbes de troisiéme ordre se coupent en neuf points. Er weiset auch auf eine Abhandlung Euler's in den Mémoires de Berlin 1748 über eine contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes hin, und schliesst daran lehrreiche Bemerkungen, die wir einer weiteren Ausführung für sehr werth halten, und unsere Leser deshalb auf den zwar kurzen, aber lehrreichen und interessanten Aufsatz aufmerksam machen.) — Sur la constance dans le nombre des mariages et sur la statistique morale en général; par M. Ad. Quetelet. p. 89. — Sur la différence des longitudes entre Berlin et Bruxelles, déterminée par la télegraphie électrique (Extrait d'un article de M. Encke). p. 115. — Sur le magnétisme du globe; par M. Hansteen. p. 120. — Sur l'occultation des Pléiades par la lune. Extrait d'une lettre adressée à M. Bache par Ad. Quetelet. p. 263. — Étoiles filantes de la période du mois d'août 1858, observées par le Directeur et les Aides de l'observatoire royal à Bruxelles. p. 265. — Experience d'optique permettant d'obtenir d'une seule épreuve photographique la sensation d'un corps en relief; par M. A. Boblin. p. 304. — Sur l'intensité du magnetisme terrestre, et particulièrement à Bruxelles; lettre de M. Hansteen à M. Ad. Quetelet. p. 336. — Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation; par M. Lamarle. p. 340. (Besonders wegen der Einfachheit der Betrachtung beachtenswerth). — Sur la constitution physique du soleil; par M. Charles Noël. p. 506.

(Fortsetzung folgt nächstens.)

Aufforderung an die deutschen Mathematiker und Physiker.

Alle Mathematiker und Physiker machen wir auf die diesjährige in Karlsbad Statt findende 37ste Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, bei welcher, wie wir zu unserer Freude hören, gleichzeitig auch eine grössere Anzahl namentlich jüngerer Astronomen zusammenkommen werden, recht sehr aufmerksam, und wünschen recht zahlreiche Betheiligung, da gewiss Alles aufgeboten werden wird, um die Versammlung so angenehm und lehrreich als möglich zu machen, und der herrliche Ort der Versammlung gewiss einladend genug ist. Grunert.

1. Mai 1862.

Literarischer Bericht
CXLIX.

Am 3ten Februar 1862 starb in Paris in hohem Alter

Jean Baptiste Biot,

geboren in Paris am 21sten April 1774.

Welcher Mathematiker und Physiker verdankte seinen treff lichen Schriften nicht die vielfachste Belehrung und Anregung!

Arithmetik.

Theorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren Darstellung von Dr. H. Durège, Docent am eidgenössischen Polytechnicum und an der Universität zu Zürich. Leipzig. Teubner. 1861. 8.

Der Herr Verfasser hat uns durch die Herausgabe dieses Buches eine besondere Freude gemacht, und wird den Dank aller der Jünger der Wissenschaft ernten, welche, ohne auf die Quellen zurückgehen zu müssen oder zu wollen, was natürlich immer seine besonderen Schwierigkeiten hat, sich in einer mehr elementaren Weise, die aber doch weiter führt wie die Lehrbücher der Integralrechnung überhaupt, mit der so wichtigen Theorie der elliptischen Functionen bekannt machen wollen. Das Verdienst, welches er sich dadurch erworben hat, verdient um so mehr Anerkennung, als ein ähnliches Werk die deutsche mathematische Literatur, so viel wir wissen, noch nicht besitzt, wenn nicht vielleicht, worüber wir nicht genau unterrichtet sind, eine Uebersetzung des bekannten Buchs von Verhulst existirt, was wir jedoch nicht glauben. Dass bei der Darstellung der Theorie Herr Doctor Durège nicht der in der allerdings trefflichen Theorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques par Briot et Bouquet. Paris. 1859. angewandten, von der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen ausgehenden Behandlungsweise gleich

von vorn herein gefolgt, sondern vielmehr, anknüpfend an ... dem Anfänger hinreichend bekannte Functionen, möglichst elementar verfahren, und, gewissermassen historisch, den von Abel und Jacobi, natürlich mit besonderer weiterer Rücksicht auf Legendre u. s. w., betretenen Weg eingeschlagen hat, billigen wir in einem Werke von der Tendenz des vorliegenden nicht bloss vollkommen, sondern erkennen darin, mit Rücksicht auf den hauptsächlichsten Zweck des Werkes: zur weiteren Verbreitung der Theorie der elliptischen Functionen beizutragen, einen besonderen Vorzug desselben. Dabei wollen wir aber jedoch auch nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass allerdings am Ende des Werks im 21sten Abschnitte auch die Functionen complexer Variablen und die Vieldeutigkeit bestimmter Integrale eine einsichtsvolle und für den Zweck des Buchs jedenfalls hinreichende Berücksichtigung gefunden haben. Ausserdem verdient es mit Anerkennung bemerkt zu werden, dass der Herr Verfasser auch das Gebiet der Anwendungen nicht ganz unbetreten gelassen hat, und glauben daher das Buch Allen, die der Theorie der elliptischen Functionen ein eingehendes Studium widmen wollen, zur Beachtung empfehlen zu dürfen, indem wir des Weiteren wegen uns hier mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts begnügen müssen:

I. Begriff der elliptischen Functionen. II. Von der Periodicität der elliptischen Functionen. III. Von der Reduction der elliptischen Functionen auf die Normalform. IV. Von den drei Gattungen der elliptischen Functionen. V. Rectification der Ellipse und Hyperbel. VI. Ueber eine Substitution der zweiten Ordnung zur Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform. VII. Das Additionstheorem. VIII. Ueber den Zusammenhang der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie. IX. Das Additionstheorem für die zweite und dritte Gattung. X. Integration der elliptischen Differentialgleichung in algebraischer Form. XI. Jacobi's geometrische Construction des Additionstheorems. XII. Die Landen'sche Transformation. XIII. Entwickelung der elliptischen Functionen in Factorenfolgen. XIV. Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen. XV. Reihenentwickelung für die zweite Gattung. XVI. Reihenentwickelung für die dritte Gattung. XVII. Die Jacobi'sche Function. XVIII. Darstellung der elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Function. XIX. Ueber die elliptischen Transcendenten der dritten Gattung. — Anhang. XX. Ueber die Bewegung des sphärischen Pendels. XXI. Ueber Functionen einer complexen Variablen und die Vieldeutigkeit bestimmter Integrale.

Aus dieser Anzeige des Inhalts werden die Leser am Besten übersehen, was sie in dem empfehlenswerthen Buche zu erwarten haben.

Mechanik.

Sul moto del Pendolo. Memoria del Professore Lorenzo Respighi. Bologna. 1854. 4°.

Leider ist uns diese Schrift, welche sehr sorgfältige und elegante analytische Untersuchungen der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Drehung der Erde, natürlich also auch auf Foucault's bekannten Versuch, enthält, erst jetzt bekannt geworden. Da wir dieselbe aber für einen sehr werthvollen Beitrag zur analytischen Theorie dieses Versuchs halten, so wird diese nachträgliche kurze Anzeige gewiss gerechtfertigt erscheinen. Ganz besonders interessant wird diese Schrift auch noch, weil der Herr Verfasser darin ausführliche und genaue Nachricht giebt von durch ihn in der Basilica di San Petronia in Bologna angestellten Pendel-Versuchen, deren Resultate er natürlich mit der von ihm entwickelten analytischen Theorie vergleicht, welche Discussion wir für sehr lehrreich halten, und auch deshalb die Schrift noch zu besonderer Beachtung empfehlen.

Optik.

Sull' accomodamento dell' occhio umano per la visione distinta alle diverse distanze. Memoria del Professore Lorenzo Respighi. Bologna. 1858. 4°.

Sulla irradiazione oculare. Memoria del Prof. Lorenzo Respighi. Bologna. 1859. 4°.

Diese beiden Abhandlungen über das Accomodations-Vermögen des menschlichen Auges für das genaue Sehen in verschiedenen Entfernungen und über Irradiazion sind zwar schon vor ein Paar Jahren erschienen, uns aber leider erst jetzt bekannt geworden. Dieselben enthalten sehr sorgfältige Untersuchungen und Betrachtungen über die beiden in Rede stehenden wichtigen Gegenstände, haben uns eine sehr lehrreiche Lectüre gewährt, und scheinen uns sehr zu verdienen, dass wir auch jetzt noch die Physiker und Astronomen, so wie alle Leser unseres Journals, auf dieselben besonders aufmerksam machen.

Astronomie.

Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandter Wissenschaften. Herausgegeben von Professor Dr. C. A. F. Peters, Director der Sternwarte in Altona. Band I. Heft 4. Band II. Heft 1. Band II. Heft 2. Altona. 1860. 1861. 8°.

Das 3te Heft des ersten Bandes dieser sehr verdienstlichen und lehrreichen Zeitschrift ist zuletzt im Literar. Ber. Nr. CXXXV. angezeigt worden. Wir tragen jetzt die kurze Anzeige der seitdem erschienenen neuen Hefte nach, da wegen Mangel an Raum die Anzeige leider eine Unterbrechung erlitten hat.

Band I. Heft 4. Ueber physikalische Erscheinungen bei totalen Sonnenfinsternissen von Dr. Frh. von Feilitzsch.

Band II. Heft 1. Ueber physikalische Erscheinungen bei totalen Sonnenfinsternissen von Dr. Frh. von Feilitzsch. Fortsetzung der vorigen Abhandlung.

Beide Abhandlungen enthalten namentlich eine sehr sorgfältige Zusammenstellung aller früher beobachteten Erscheinungen aus einem reichen literarischen Apparate.

Die Astronomie des Alterthums und des Mittelalters im Verhältniss zur neueren Entwicklung. Von Dr. W. Förster.

Für Leser, welche, wie sie die Zeitschrift natürlich voraussetzt, die Geschichte der Astronomie noch nicht hinreichend kennen, jedenfalls lehrreich und interessant. Der Abhandlung liegt ursprünglich ein im wissenschaftlichen Verein in Berlin gehaltener Vortrag zu Grunde, so dass also ihre populäre Haltung sich von selbst versteht.

Band II. Heft 2. Ueber die Sonne. Von Dr. A. Winnecke. Alle Leser, welche sich für die Natur unseres Centralkörpers interessiren, machen wir auf diese, aus dem Petersburger Kalender für 1862 abgedruckte Abhandlung recht sehr aufmerksam, da sie im Ganzen zwar nur in der Kürze, aber in ungemein lehrreicher und allgemein verständlicher Weise darin Alles besprochen finden werden, was ihnen über die Sonne zu wissen wünschenswerth sein dürfte. Aus unseren früheren literarischen Berichten sind den Lesern die verdienstlichen Leistungen des

Herrn Verfassers bei den Beobachtungen der grossen Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860 in Spanien hinreichend bekannt, und derselbe kann also über vieles hierher Gehörende recht eigentlich aus eigener Erfahrung sprechen, wodurch der vorliegende Aufsatz noch besonders lehrreich und interessant wird. Sein sehr bestimmtes Urtheil über die bekannte Frage, ob die Protuberanzen u. s. w. in der That der Sonne angehören, dem wir aus vollkommener Ueberzeugung beistimmen, spricht Herr W. auf S. 133 in folgender Weise aus:

„Die Ansicht, wonach die Protuberanzen zur Sonne gehören, wurde fast gleichzeitig von mehreren Astronomen geäussert; sie schloss sich ungezwungen den herrschenden Ansichten über die Natur der Sonne an. Die (sogenannte) optische Theorie, wonach die Protuberanzen nur Lichterscheinungen sein sollten, fand gleichfalls manche Anhänger. Wie diese Lichterscheinungen aber entstehen, für die irdische Experimente kein Analogon bilden*), darüber findet man nur unhaltbares, oberflächliches Räsonnement und nirgends eine Andeutung, wie man nach dem Zeugnisse aller vertrauenswürdigen Beobachter feststehende Erscheinungen an den Protuberanzen, z. B. ihre fast immer harten, starren Begränzungen, das Losgelöstsein vom Mondesrande bei einigen, ihre Pik- oder Kegelform, sich vorstellen soll u. s. w."

Mögen der Zeitschrift immer solche lehrreiche Aufsätze zu Theil werden wie der letztere und dieselbe stets den erfreulichsten Fortgang haben.

An account of the solar eclipse of July 18, 1860, as observed for the United States Coast Survey near Steilacoom, Washington Territory, by Lieut. J. M. Gilliss, U. S. Navy. Washington City. 1861. 4°.

Indem wir für die gütige Zusendung der obigen Schrift hier unseren verbindlichsten Dank aussprechen, und dieselbe, als für die gesammte Literatur über die grosse Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860 wichtig, unseren Lesern zur Beachtung empfehlen, bemerken wir, dass dieselbe eine sehr vollständige und genaue Darstellung der von Herrn Gilliss selbst, so wie der von den Herren Mosman, Goldsborough, Haller, Casey, Brown angestellten Beobachtungen enthält. Eine beigegebene schöne

*) Aus unserer Seele gesprochen.

colorirte bildliche Darstellung erhöhet den Werth der Schrift, die von Keinem, der sich für die in Rede stehende grossartige Erscheinung interessirt, unbeachtet bleiben darf, noch besonders.

Sui Fenomeni cometari. Memoria del Prof. *Lorenzo* Respighi. Bologna. 1860. 4°.

An die neueren grossartigen cometarischen Erscheinungen sich anschliessend, enthält diese lesenswerthe und lehrreiche Schrift sehr sorgfältige Untersuchungen und Betrachtungen über diese Erscheinungen und deren Erklärung, wegen welcher wir die Leser auf die Schrift selbst verweisen müssen, da der Raum zu einem einigermassen genügenden Auszuge uns hier mangelt. Auch nach Bessel's und Anderer früheren Untersuchungen verdient die vorliegende Schrift jedenfalls alle Beachtung.

Berichtigung.

Im vorigen 37sten Theile ist im Literar. Ber. Nr. CXLVIII. S. 10. Z. 5. durch ein Versehen „weniger“ statt „mehr“ gesetzt worden, was zum Ueberfluss hier bemerkt werden mag, wenn dies auch Jeder sogleich sieht, der die am Anfange aus dem Buche: „Die astronomische Strahlenbrechung u. s. w.“ angeführten Worte gelesen hat. Auf S. 10. muss es also eigentlich so heissen:

„Die oben angeführten Worte sagen also nicht mehr und nicht weniger als Folgendes aus:

Die Reihe für r wird, wenn z einer grossen Zenithdistanz angehört, nur etwas mehr convergiren wie die divergirende Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\ldots\text{“}$$

Dass dies wenigstens eben so schlimm, wenn nicht noch schlimmer, und ebenso wenig zu begreifen ist, als wenn „weniger“ gestanden hätte, ist wohl klar. Anfänger sollten, wie schon erinnert, nur gewarnt werden vor solchen Aussprüchen.

Physik.

Lehre von der Thermometrie, der Pyrometrie, Hygrometrie, Psychrometrie und Barometrie in ihrer

Gesammtheit dargestellt und nach den Quellen, namentlich auch zum Gebrauche für Techniker, bearbeitet von Dr. H. Gieswald, Oberlehrer an der St. Johannis-Realschule in Danzig. Mit 14 Quarttafeln. Weimar. Voigt. 1861. 8.

Dieses Buch bildet den 71sten Band des bekannten Neuen Schauplatzes der Künste und Handwerke, welchen die thätige Verlagshandlung des Herrn B. F. Voigt in Weimar herausgiebt. Aber die Leser haben durchaus nicht eine etwa bloss für den technischen Gebrauch bestimmte Anleitung, sondern vielmehr eine in jeder Beziehung wissenschaftliche, mühsam aus den Quellen geschöpfte und selbstständig bearbeitete Darstellung der auf dem Titel genannten Gegenstände in diesem nach unserer Meinung recht empfehlenswerthen Buche zu erwarten, wobei wir zugleich nicht unbemerkt lassen dürfen, dass die Darstellung durchweg ganz mathematisch gehalten ist, ohne dabei den praktischen und technischen Gesichtspunkt zu vernachlässigen. Wir glauben daher auf diese verdienstliche, auch sehr reiche und vollständige literarische Nachweisungen enthaltende Schrift hier aufmerksam machen zu müssen.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vgl. Literar. Ber. Nr. CXLV. S. 17.)

Nachträglich bemerken wir, dass Band XLII. Nr. 29., welche Nummer aus Versehen noch nicht angezeigt worden ist, enthält: Sonndorfer: Darstellung des Laufes der Asteroiden im Jahr 1861. (Mit 4 Tafeln). S. 756.

Band XLIII. Heft II. Februar 1861. Mädler: Ueber kosmische Bewegungsgeschwindigkeiten mit Beziehung auf Doppler's Hypothese der Entstehung der Farben. S. 285. — Winckler: Ueber die Eigenschaften einiger bestimmten Integrale. S. 315.

Band XLIII. Heft III. März 1861. Sonndorfer: Ueber die Bahn der Concordia. S. 371. — Politzer: Beiträge zur Physiologie des Gehörorgans. S. 427. — Haidinger: Ueber die Natur der Meteoriten in ihrer Zusammensetzung und Erscheinung. S. 389.

Band XLIII. Heft IV. April 1861. Reitlinger: Erläuterungen der Lichtenberg'schen Figuren. S. 531. — Rohrer: Nachtrag zu dem Aufsatze über Regentropfen und Schneeflocken. S. 580. — Allé: Ueber die Bahn der Leda. S. 585. — Tschermak: Die specifische Wärme bei constantem Volumen. S. 594.

Band XLIII. Heft V. Mai 1861. v. Lang: Ueber *die* Gesetze der Doppelbrechung. S. 627. — Redtenbacher: *Ueber* die neuesten Entdeckungen durch die Spectralanalyse. S. 661. — Becker und Rollet: Beiträge zur Lehre vom Sehen der *dritten* Dimension. Erste Abtheilung. S. 667. — Bericht der Commission über die astronomische Preisfrage. S. 712.

Band XLIV. Heft I. Juni 1861. Struve: Vergleichung der Wiener Maasse mit mehreren auf der kais. russ. Hauptsternwarte zu Pulkowa befindlichen Maasseinheiten. S. 7. — v. Littrow: Nachtrag zu vorstehendem Aufsatze. S. 21. — Schreiben des Herrn Jännicke an Herrn Director K. v. Littrow (über einen 1853 in der Mitte der Sonne gesehenen runden scharfbegränzten Fleck). S. 27.

Band XLIV. Heft II. Juli 1861. Tschermak: Die Wärmeentwickelung durch Compression. S. 141. — v. Lang: Zur Theorie der Spiegelung und Brechung des Lichtes. S. 147. — Redtenbacher: Untersuchungen einiger Mineralwasser und Soolen mittelst der Spectralanalyse. S. 153.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. (Vgl. Literar. Ber. Nr. CXLVII. S. 8.)

1861. I. Heft V. Wenn auch nicht unmittelbar in den Kreis unseres Archivs gehörend, so zeigen wir als allgemein interessant doch an die folgenden Abhandlungen: Buchner: Beiträge zur näheren Kenntniss des brasilianischen Pfeilgiftes. S. 536. (Strychnin enthält nach Herrn B. dieses merkwürdige Gift nicht). — Schönbein: Beiträge zur näheren Kenntniss der Nitrification. S. 543. (Allgemein gehalten, ohne in zu viele Specialitäten einzugehen, und daher den Lehrern der Chemie zur Beachtung zu empfehlen).

1861. II. Heft I. A. Wagner: Bedenken über einige neuere, hauptsächlich auf naturgeschichtliche Anhaltspunkte begründete Versuche, das Alter der europäischen Urbevölkerung zu bestimmen. S. 29. (Ein auch ohne sehr specielle naturgeschichtliche Kenntnisse verständlicher,

sehr interessanter und daher zur Beachtung auch hier zu empfehlender Aufsatz). — Beckers: Ueber die Stellung der Philosophie zu den exacten Wissenschaften. S. 44. Wir machen unsere Leser auf diese Abhandlung recht sehr aufmerksam und empfehlen ihnen dieselbe als in vieler Rücksicht überaus belehrend, weil in derselben in sehr eingehender Weise vorzüglich auch das Verhältniss der Philosophie und Mathematik zu einander besprochen wird, mit besonderer Rücksicht auf Schelling, wofür namentlich auch der Herausgeber des Archivs, für welchen dieser in vielen Beziehungen wichtige Gegenstand von jeher von besonderem Interesse gewesen ist, dem Herrn Verfasser zu besonderem Danke verpflichtet ist. Scharf werden die Unterschiede der Philosophie von der Mathematik und insbesondere der Geometrie (S. 57.) festgestellt, besonders auch die mathematische Gewissheit besprochen, und S. 57. ff. mit den folgenden Bemerkungen geschlossen, die ich ihres besonderen Interesses wegen den Lesern des Archivs mittheilen will: „Zur unbedingten Gewissheit kann uns also nach Schelling nur diejenige Wissenschaft führen, die bis zur Erkenntniss des höchsten Princips und der von ihm abgeleiteten Principe oder mit anderen Worten, den letzten, reinen Potenzen und Ursachen des Seins hindurchgedrungen, nicht aber vermögen diess jene, die, wie die mathematischen, ungeachtet der sie beherrschenden reinen Vernunftnothwendigkeit, dennoch nur innerhalb eines beschränkten Gebietes sich bewegen und mithin bloss relative Gewissheit gewähren können. Und hierauf bezieht sich die Stelle in der „Abhandlung über die Quelle der ewigen Wahrheiten", wo Schelling gelegentlich von der nahe liegenden Meinung spricht, dass die Existenz Gottes eine ewige Wahrheit in demselben Sinne sei, in welchem $3+3=6$ eine solche ist, einer Meinung, der man, wie er beifügt, sich doch vielleicht ebensowohl versucht finden könnte zu widersprechen, wie jener Abt eines Klosters, der den allzueifrigen Lehrer, welcher sich hatte hinreissen lassen, zu sagen, Gottes Dasein sei so gewiss als 2 mal 2 vier sei, wegen dieses Ausspruchs zurechtwies, indem er hinzusetzte, Gottes Dasein sei weit gewisser als $2\times2=4$ sei. Ich begreife vollkommen, sagt Schelling (I. 581.), wenn, wie ferner erzählt wird, die Zuhörenden über eine solche Aeusserung lachten, wie ich begreife, dass es auch jetzt noch Menschen gibt, die nicht begreifen können, wie etwas gewisser sein könne, als dass $2\times2=4$ ist. Ohne den Ausdruck untersuchen zu wollen, ist es gewiss, dass es Wahrheiten von verschiedener Ordnung gibt, und dass den Wahrheiten der Arithmetik und der Mathematik überhaupt schon darum nicht unbedingte Gewissheit

beiwohnen kann, weil diese Wissenschaften, wie ich schon früher aus Platon angeführt, mit Voraussetzungen zu Werke gehen, die sie selbst nicht rechtfertigen, und damit, was deren Werth und Geltung betrifft, einen höheren Gerichtshof anerkennen; ferner weil sie Vieles nur erfahrungsmässig wissen, z. B. von geraden und ungeraden, abgeleiteten und Primzahlen, für welche sie noch nicht einmal das Gesetz des gegenseitigen Abstandes gefunden." Mögen sich die Leser nochmals die vielfach interessante Abhandlung zur sorgfältigen Beachtung empfohlen sein lassen. — A. W. Volkmann: Ueber die Irradiation, welche auch bei vollständiger Accomodation des Auges stattfindet. S. 75.

1861. II. Heft II. Schönbein: Beiträge zur näheren Kenntniss der Nitrification. Beiträge zur näheren Kenntniss des Sauerstoffs und der einfachen Salzbildner. S. 122. — Sehr allgemein interessant ist auch der folgende Aufsatz: A. Wagner: Ueber ein neues, angeblich mit Vogelfedern versehenes Reptil. S. 146.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXLVI. S. 11.)

Nr. 1. tom. IV. 1861. Proprietà di una classe d'integrali di irrazionali algebrici possibili con soli logaritmi. Nota di Carlo Maria Piuma. pag. 5. — Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe. Par M. L. Cremona. pag. 22. — La Teorica delle funzioni ellitiche. Monografia del Prof. E. Betti (Continuazione). pag. 26. — Intorno ad una formola sommatoria delle potenze intere de'numeri naturali. Nota di F. Siacci. pag. 46. — Sur quelques Theorèmes d'Algèbre par M. Michael Roberts. p. 50.

Rivista bibliografica. Sopra alcune curve derivate dall'ellisse e dal circolo: Curve di Cartesio. Articolo del Prof. B. Tortolini. pag. 53. — Pubblicazioni recenti. pag. 56.

Da das vorliegende Heft dieses in jeder Beziehung wichtigen und ausgezeichneten Journals auf dem Titel nicht mehr eine Bezeichnung der beiden Monate, für welche es bestimmt ist, sondern bloss die Bezeichnung Nr. 1. tom. IV. 1861. trägt; so scheint es, dass dasselbe nicht mehr in sechs Heften für das Jahr, jedes für zwei Monate, sondern zwanglos nach einzelnen Nummern

erscheinen soll, eine Einrichtung, die wir in jeder Beziehung zweckmässig finden, und die nach unserer Meinung unbedingt den Vorzug vor der früheren Einrichtung verdient.

Monatsbericht der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. S. Liter. Ber. Nr. CXLVI. S. 12.

Juni 1861. Magnus: Ueber die Veränderungen im Inductionsstrome bei Anwendung verschiedener Widerstände. S. 553 — S. 561. — Derselbe: Ueber die Farbenveränderung des elektrischen Lichts. S. 561 — S. 562. — Gerlach: Ueber die Steigerung der Vergrösserung auf photographischem Wege, mitgetheilt von Herrn Du Bois-Reymond. S. 596 — S. 599. — Braun: Ueber einige Verhältnisse der Blattgestaltung, welche zur Blattstellung eine Beziehung haben. S. 601. (Blosse Anzeige eines gehaltenen Vortrags). — Kronecker: Mittheilung über seine algebraischen Arbeiten. S. 601 — S. 608. Im Allgemeinen bezeichnet Herr K. die Richtung seiner neuesten algebraischen Studien durch die folgenden Worte: „Ich kam bei meinen Studien über die algebraische Auflösung der Gleichungen sehr bald zur Einsicht, dass das Problem nach zwei Seiten hin einer allgemeineren Auffassung fähig ist, und zwar in folgender Weise: einerseits sind statt der Gleichungscoefficienten, d. h. also statt der symmetrischen Functionen der Wurzeln, allgemeinere rationale Functionen derselben, welche ich Affectfunctionen nenne, als gegeben vorauszusetzen; andererseits sind statt der gewöhnlichen Wurzelzeichen, d. h. also statt derjenigen Functionszeichen, welche durch die reinen Gleichungen definirt werden, allgemeinere algebraische Functionen einzuführen, welche bei der Auflösung als Hülfsfunctionen dienen sollen." Dieser gewiss fruchtbare Gedanke wird nun in dem sehr lesenswerthen und interessanten Aufsatze weiter ausgeführt.

Juli 1861. Kummer: Ueber zwei neue Beweise der allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist. S. 656. — Kirchhoff: Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente, mitgetheilt von Herrn Magnus. S. 657. (Beides blosse Anzeigen gehaltener Vorträge). — Dove: Ueber eine Interferenzerscheinung in den Zwillingskrystallen doppelt brechender Körper. S. 668. — Braun: Ueber eine sonderbare Wirkung der diesjährigen Spätfröste auf die Blätter der gemeinen Rosskastanie (Aesculus Hippocastanum) und einiger anderer Bäume.

S. 691 — S. 700. — A. Schmidt: Ueber den Faserstoff und die Ursachen seiner Gerinnung, mitgetheilt von Herrn Du Bois-Reymond. S. 705 — S. 706.

August 1861. Magnus: Ueber metallische und flüssige Widerstände, durch welche Inductionsströme alternirend werden. S. 872 — S. 880. — Dove: Ueber die Anwendung achromatisirter Arragonitprismen zu Polarisatoren. S. 884 — S. 885.





